задача 1

Для каждого допустимого значения параметра α решите неравенство $\log_{\mathrm{tg}\,\alpha}(3x+13) > 2\log_{\mathrm{tg}\,\alpha}(x+3)$.

Решение.

1. Если $0 < \mathrm{tg}\,\alpha < 1$, то $\pi k < \alpha < \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, и мы имеем:

$$\log_{\mathrm{tg}\,\alpha}(3x+13) > 2\log_{\mathrm{tg}\,\alpha}(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\mathrm{tg}\,\alpha}(3x+13) > \log_{\mathrm{tg}\,\alpha}(x+3)^2, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+13 < (x+3)^2, \\ x > -3, \\ 3x+13 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 > 0, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+4) > 0, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

2. Если $\mathrm{tg}\,\alpha > 1$, то $\frac{\pi}{4} + \pi k < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ и тогда:

$$\log_{\mathrm{tg}\,\alpha}(3x+13) > 2\log_{\mathrm{tg}\,\alpha}(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\mathrm{tg}\,\alpha}(3x+13) > \log_{\mathrm{tg}\,\alpha}(x+3)^2, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+13 > (x+3)^2, \\ x > -3, \\ 3x+13 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 < 0, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+4) < 0, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 1.$$

Ответ: $x > 1$ при $\pi k < \alpha < \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-3 < x < 1$ при $\frac{\pi}{4} + \pi k < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

задача 2

Решите уравнение $\cos^2(x\sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2+x+1}$.

Решение. Левая часть уравнения не больше, а правая — не меньше единицы, следовательно, данное уравнение равносильно системам:

$$\begin{cases} \cos^2(x\cdot\sin x) = 1, \\ 1 + \log_5^2(x^2+x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2(x\cdot\sin x) = 1, \\ \log_5(x^2+x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2(x\cdot\sin x) = 1, \\ x^2+x+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2(x\cdot\sin x) = 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1, \\ \cos^2(-1\cdot\sin(-1)) = 1 \text{ – неверно}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ \cos^2 0 = 1 \text{ – верно} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

задача 3

Решите уравнение $32^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot 625^{x+2}=600^{x+7}$.

Решение.

$$32^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot 625^{x+2}=600^{x+7}\Leftrightarrow 2^{5(x+3)}\cdot 3^{3x+1}\cdot 5^{4(x+2)}=2^{3(x+7)}\cdot 3^{x+7}\cdot 5^{2(x+7)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x-6}\cdot 3^{2x-6}\cdot 5^{2x-6}=1\Leftrightarrow 30^{2x-6}=1\Leftrightarrow 2x-6=0\Leftrightarrow x=3.$$

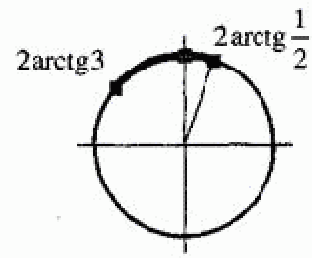
Ответ: {3}.

задача 4

Найдите множество значений функции $y=\sin 2x$, если $x\in\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\operatorname{arctg}3\right]$.

Решение.

1. Пусть $2x=t$. Тогда множество значений функции $y=\sin 2x$ на отрезке $\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\operatorname{arctg}3\right]$ совпадает с множеством значений функции $y=\sin t$ на отрезке $\left[2\operatorname{arctg}\frac{1}{2};2\operatorname{arctg}3\right]$.



Так как $y=\operatorname{arctg}x$ — убывающая функция, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}3>\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, откуда $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}3>\frac{2\pi}{3}$.

2. Изобразим отрезок $\left[2\operatorname{arctg}\frac{1}{2};2\operatorname{arctg}3\right]$ на единичной окружности (см. рис.).

Функция $y=\sin t$ возрастает на отрезке $\left[2\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};2\operatorname{arctg}3\right]$, следовательно, свое наибольшее значение она принимает в точке $x=\frac{\pi}{2}$, а наименьшее — на одном из концов отрезка $\left[2\operatorname{arctg}\frac{1}{2};2\operatorname{arctg}3\right]$.

3. Вычислим эти значения:

а) наибольшее значение функции: $\sin\frac{\pi}{2}=1$;

б) поскольку $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}$, имеем:

$$\sin(2\operatorname{arctg}3)=\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}3)}=\frac{2\cdot 3}{1+9}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15},$$

$$\sin(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}) = \frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}\frac{1}{2})} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = \frac{10}{15}.$$

Таким образом, $\sin(2\operatorname{arctg}3) < \sin(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2})$, откуда 0,6 — наименьшее значение функции.

Поскольку функция $y=\sin t$ непрерывна на отрезке $\left[2\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\ 2\operatorname{arctg}3\right]$, множество ее значений есть отрезок $\left[\sin(2\operatorname{arctg}3);\ \sin\frac{\pi}{2}\right]$, т.е. отрезок [0,6; 1].

Ответ: [0,6; 1].

задача 5

При каких значениях a сумма $\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_c(\cos^2 x+5)$ равна 1 хотя бы при одном значении x?

Решение.

Требуется найти такие значения параметра a, чтобы уравнение $\log_a(\cos^2 x+1)+\log_a(\cos^2 x+5)=1$ имело хотя бы одно решение. Поскольку $\cos^2 x+1>0$ и $\cos^2 x+1>0$, имеем:

$$\log_a(\cos^2 x+1)+\log_a(\cos^2 x+5)=1 \Leftrightarrow \log_a((\cos^2 x+1)(\cos^2 x+5))=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a(\cos^4 x+6\cos^2 x+5)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a\neq 1, \\ \cos^4 x+6\cos^2 x+5=a. \end{cases}$$

Уравнение $\cos^4 x+6\cos^2 x+5=a$ имеет решения, если a принадлежит множеству значений функции $f(x)=\cos^4 x+6\cos^2 x+5$, совпадающему со множеством значений функции $g(t)=t^2+6t+5$ на отрезке [0; 1].

Поскольку абсцисса вершины $t_0=-3$ параболы $g(t)=t^2+6t+5$ меньше нуля, функция $g(t)=t^2+6t+5$ возрастает на отрезке [0; 1] и множество ее значений на этом отрезке есть отрезок $[g(0);\ g(1)]$, т.е. отрезок [5; 12]. Таким образом, искомыми значениями параметра являются все числа a, такие, что $5\le a\le 12$.

Ответ: [5; 12].

задача 6

Решите уравнение $\sqrt{13+\frac{4}{\log_x 3}} = 2\log_3(3\sqrt{x})$.

Решение.

$$\sqrt{13+\frac{4}{\log_x 3}} = 2\log_3(3\sqrt{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\neq 1, \\ \sqrt{13+4\log_3 x} = 2\log_3 3+2\log_3\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\neq 1, \\ \sqrt{13+4\log_3 x} = 2+\log_3 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\neq 1, \\ 2+\log_3 x\ge 0, \\ 13+4\log_3 x=(2+\log_3 x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\neq 1, \\ \log_3 x\ge -2, \\ 13+4\log_3 x=4+4\log_3 x+\log_3^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\neq 1, \\ \log_3 x\ge -2, \\ \log_3^2 x=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\neq 1, \\ \log_3 x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=27.$$

Ответ: {27}.

задача 7

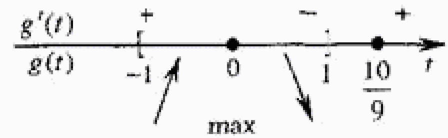
Найдите все значения p, при которых уравнение $6\sin^3 x = p - 5\cos 2x$ не имеет корней.

Решение.

$$6\sin^3 x = p - 5\cos 2x \Leftrightarrow p = 6\sin^3 x + 5\cos 2x \Leftrightarrow p = 6\sin^3 x + 5(1 - 2\sin^2 x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p = 6\sin^3 x - 10\sin^2 x + 5.$$

Уравнение не имеет решений при всех p, не принадлежащих множеству значений функции $y(x) = 6\sin^3 x - 10\sin^2 x + 5$, совпадающему со множеством значений функции $g(t) = 6t^3 - 10t^2 + 5$ на отрезке $[-1;\ 1]$. Найдем это множество:

Имеем: $g'(t) = 18t^2 - 20t = 2t(9t - 10)$ (см. рис.).



Тогда

а) $\max\limits_{[-1;\,1]} g(t) = g_{\max} = g(0) = 5$;

б) $g(-1) = -11$, $g(1) = 1$, и так как $g(-1) < g(1)$, имеем $\min\limits_{[-1;\,1]} g(t) = g(-1) = -11$. Так как функция $g(t) = 6t^3 - 10t^2 + 5$ непрерывна на отрезке $[-1;\ 1]$, ее множество значений – отрезок $[-11;\ 5]$.

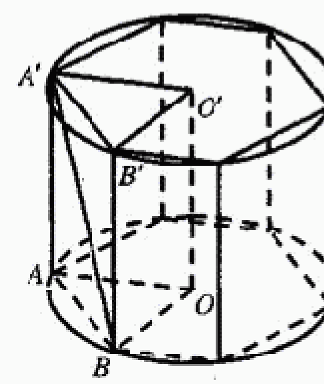
Таким образом, уравнение не имеет решений для $p \in (-\infty;\ -11) \cup (5;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -11) \cup (5;\ +\infty)$.

задача 8

Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $16\pi\sqrt{3}$. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.

Решение. Введем обозначения, как показано на рисунке.



1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна:

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH,$$

где R — радиус основания цилиндра, H — его высота.
Тогда

$$16\pi\sqrt{3} = 2\pi RH \Leftrightarrow RH = 8\sqrt{3}.$$

2. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между одной из прямых и параллельной ей плоскостью, содержащей вторую прямую. Тогда расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой стороны призмы есть расстояние от прямой OO' до плоскости $AA'B'B$, которое равно высоте треугольника AOB, проведенной из точки O.

3. Так как треугольник AOB равносторонний, его высота есть $OB \cdot 0{,}5\sqrt{3} = 0{,}5R\sqrt{3}$, откуда

$$0{,}5R\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow R = 4.$$

4. Объем призмы равен:

$$V = S \cdot H = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot R \cdot RH = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot 4 \cdot 8\sqrt{3} = 144.$$

Ответ: $V = 144$.

задача 9

Найдите все значения параметра a, при которых область определения функции $y=((\sqrt{a})^{2x+1}+a^4\sqrt{x}-x^{0,5+x\log_x a}-(\sqrt{a})^9)^{0,5}$ содержит два или три целых числа.

Решение. По смыслу задачи: $a>0$, $0<x\neq 1$.

Поскольку степень с дробным положительным показателем определена только для неотрицательного основания, область определения данной функции задается неравенством $(\sqrt{a})^{2x+1}+a^4\sqrt{x}-x^{0,5+x\log_x a}-(\sqrt{a})^5\geq 0$. Решим это неравенство:

$$(\sqrt{a})^{2x+1}+a^4\sqrt{x}-x^{0,5+x\log_x a}-(\sqrt{a})^9\geq 0\Leftrightarrow a^{x+\frac{1}{2}}+a^4\cdot x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\cdot a^x-a^{\frac{9}{2}}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^x(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})+a^4(x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})\geq 0\Leftrightarrow(a^x-a^4)(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})\geq 0.$$

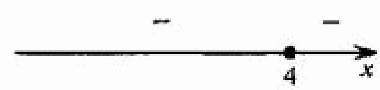
При $a=1$ решениями неравенства являются все допустимые значения x, и область определения данной функции содержит бесконечное множество целых чисел.

Решим последнее неравенство при $a>0$, $a\neq 1$ методом интервалов.

Имеем:

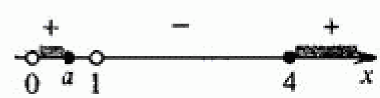
1. При $a>4$: ООФ — отрезок $[4;\,a]$.

2. При $a=4$: ООФ — множество $\{4\}$.



3. При $1<a<4$: ООФ — отрезок $[a;\,4]$.

4. При $0<a<1$: ООФ — множество $(0;\,a]\cup[4;\,+\infty)$.



В первом случае ООФ содержит 2 или 3 целых числа, если $5\leq a<7$, во втором случае — ни при каких a, в третьем — при $1<a\leq 3$, в четвертом — ни при каких a.

Ответ: $a\in(1;\,3]\cup[5;\,7)$.

задача 10

Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{6x-2y-7}=\dfrac{3x-y}{4}+1,\\ \dfrac{x-11y-8}{3x-y-16}=x-y.\end{cases}$

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы. Пусть $\dfrac{3x-y}{4}=t$, тогда $3x-y=4t$, $6x-2y=8t$ и уравнение принимает вид $\sqrt{8t-7}=t+1$. Имеем:

$$\sqrt{8t-7}=t+1\Leftrightarrow\begin{cases}t+1\geq 0,\\ 8t-7=(t+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1,\\ t^2-6t+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1,\\ \left[\begin{array}{l}t=4;\\ t=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4;\\ t=2.\end{array}\right.$$

Таким образом, возможны два случая: $3x-y=16$ или $3x-y=8$.

Если $3x-y=16$, система не имеет решений, так как знаменатель левой части второго уравнения обращается в нуль.

задача 11

Рассмотрим случай $3x-y=8$. Имеем:

$$\begin{cases}3x-y=8,\\ \dfrac{x-11y-8}{3x-y-16}=x-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-8,\\ \dfrac{x-11(3x-8)-8}{8-16}=x-(3x-8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-8,\\ \dfrac{-32x+80}{-8}=-2x+8\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-8,\\ 4x-10=-2x+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-8,\\ 6x=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1,\\ x=3.\end{cases}$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет одно решение: (3; 1).

Ответ: (3; 1).

задача 12

Найдите наименьшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю OM, где O — начало координат, а M — точка на графике функции $y=1-3\ln(0,25x-2)$, $9\le x\le 11,5$.

Решение. Пусть абсцисса точки M равна x, тогда ее ордината y равна $1-3\ln(0,25x-2)$.

Заметим, что функция $g(x)=3\ln(0,25x-2)$ возрастает на своей области определения — открытом луче $(8;\ +\infty)$ и обращается в нуль в точке 12. Поэтому заданная функция $y=1-3\ln(0,25x-2)$ убывает на промежутке (8; 12) и принимает только положительные значения. Это означает, что для всех x из отрезка [9; 11,5] точка $M\ (x;\ y)$ лежит в первой четверти.

Тогда периметр прямоугольника равен: $2x+2y=2x+2-6\ln(0,25x-2)$. Осталось найти наименьшее значение функции $p(x)=2x-6\ln(0,25x-2)+2$ на отрезке [9; 11,5].

Найдем производную функции $p(x)$:

$$p'(x)=2-6\frac{1}{0,25x-2}\cdot 0,25=2-\frac{6}{x-8}=\frac{2x-22}{x-8}.$$

Найденная производная обращается в нуль в точке $x=11$, отрицательна на полуинтервале [9; 11) и положительна на полуинтервале (11; 11,5]. Тем самым точка $x=11$ — точка минимума, причем это единственная точка экстремума непрерывной на заданном отрезке функции. Поэтому $p(11)$ есть наименьшее на отрезке [9; 11,5] значение исследуемой функции. Найдем его:

$$p(11)=2x-6\ln(0,25x-2)+2\big|_{x=11}=22-6\ln\left(\frac{11}{4}-2\right)+2=24-6\ln\frac{3}{4}.$$

Таким образом, наименьшее значение периметра прямоугольника равно $24-6\ln\frac{3}{4}$.

Ответ: $24-6\ln\frac{3}{4}$.

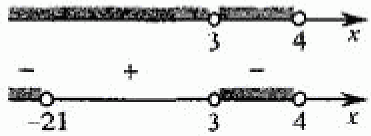
задача 13

Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y=\dfrac{\log_{0,2}(20-5x)}{12-4x}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y=-\dfrac{3}{12-4x}$.

Решение. Множество искомых значений x совпадает со множеством решений неравенства $\dfrac{\log_{0,2}(20-5x)}{12-4x}<-\dfrac{3}{12-4x}$, решая которое, последовательно получаем:

$$\frac{\log_{0,2}(20-5x)}{12-4x}<-\frac{3}{12-4x}\Leftrightarrow\frac{\log_{0,2}(20-5x)}{12-4x}+\frac{3}{12-4x}<0\Leftrightarrow\frac{\log_{0,2}(20-5x)+3}{12-4x}<0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов (на рисунке на первой оси отмечена область определения неравенства, задаваемая соотношениями $20-5x>0$ и $12-4x\neq 0$, а на второй — корни числителя и знаменателя):



$$x<-21,\ 3<x<4$$

Ответ: $(-\infty;-21)\cup(3;4)$.

задача 14

Решите уравнение $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4$.

Решение. Заметим, что $\sqrt{16-8x+x^2}=\sqrt{(4-x)^2}=|4-x|$. Тогда

$$\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4\Leftrightarrow|4-x|+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4.$$

Поскольку правая часть полученного уравнения должна быть неотрицательна, имеем условие $x-4\geq 0$, откуда $|4-x|=x-4$ и уравнение принимает вид: $\sqrt{4x^2-13x-17}=0$, где $x\geq 4$ (*).

Далее имеем:

$$\sqrt{4x^2-13x-17}=0\Leftrightarrow 4x^2-13x-17=0\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=\dfrac{17}{4}.\end{array}\right.$$ Условию (*) отвечает число $\dfrac{17}{4}$.

Ответ: $\dfrac{17}{4}$.

задача 15

Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b=9^a+3^{2+a}-1$ и $c=3^{2-a}-9^{-a}-5$ меньше 9.

Решение. Наибольшее из двух чисел меньше 9 тогда и только тогда, когда каждое из них меньше 9 (если числа равны друг другу, наибольшим считается каждое из них).

Таким образом, имеем:

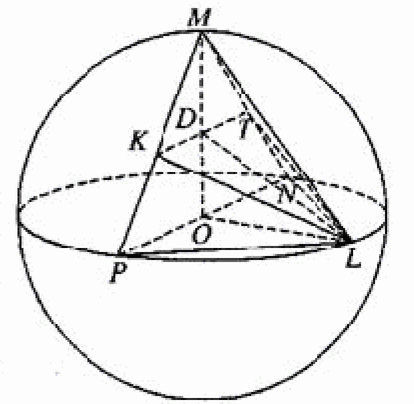
$$\begin{cases}9^a+3^{2+a}-1<9,\\ 3^{2-a}-9^{-a}-5<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9^a+9\cdot 3^a-10<0,\\ 9^{-a}+9\cdot 3^{-a}-14>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3^a-1)(3^a+10)<0,\\ (3^{-a}-2)(3^{-a}-7)>0\end{cases}\underset{3^a+10>0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}3^a-1<0,\\ (3^{-a}-2)(3^{-a}-7)>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3^a<1,\\ \left[\begin{array}{l}3^{-a}<2;\\ 3^{-a}>7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{-a}>1,\\ \left[\begin{array}{l}3^{-a}<2;\\ 3^{-a}>7\end{array}\right.\end{cases}\underset{3>1}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}1<3^{-a}<2;\\ 3^{-a}>7\end{array}\right.\underset{3>1}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}1<-a<\log_3 2,\\ -a>\log_3 7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\log_3 2<a<-1,\\ a<-\log_3 7.\end{array}\right.$$

Ответ: $a\in(-\infty;-\log_3 7)\cup(-\log_3 2;0)$.

задача 16

Отрезок PN, равный 8, — диаметр сферы. Точки M и L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите площадь треугольника KLT, где K и T — середины ребер PM и NM соответственно.



Решение. Примем треугольник LNP за основание пирамиды $PNML$, а отрезок PN за основание треугольника LNP (см.рис). Тогда объем пирамиды $PNML$ можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot PN \cdot h \cdot H = \frac{1}{3} RhH$, где R — радиус данной сферы, h — высота треугольника LNP, проведенная из вершины L, H — высота пирамиды $PNML$. Поскольку PN — диаметр данной сферы, а точка L лежит на сфере, треугольник LNP — прямоугольный треугольник, вписанный в окружность, радиус которой равен радиусу R данной сферы. Следовательно, наибольшее значение высоты h треугольника LNP равно R. Плоскость LNP отсекает от данной сферы полусферу, следовательно, наибольшее расстояние от точек сферы до этой плоскости также равно радиусу сферы, откуда R — наибольшее значение высоты H пирамиды $PNML$. Таким образом, пирамида $PNML$ имеет наибольший объем, если треугольники PLN и PMN прямоугольные, равнобедренные треугольники с общей гипотенузой PN, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях (см. рис.).

Далее имеем:

1) треугольники LON, LOP, LOM, POM, NOM равны по двум катетам;

2) треугольники LMN и LMP — равносторонние треугольники со стороной $NL = PL = ON\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Медианы LK и LT этих треугольников равны: $LK = LT = \dfrac{PL\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$;

3) поскольку KT — средняя линия треугольника PMN, прямая KT параллельна прямой PN и $KT = \dfrac{1}{2} PN = R = 4$. В свою очередь, прямая PN перпендикулярна двум пересекающимся прямым MO и OL плоскости MOL, значит, она перпендикулярна самой этой плоскости. Тогда прямая KT также перпендикулярна плоскости MOL, а значит, и прямой LD, лежащей в этой плоскости;

4) треугольник KLT равнобедренный, и его высота LD является медианой прямоугольного равнобедренного треугольника LOM, откуда $LD = \sqrt{LO^2 + OD^2} = 2\sqrt{5}$.

Окончательно находим:

$$S_{KLT} = \frac{1}{2} KT \cdot LD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$$

Ответ: $4\sqrt{5}$.

задача 17

Даны два уравнения: $\log_7(x(12 + \sqrt{-p})) = p(p-1) - 6x + 3$ и $2x - \dfrac{25}{x} = \dfrac{x^2 - (5p-3)x + 15}{x(p+1)}$. Значение параметра p выбирается так, что $p \le 0$, $p \ne -1$ и число различных корней первого уравнения в сумме с числом $p + 5$ дает число различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

Решение.

Умножив обе части уравнения $2x - \dfrac{25}{x} = \dfrac{x^2 - (5p-3)x + 15}{x(p+1)}$ на общий знаменатель $x(p+1)$, получаем:

$$2x^2(p+1) - 25(p+1) = x^2 - (5p-3)x + 15 \quad \Leftrightarrow \quad (2p+1)x^2 + (5p-3)x - 5(5p+8) = 0.$$

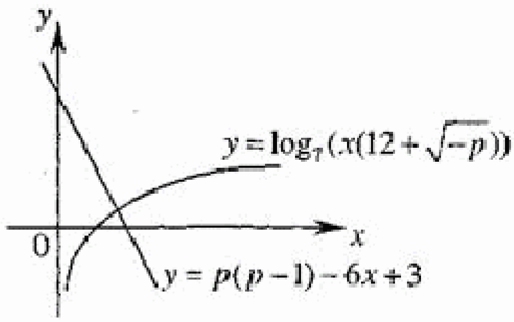
По смыслу задачи p — целое отрицательное число, отличное от минус единицы, и кроме того, $x = 0$ i является корнем уравнения $(2p+1)x^2+(5p-3)x-5(5p+8)=0$, следовательно, это уравнение равносил но данному уравнению.

Далее имеем:

$$(2p+1)x^2+(5p-3)x-5(5p+8)=0 \Leftrightarrow (x+5)((2p+1)x-(5p+8))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5; \\ (2p+1)x=5p+8. \end{array}\right.$$

Таким образом, корнями рассматриваемого уравнения являются решения уравнения $(2p+1)x=5p+8$ число -5. Поскольку коэффициент при x в уравнении $(2p+1)x=5p+8$ отличен от нуля при всех допус тимых значениях параметра p, данное уравнение имеет единственное решение, не равное -5 при целы значениях параметра p. Поэтому число различных корней второго уравнения равно 2.

Рассмотрим теперь уравнение $\log_7(x(12+\sqrt{-p}))=p(p-1)-6x+3$. Логарифмическая функция с осно ванием 7 — функция возрастающая и линейная функция $y=x(12+\sqrt{-p})$ — возрастающая функция поскольку $(12+\sqrt{-p})>0$, следовательно, сложная функция $y=\log_7(x(12+\sqrt{-p}))$ — также возрастаю щая функция. С другой стороны, линейная функция $y=p(p-1)-6x+3$ — убывающая функция, так как $-6<0$ (см. рис). Таким образом, данное уравнение имеет не более одного корня. Ясно, что в нашем случае этот корень есть.



По условию число различных корней первого уравнения в сумме с числом $p+5$ дает число различных корней второго уравнения, тогда $1+(p+5)=2$, откуда $p=-4$.

Первое уравнение при $p=-4$ принимает вид: $\log_7 14x = 23-6x$. Подбором находим $x=3,5$. Как показано ранее, найденный корень единственный.

Ответ: $\{3; 5\}$.

задача 18

Решите уравнение $\sin 0{,}8x = \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 + x^2 - 3$.

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) задается неравенством $4 - x^2 \geq 0$, решая которое, получаем: $-2 \leq x \leq 2$. На этом множестве имеем:

$$\sin 0{,}8x = \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 + x^2 - 3 \Leftrightarrow \sin 0{,}8x = 4 - x^2 + x^2 - 3 \Leftrightarrow \sin 0{,}8x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}8x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \subset \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{8} + \frac{5\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Далее имеем:

1) если $k \leq -1$, то $x \leq \frac{5\pi}{8} - \frac{5\pi}{2} = -\frac{15\pi}{8} < -\frac{15\cdot 3}{8} < -2$;

2) если $k \geq 1$, то $x \geq \frac{5\pi}{8} + \frac{5\pi}{2} = \frac{25\pi}{8} > \frac{25\cdot 3}{8} > 2$;

3) если $k = 0$, то $x = \frac{5\pi}{8} < \frac{5\cdot 3{,}2}{8} = 2$.

Таким образом, $x = \frac{5\pi}{8}$ — единственный корень данного уравнения.

Ответ: $\left\{\frac{5\pi}{8}\right\}$.

задача 19

Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x) = \log_{36}(9x+27)$ и $g(x) = 1{,}25$ меньше, чем 0,25.

Решение.

Искомое множество совпадает с множеством решений неравенства $\left|\log_{36}(9x+27) - 1{,}25\right| < 0{,}25$.

Решим это неравенство:

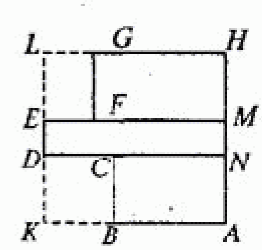
$$\left|\log_{36}(9x+27) - 1{,}25\right| < 0{,}25 \Leftrightarrow -0{,}25 < \log_{36}(9x+27) - 1{,}25 < 0{,}25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < \log_{36}(9x+27) < 1{,}5 \underset{36>1}{\Leftrightarrow} 36 < 9x + 27 < 216 \Leftrightarrow 1 < x < 21.$$

Ответ: (1; 21).

задача 20

Требуется разметить на земле участок $ABCDEFGH$ площадью 2000 $м^2$, состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке, где $FG = BC = 20\,м$, $EF = 10\,м$ и $CD \geq 15\,м$. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL, LH и CD, при которых периметр является наименьшим.



Решение. Обозначим через x, y и S соответственно длины отрезков LH, KL и площадь участка $ABCDEFGH$. Тогда периметр P данного участка выражается формулой $P = 2(x + y)$.

Оценим площадь прямоугольника $AKLH$:

$S_{AKLH} = S + EF\cdot FG + CD\cdot BC = 2000 + 200 + 20\cdot CD \geq 2200 + 20\cdot 15 = 2500$. Значит, $xy \geq 2500$, откуда, учитывая $y > 0$, получаем $y \geq \frac{2500}{x}$. Следовательно,

$$P \geq 2\left(x + \frac{2500}{x}\right).$$

Найдем наименьшее значение функции $P(x)=2\left(x+\frac{2500}{x}\right)$ на промежутке $(0;+\infty)$. [1]

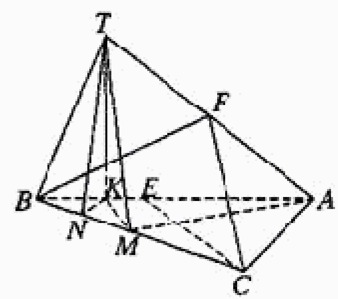
На основании теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух неотрицательных чисел получаем: $\frac{x+\frac{2500}{x}}{2}\geq\sqrt{x\cdot\frac{2500}{x}} \Leftrightarrow x+\frac{2500}{x}\geq 100$. При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=\frac{2500}{x}$, откуда, учитывая $x>0$, получаем $x=50$. [2]

Таким образом, $P(50)=200$ — наименьшее значение функции $P(x)$ на промежутке $(0;+\infty)$, и достигается оно при $x=y=50$. При этом $CD=15$.

Ответ: 200 *м*, 50 *м*, 50 *м*, 15 *м*.

задача 21

В пирамиде $FABC$ грани ABF и ABC перпендикулярны, $FB:FA=13:3$. Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 1,5. Точка M выбрана на ребре BC так, что $BM:MC=2:3$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB, площадь этой сферы равна 4π. Найдите объем пирамиды $ACMT$.



Решение. Опустим перпендикуляры TK и CE из точек T и C соответственно на плоскости ABC и ABF и перпендикуляр TN из точки T на прямую BC, а также построим отрезки KN и KM (см. рис).

Поскольку плоскости ABF и ABC перпендикулярны, точки K и E лежат на их линии пересечения — прямой AB — и отрезки TK и CE перпендикулярны AB. Кроме того, на основании теоремы о трех перпендикулярах, $KN\perp BC$, так как KN — проекция TN на плоскость ABC.

Отрезки BK и KM — проекции равных наклонных BT и MT на плоскость ABC, следовательно, $BK=KM$. Таким образом, отрезок KN является высотой равнобедренного треугольника BKM, а следовательно, является и его медианой, откуда $BN=\frac{1}{2}BM=\frac{1}{5}BC$.

---

[1] Учитывая условие $CD\geq 15$, можно более точно указать интересующий нас промежуток: $(15;+\infty)$.

[2] Исследование функции $P(x)=2\left(x+\frac{2500}{x}\right)$ можно было также провести с помощью производной.

Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB, следовательно, AB — диаметр $2R$ этой сферы. Так как любое сечение сферы плоскостью есть окружность, углы AFB и ACB — вписанные углы, опирающиеся на диаметр AB, следовательно, $AC\perp BC$ и $AF\perp BF$.

Так как BE — проекция BC на плоскость ABF, угол CBE является углом между прямой BC и плоскостью ABF.

Далее имеем:

1) по условию площадь сферы, описанной около пирамиды $FABC$, равна 4π, откуда $4\pi R^2=4\pi$, $R=1$, $AB=2$;

2) прямые KN и AC параллельны, так как они лежат в одной плоскости и перпендикулярны одной прямой BC, следовательно, $\Delta KBN\sim\Delta ABC$, откуда $\frac{BK}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{1}{5}$, $BK=\frac{1}{5}AB$, а значит, $AK=\frac{4}{5}AB=\frac{8}{5}$;

3) в прямоугольном треугольнике ABC тангенс угла B равен $\frac{3}{2}$, следовательно, $AC = \frac{3}{2}BC$. Тогда $BC^2 + AC^2 = AB^2$, $BC^2 + \frac{9}{4}BC^2 = 4$, $BC^2 = \frac{16}{13}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{3}{2}BC = \frac{3}{4}BC^2 = \frac{12}{13}$;

4) треугольники ABC и AMC имеют общую высоту, проведенную из вершены A, следовательно, отношение их площадей равно отношению оснований MC и BC, откуда получаем:

$\frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{3}{5}$, $S_{\Delta AMC} = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{36}{65}$;

5) прямоугольные треугольники ATK и ABF подобны, так как имеют общий острый угол A, следовательно, $\frac{KT}{FB} = \frac{AK}{FA}$, откуда $KT = \frac{FB}{FA} \cdot AK = \frac{13}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{104}{15}$.

Окончательно имеем:

$$V_{ACMT} = \frac{1}{3}S_{\Delta ACM}KT = \frac{36 \cdot 104}{3 \cdot 65 \cdot 15} = \frac{416}{325}.$$

Ответ: $\frac{416}{325}$.

задача 22 Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a \cdot 4^a$ и $4\left(a \cdot 4^{a-0,5} - a^2 \cdot 16^{a-0,5} + 1\right)$ являются решениями неравенства $\log_{x-0,5}\left(\log_4 \frac{x-9}{x-6}\right) \geq 0$.

Решение. Пусть $a \cdot 4^a = t$.

Тогда $4\left(a \cdot 4^{a-0,5} - a^2 \cdot 16^{a-0,5} + 1\right) = 4\left(\frac{a \cdot 4^a}{4^{0,5}} - \frac{a^2 \cdot 4^{2a}}{16^{0,5}} + 1\right) = 2t - t^2 + 4 = -(t-1)^2 + 5$.

Решим теперь неравенство $\log_{x-0,5}\left(\log_4 \frac{x-9}{x-6}\right) \geq 0$.

1) Если $0,5 < x < 1,5$, то данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} \log_4 \frac{x-9}{x-6} \leq 1, \\ \log_4 \frac{x-9}{x-6} > 0. \end{cases}$

Решая эту систему, последовательно получаем:

$$\begin{cases} \log_4 \frac{x-9}{x-6} \leq 1 \\ \log_4 \frac{x-9}{x-6} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-9}{x-6} \leq 4 \\ \frac{x-9}{x-6} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3x+15}{x-6} \leq 0 \\ \frac{-3}{x-6} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-5}{x-6} \geq 0 \\ x-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 5.$$

Таким образом, все числа промежутка (0,5; 1,5) являются решениями данного неравенства.

2) Если $x > 1,5$, то данное неравенство равносильно неравенству $\log_4 \frac{x-9}{x-6} \geq 1$, решая которое, получаем: $\log_4 \frac{x-9}{x-6} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x-9}{x-6} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{x-5}{x-6} \leq 0 \Leftrightarrow 5 \leq x < 6$. Так как все числа промежутка [5; 6) удовлетворяют условию $x > 1,5$, они являются решениями данного неравенства.

Итак, множество $(0,5;1,5)\cup[5;6)$ — есть множество решений данного неравенства и по условию числа t и $-(t-1)^2+5$ должны принадлежать этому множеству.

Точка (1; 5) — вершина параболы $z(t)=-(t-1)^2+5$, ветви которой направлены вниз.

На промежутке [5; 6) функция $z(t)=-(t-1)^2+5$ убывает, и если $t\in[5;6)$, то $z(t)\le z(5)=-11$, т.е. в этом случае число $-(t-1)^2+5$ не является решением данного неравенства.

Если $t\in(0,5;1,5)$, то $z_1<z(t)\le 5$, где z_1 — меньшее из чисел $z(0,5)$ и $z(1,5)$. Поскольку $z(0,5)=z(1,5)=4,75$, в этом случае только число $z(1)=5$ является решением данного неравенства.

Итак, только при $t=1$ оба числа являются решениями данного неравенства.

Осталось решить относительно a уравнение $a\cdot 4^a=1$. (1)

При $a\le 0$ левая часть уравнения (1) неположительна, а правая — положительна, значит, уравнение не имеет неположительных корней.

При $a>0$ уравнение (1) равносильно уравнению $4^a=\frac{1}{a}$. (2)

Поскольку $y=4^a$ — возрастающая функция, а функция $y=\frac{1}{a}$ убывает при $a>0$, уравнение (2) имеет на промежутке $(0;+\infty)$ не более одного корня. Подбором находим $a=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности: владение понятиями «точка экстремума» и «экстремум функции», знание свойств логарифмов и логарифмической функции; умение выполнять тождественные преобразования выражений, содержащих логарифмы, решать рациональные неравенства, находить экстремумы функции и их наибольшие (наименьшие) значения.

Ориентировочное время выполнения: 15 минут.

Это нужно знать

I. Свойства логарифмов

Пусть $a>0,\ a\neq 1,\ b>0, x>0,\ y>0,$ $p\in\mathbb{R}$. Тогда верны следующие соотношения:

$a^{\log_a b}=b$

$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

$\log_a x^p=p\log_a x$

$\log_{a^p} x=\frac{1}{p}\log_a x,\quad p\neq 0$

$\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a},\quad b\neq 1.$

II. Свойства функции $f(x)=\log_a x$

а) $D(f)=(0;+\infty)$;

б) $E(f)=\mathbb{R}$;

в) при $0<a<1$ убывает на $(0;+\infty)$, при $a>1$ возрастает на $(0;+\infty)$.

III. Экстремумы функции

Определения. Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции f, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех значений $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется условие $f(x)<f(x_0)$ $\left(f(x)>f(x_0)\right)$.

Значение функции $f(x_0)$ в этой точке называется *максимумом* (*минимумом*) функции.

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума* функции, а значения функции в этих точках – *экстремумами функции*.

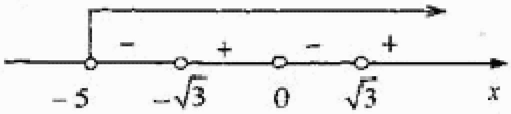
задача 23 Найдите значение функции

$$f(x)=10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}-\log_{0,1}(x+5)}$$ в точке максимума.

Решение.

1. Найдем область определения данной функции:

$$\begin{cases}\dfrac{x^3-3x}{x+5}>0\\ x+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0\\ x+5>0\end{cases}$$



Область определения функции: $(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};+\infty)$.

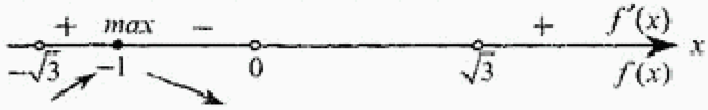
Упростим правую часть формулы, задающей функцию:

$$10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}+\lg(x+5)}=10^{\lg(x^3-3x)}=x^3-3x.$$

2. Рассмотрим функцию $f(x)=x^3-3x,\quad x\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};+\infty)$.

$f'(x)=3x^2-3$.

$f'(x)=0$ при $x=-1$ ($x=1$ не принадлежит области определения данной функции). Далее имеем:



Таким образом, $x=-1$ – точка максимума. Значение функции в точке максимума равно $f(-1)=2$.

Ответ: 2.

задача 24

Для монтажа оборудования необходима подставка объемом 162 $дм^3$ в форме прямоугольного параллелепипеда. Квадратное основание подставки будет вмонтировано в пол, а ее задняя стенка – в стену цеха. Для соединения подставки по ребрам, не вмонтированным в пол или стену, используется сварка. Определите размеры подставки, при которых общая длина сварочного шва будет наименьшей.

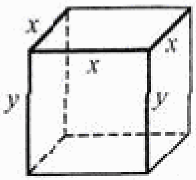


Рис.1

Решение. Обозначим через x $(x>0)$ длину стороны основания, а через y высоту подставки (Рис.1). Тогда по условию $x^2y=162$, откуда $y=\frac{162}{x^2}$. Общая длина сварочного шва задается формулой $l=3x+2y$, где $x>0$, $y=\frac{162}{x^2}$. Таким образом, $l=3x+\frac{324}{x^2}$. Найдем наименьшее значение функции $f(x)=3x+\frac{324}{x^2}$ на промежутке $(0;+\infty)$. Имеем $f'(x)=3\left(1-\frac{216}{x^3}\right)$, $f'(x)=0$, $x=6$. $f_{min}=f(6)$ (Рис.2).

Рис.2

Так как точка минимума $x=6$ – единственная точка экстремума функции f, непрерывной на промежутке $(0;+\infty)$, $f(6)$ – наименьшее значение функции f на этом промежутке. Итак, общая длина сварочного шва будет наименьшей, если $x=6$, $y=\frac{162}{36}=4,5$.

Ответ: Общая длина сварочного шва будет наименьшей, если длина стороны основания подставки будет равна 6 *дм*, высота – 4,5 *дм*.

задача 25

Найдите наибольшее значение площади треугольника OPK, где O – начало координат, P – точка на графике функции $y=\frac{5}{x}+64x^5e^{6-4x}$, $0,7\le x\le 2$, а K – точка на оси Ox, абсцисса которой равна абсциссе точки P.

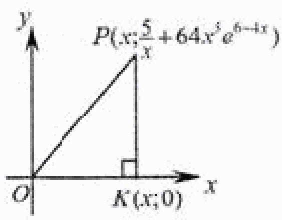


Рис.3

Решение. Так как P – точка графика функции $y=\frac{5}{x}+64x^5e^{6-4x}$, ее координаты $(x;\frac{5}{x}+64x^5e^{6-4x})$. При $0,7\le x\le 2$ обе координаты точки P положительны, т.е. точка P лежит в первой координатной четверти. Абсцисса точки K равна абсциссе точки P, следовательно, отрезок PK перпендикулярен оси абсцисс (Рис. 3). Площадь треугольника OPK задается формулой $S=0,5OK\cdot PK$, откуда получаем $S=0,5x\left(\frac{5}{x}+64x^5e^{6-4x}\right)=0,5(5+64x^6e^{6-4x})$. Требуется найти наибольшее значение функции $S(x)=0,5(5+64x^6e^{6-4x})$ на отрезке [0,7; 2].

$S'(x)=32(6x^5e^{6-4x}-4x^6e^{6-4x})=64x^5e^{6-4x}(3-2x)$, откуда $S'(x)>0$ при $0,7\le x<1,5$ и $S'(x)<0$ при $1,5<x\le 2$. Таким образом, $x=1,5$ – точка максимума функции $S(x)$ и это единственная точка экстремума непрерывной на промежутке [0,7; 2] функции $S(x)$. Следовательно, $S(1,5)=367$ – наибольшее значение функции $S(x)$ на промежутке [0,7; 2].

Ответ: 367.

Теорема 1 (теорема Ферма).

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке. Если x_0 – точка экстремума функции f, то $f'(x_0)=0$.

Теорема 2.

Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и непрерывна в точке x_0. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+» (с «+» на «–») при переходе через точку x_0, то x_0 – точка минимума (точка максимума) функции f.

IV. Метод интервалов

В основе *метода интервалов* лежат следующие положения:

1. Знак произведения (частного) однозначно определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).
2. Знак произведения не изменится (изменится на противоположный), если изменить знак у четного (нечетного) числа сомножителей.
3. Знак многочлена справа от большего (или единственного) корня совпадает со знаком его старшего коэффициента[1].
4. Если строго возрастающая (убывающая) функция имеет корень, то справа от корня она положительна (отрицательна) и при переходе через корень меняет знак.

[1] В случае отсутствия корней знак многочлена совпадает со знаком его старшего коэффициента на всей области определения.

задача 26

Точка A перемещается по оси Ox, а точка B перемещается по оси Oy. Абсцисса точки A изменяется по закону $x(t)=t^2-10t+29$, а ордината точки B изменяется по закону $y(t)=t^2+2t+5$, где $0,9\le t\le 1,9$. Найдите наибольшее значение площади треугольника ABC, где точка $C(4;\,0)$.

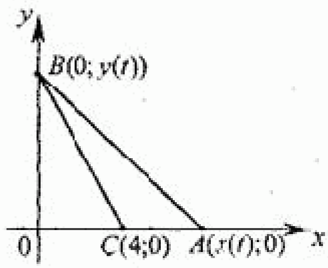


Рис. 4

Решение. Квадратные трехчлены $x(t)=t^2-10t+29$ и $y(t)=t^2+2t+5$ положительны на всем множестве действительных чисел, так как их дискриминанты отрицательны, а старшие коэффициенты положительны. Следовательно, точки A и B лежат на положительных полуосях Ox и Oy соответственно (Рис. 4).

Площадь треугольника ABC вычисляется по формуле $S=0,5\cdot AC\cdot BO$, откуда $S=0,5\cdot|x(t)-4|\cdot|y(t)|=0,5\,|t^2-10t+29-4|\cdot(t^2+2t+5)=0,5(t-5)^2(t^2+2t+5)$.
Таким образом, требуется найти наибольшее значение функции $S(t)=0,5(t-5)^2(t^2+2t+5)$ на отрезке $[0,9;\,1,9]$.

$S'(t)=0,5[2(t-5)(t^2+2t+5)+(t-5)^2(2t+2)]=(t-5)(t^2+2t+5+(t-5)(t+1))=2t(t-5)(t-1)$.

$\begin{cases}S'(t)=0\\0,9\le t\le 1,9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t(t-5)(t-1)=0\\0,9\le t\le 1,9\end{cases}\Leftrightarrow\ t=1.$

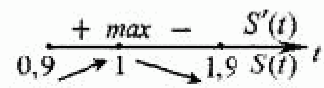


Рис. 5

Точка $t=1$ – точка максимума функции $S(t)$ (Рис. 5), и это единственная точка экстремума непрерывной на отрезке $[0,9;\,1,9]$ функции $S(t)$. Следовательно, $S(1)=64$ – наибольшее значение функции $S(t)$ на этом отрезке, что и дает наибольшее значение площади треугольника ABC.

Ответ: 64.

задача 27

Стороны прямоугольника равны 2 и 5. Через каждую точку на его меньшей стороне провели прямую, отсекающую прямоугольный треугольник с периметром 8. Найдите наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника.

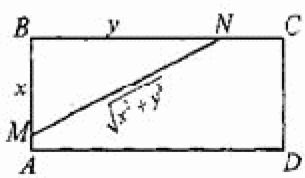


Рис. 6

Решение. Пусть $ABCD$ – данный прямоугольник, и через точку M на его меньшей стороне AB проведена прямая MN ($N\in BC$), отсекающая от прямоугольника $ABCD$ треугольник BMN с периметром 8 (Рис. 6).

1. Обозначим через x и y катеты BM и BN треугольника BMN. Тогда $MN=\sqrt{x^2+y^2}$.
По условию $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=8$. Решим это уравнение относительно y:
$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=8\ \Leftrightarrow\ \sqrt{x^2+y^2}=8-(x+y)$.

Поскольку $x+y<AB+BC=7$ [1], уравнение $\sqrt{x^2+y^2}=8-(x+y)$ равносильно уравнению $x^2+y^2=64-16(x+y)+(x+y)^2$. Далее имеем: $x^2+y^2=64-16(x+y)+(x+y)^2\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x^2+y^2=64-16x-16y+x^2+2xy+y^2\ \Leftrightarrow\ 2y(8-x)=64-16x\ \Leftrightarrow\ y=\frac{8(4-x)}{8-x}$.

2. Для того чтобы площадь оставшейся части прямоугольника принимала наименьшее значение, нужно, чтобы площадь треугольника BMN принимала наибольшее значение.

Площадь треугольника BMN вычисляется по формуле $S=0,5\cdot BM\cdot BN=0,5xy=\frac{4(4x-x^2)}{8-x}$.

Найдем наибольшее значение функции $S(x)=\frac{4(4x-x^2)}{8-x}$ на промежутке $(0;\,2]$:

$$S'(x)=\frac{4((4x-x^2)'(8-x)-(4x-x^2)(8-x)')}{(8-x)^2}=\frac{4((4-2x)(8-x)-(4x-x^2)(-1))}{(8-x)^2}=\frac{4(x^2-16x+32)}{(8-x)^2}.$$

---

[1] Периметр треугольника BMN равен 8 и $BN<MN$, откуда $y<4$ и выражение $x+y$ можно оценить сверху более точно. Мы этого не делаем, так как это не существенно для решения рассматриваемого уравнения.

$S'(x)=0 \iff x^2-16x+32=0$, откуда $x=8\pm\sqrt{32}$. Поскольку $8+\sqrt{32}>8-\sqrt{32}>8-6=2$, оба корня производной не принадлежат промежутку $(0;\,2]$, т.е. $S'(x)$ знакопостоянна на промежутке $(0;\,2]$. Для выяснения знака производной $S'(x)$ на промежутке $(0;\,2]$ достаточно определить ее знак в любой точке этого промежутка, например: $S'(1)=\frac{68}{49}>0$. Таким образом, функция $S(x)$ имеет положительную производную в каждой точке промежутка $(0;\,2]$, следовательно, она возрастает на этом промежутке и ее наибольшее значение на нем равно $S(2)=\frac{8}{3}$. Тогда наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника равно: $AB\cdot BC-S(2)=10-\frac{8}{3}=\frac{22}{3}$.

Ответ: $\frac{22}{3}$.

задача 28

Два города A и B лежат по одну сторону от прямолинейной дороги на расстоянии 60 *км* и 200 *км* от нее. Перевозка груза по дороге обходится вдвое дешевле, чем по любому пути вне дороги. Как следует двигаться, чтобы затраты на перевозку груза из A в B были минимальными, если известно, что расстояние между городами равно 500 *км*?

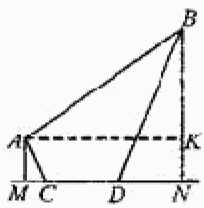


Рис. 7

Решение. Примем за 1 стоимость перевозки груза на один километр пути по дороге, тогда по условию стоимость перевозки груза на один километр пути вне дороги равна 2. Обозначим через M и N соответственно проекции на дорогу точек A и B, а через K – проекцию точки A на прямую BN (Рис. 7).

По условию $AB=500$, $AM=60$, $BN=200$, откуда $BK=BN-AM=140$, $MN=AK=$ $=\sqrt{AB^2-BK^2}=480$.

Расходы на перевозку по прямому пути AB равны $2\cdot 500=1000$.

Найдем теперь минимальные расходы по пути $ACDB$, где $C\in MN$, $D\in MN$.

Пусть $MC=x$, $DN=y$. Тогда стоимость перевозки груза по пути $AC+CD+DB$ вычисляется по формуле $S(x,y)=2\sqrt{3600+x^2}+(480-x-y)+2\sqrt{40000+y^2}$.

Рассмотрим функции $S_1(x)=2\sqrt{3600+x^2}-x$ и $S_2(y)=2\sqrt{40000+y^2}-y$.

1. $S_1(x)=2\sqrt{3600+x^2}-x$, $x\in[0;\,480]$. $S_1'(x)=\frac{2\cdot 2x}{2\sqrt{3600+x^2}}-1=\frac{2x}{\sqrt{3600+x^2}}-1$; $S_1'(x)=0$,

$\sqrt{3600+x^2}=2x$, откуда, учитывая $x\ge 0$, получаем $x=20\sqrt{3}$. Точка $x_0=20\sqrt{3}$ – точка минимума функции S_1 (Рис. 8), и это единственная точка экстремума непрерывной на промежутке $[0;\,480]$ функции. Следовательно, $S_1(x_0)$ – наименьшее значение функции S_1 на промежутке $[0;\,480]$.

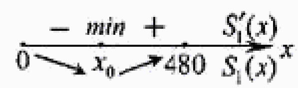


Рис. 8

2. $S_2(y)=2\sqrt{40000+y^2}-y$, $y\in[0;\,480]$. $S_2'(y)=\frac{2y}{\sqrt{40000+y^2}}-1$; $S_2'(y)=0$,

$\sqrt{40000+y^2}=2y$, откуда, учитывая $y\ge 0$, получаем $y=200/\sqrt{3}$. Поскольку $y_0=200/\sqrt{3}$ – точка минимума функции S_2 (Рис. 9) и это единственная точка экстремума непрерывной на промежутке функции, $S_2(y_0)$ – наименьшее значение функции S_2 на промежутке $[0;\,480]$.

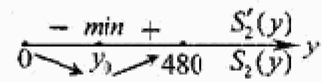


Рис. 9

3. Найдем минимальную стоимость перевозки груза по пути $AC+CD+DB$:

$S(x_0,y_0)=2\sqrt{3600+x_0^2}+(480-x_0-y_0)+2\sqrt{40000+y_0^2}=260\sqrt{3}+480<260\cdot 2+480=1000$.

Таким образом, $S(x_0,y_0)$ меньше, чем расходы на перевозку по прямому пути AB, и следует двигаться по пути $AC+CD+DB$, где $\angle CAM=\operatorname{arctg}\frac{CM}{AM}=\operatorname{arctg}\frac{20\sqrt{3}}{60}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=30°$, $CD=480-260/\sqrt{3}$, $\angle BDN=\operatorname{arctg}\frac{DN}{BN}=\operatorname{arctg}\frac{200}{200/\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=60°$.

Ответ: Оптимальный путь $AC+CD+DB$, где $\angle CAM=30°$, $CD=480-260/\sqrt{3}$, $\angle BDN=60°$.

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности: владение понятием «равносильность уравнений», знание свойств тригонометрических функций; умение выполнять тождественные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции, решать простейшие тригонометрические уравнения и тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям.

Ориентировочное время выполнения: 15 минут.

Это нужно знать

I. Формулы зависимости между тригонометрическими функциями одного аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

II. Формулы тригонометрических функций двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

III. Решение основных простейших тригонометрических уравнений

1. $\sin x = a,\ |a| \le 1 \iff$

$\iff x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Иначе:

$\sin x = a,\ |a| \le 1 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k \\ x = (\pi - \arcsin a) + 2\pi k, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. $\cos x = a,\ |a| \le 1 \iff$

$\iff x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

3. $\operatorname{tg} x = a \iff x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

задача 29

Решите уравнение $3\sin 2x \operatorname{tg} x + 4\cos^2 x = 7\sin x + 1.$

Решение.

1. $3\sin 2x \operatorname{tg} x + 4\cos^2 x = 7\sin x + 1 \iff$

$$\iff 6\sin x\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 4(1-\sin^2 x) = 7\sin x + 1 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 6\sin^2 x + 4 - 4\sin^2 x - 7\sin x - 1 = 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases}$$

2. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$:

а) $\sin x = 3$ — уравнение не имеет решения;

б) $\sin x = 0{,}5;\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, что удовлетворяет условию $\cos x \ne 0$.

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

задача 30

Решите уравнение $2\sin x \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} x - \cos x = 0.$

Решение. $2\sin x \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} x - \cos x = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} (2\sin x \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} x - \cos x)\cos x = 0, \\ \cos x \ne 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$(2\sin x \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} x - \cos x)\cos x = 0,\ 2\sin^2 x - 2\sin x - \cos^2 x = 0,$
$3\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$, откуда $\sin x = 1$ или $\sin x = -\frac{1}{3}$.

1. $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x \ne 0 \end{cases}$ — система не имеет решений.

2. $\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{3} \\ \cos x \ne 0 \end{cases}$, откуда $x = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $(-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

задача 32

Решите уравнение

$\sqrt{4\cos^2 2x - 12\cos 2x + 9} - \sin^2 x = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos^2 x$.

Решение. $\sqrt{4\cos^2 2x - 12\cos 2x + 9} - \sin^2 x = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos^2 x$;

$$2\sqrt{(2\cos 2x - 3)^2} = 6 - \sqrt{3} - 2\cos 2x.$$

Пусть $2\cos 2x = t$, где $|t| \le 2$ (*). Тогда уравнение принимает вид $2|t-3| = 6 - \sqrt{3} - t$, откуда, учитывая условие (*), получаем: $6 - 2t = 6 - \sqrt{3} - t$, $t = \sqrt{3}$. Возвращаясь к переменной x, имеем: $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $x = \pm\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

задача 33

Решите уравнение $|\sin x| = \sin x \cos x$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности систем
$\begin{cases} \sin x \ge 0, \\ \sin x = \sin x \cos x \end{cases}$ и $\begin{cases} \sin x < 0, \\ -\sin x = \sin x \cos x. \end{cases}$

Далее имеем:

1. $\begin{cases} \sin x \ge 0 \\ \sin x = \sin x \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge 0 \\ \sin x(1 - \cos x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

2. $\begin{cases} \sin x < 0 \\ -\sin x = \sin x \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x = -1 \end{cases}$ — система решений не имеет.

Другой вариант решения.

Ясно, что $\sin x \cos x \le |\sin x|$, так как $|\cos x| \le 1$. При этом равенство возможно только в случае $|\cos x| = 1$, т.е. в случае $x = \pi k$. Проверка показывает, что $x = \pi k$ — решение данного уравнения.

Ответ: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

задача 34

При каких значениях a выражение $3 + \sin x(2\sin x + a\cos x)$ равно -1 хотя бы при одном значении x?

Решение. Требуется найти значения a, при которых уравнение $3 + \sin x(2\sin x + a\cos x) = -1$ имеет хотя бы одно решение. Имеем: $3 + \sin x(2\sin x + a\cos x) = -1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + a\sin x\cos x + 4 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 6\sin^2 x + a\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$. Мы получили однородное тригонометрическое уравнение, которое равносильно уравнению $6\,\mathrm{tg}^2 x + a\,\mathrm{tg}\, x + 4 = 0$ — квадратному уравнению относительно tg x. Поскольку множество значений функции $y = \mathrm{tg}\, x$ есть множество действительных чисел, данное уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда имеет решения соответствующее квадратное уравнение, т.е. когда его дискриминант неотрицателен: $D = a^2 - 96 \ge 0$, откуда $a \le -6\sqrt{6}$ или $a \ge 6\sqrt{6}$.

Ответ: $(-\infty; -6\sqrt{6}] \cup [6\sqrt{6}; +\infty)$.

IV. Свойства основных тригонометрических функций

1. $y = \sin x$

$D(\sin) = \mathbb{R}$;

$E(\sin) = [-1; 1]$;

$y = 0$ при $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

$y > 0$ на $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;

$y < 0$ на $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;

возрастает на

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$;

убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$;

$y_{max} = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1$; $k \in \mathbb{Z}$;

$y_{min} = \sin(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = -1$; $k \in \mathbb{Z}$;

$\sin(-x) = -\sin x$;

$\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $y = \cos x$

$D(\cos) = \mathbb{R}$;

$E(\cos) = [-1; 1]$;

$y = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

$y > 0$ на $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$;

$y < 0$ на $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$;

возрастает на $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$;

убывает на $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$;

$y_{max} = \cos(2\pi k) = 1$; $k \in \mathbb{Z}$;

$y_{min} = \cos(\pi + 2\pi k) = -1$, $k \in \mathbb{Z}$;

$\cos(-x) = \cos x$;

$\cos(x + 2\pi k) = \cos x$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $y = \mathrm{tg}\, x$

$D(\mathrm{tg}) = (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;

$E(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}$;

$y = 0$ при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

$y > 0$ на $(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;

$y < 0$ на $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;

возрастает на

$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$;

$\mathrm{tg}(x + \pi k) = \mathrm{tg}\, x$, $k \in \mathbb{Z}$.

задача 35 Решите уравнение $|\sin x| = 3\sin x - 2\cos x$.

Решение. Уравнение $|\sin x| = 3\sin x - 2\cos x$ равносильно совокупности систем, содержащих однородные тригонометрические уравнения первой степени:

$$\begin{cases}\sin x = 3\sin x - 2\cos x,\\ \sin x \ge 0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}-\sin x = 3\sin x - 2\cos x,\\ \sin x < 0.\end{cases}$$

Решим каждую из этих систем:

1) $\begin{cases}\sin x = 3\sin x - 2\cos x\\ \sin x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg} x = 1\\ \sin x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

2) $\begin{cases}-\sin x = 3\sin x - 2\cos x\\ \sin x < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\\ \sin x < 0\end{cases} \Leftrightarrow x = (\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}$.

задача 36 Решите уравнение $\frac{2+2\sin^2 x}{\sin x + \cos x} = 3\sin x$.

Решение. Уравнение $\frac{2+2\sin^2 x}{\sin x+\cos x} = 3\sin x$ равносильно системе $\begin{cases}2+2\sin^2 x = 3\sin^2 x + 3\sin x\cos x,\\ \sin x + \cos x \ne 0.\end{cases}$

Применив основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получаем систему

$\begin{cases}2(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin^2 x = 3\sin^2 x + 3\sin x\cos x,\\ \sin x + \cos x \ne 0,\end{cases}$ содержащую однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Далее имеем:

$$\begin{cases}2(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin^2 x = 3\sin^2 x + 3\sin x\cos x\\ \sin x + \cos x \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0\\ \operatorname{tg} x \ne -1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0\\ \operatorname{tg} x \ne -1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1\\ \operatorname{tg} x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \operatorname{arctg} 2 + \pi k; k \in \mathbb{Z}$.

задача 37 При каких значениях a выражение $1 + \sin x(3\sin x + a\cos x)$ не равно нулю ни при каких значениях x?

Решение. Требуется найти значения параметра a, при которых уравнение $1 + \sin x(3\sin x + a\cos x) = 0$ не имеет решений. Имеем:

$$1 + \sin x(3\sin x + a\cos x) = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x + a\sin x\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x + a\sin x\cos x + \cos^2 x = 0.$$

Мы получили однородное тригонометрическое уравнение второй степени, которое равносильно уравнению $4\operatorname{tg}^2 x + a\operatorname{tg} x + 1 = 0$ — квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} x$.

Поскольку множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$ есть множество действительных чисел, данное уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда не имеет решений соответствующее квадратное уравнение, т.е. когда его дискриминант отрицателен.

Имеем: $D = a^2 - 16 < 0$, откуда $-4 < a < 4$.

Ответ: $(-4; 4)$.

задача 38 Для всех натуральных значений параметра a решите уравнение $|\cos x| - |\sin x| = a$.

Решение. Уравнение $|\cos x| - |\sin x| = a$ равносильно уравнению $|\cos x| = |\sin x| + a$. (*)

Так как $|\cos x| \le 1$, $|\sin x| \ge 0$, $a \ge 1$, уравнение (*) равносильно системе $\begin{cases}|\cos x| = 1,\\ |\sin x| + a = 1.\end{cases}$

При $a > 1$ второе уравнение системы не имеет решений, а при $a = 1$ множество решений этого уравнения есть множество решений уравнения $|\sin x| = 0$, откуда получаем $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Эти решения удовлетворяют первому уравнению системы.

Ответ: $\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Приведем другое решение задачи 4.
Разность чисел $|\cos x|$ и $|\sin x|$, каждое из которых принадлежит отрезку $[0;\ 1]$, может равняться натуральному числу a в том и только в том случае, если $|\cos x|=1$, $|\sin x|=0$ и $a=1$, откуда $x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

задача 39

Решите уравнение $\sin^2 x\sin 5x=1$.

Решение. Так как $\sin^2 x\le 1$ и $\sin 5x\le 1$, уравнение $\sin^2 x\sin 5x=1$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases}\sin x=1,\\ \sin 5x=1\end{cases} \text{ и } \begin{cases}\sin x=-1,\\ \sin 5x=1.\end{cases}$$

Решим каждую из этих систем:

1) подставив решения первого уравнения первой системы $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ во второе уравнение этой системы, получим верное для всех целых значений k равенство $\sin(\frac{5\pi}{2}+10\pi k)=1$. Следовательно, числа $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ — решения первой системы;

2) аналогично, подставив решения первого уравнения второй системы $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ во второе уравнение этой системы, получим неверное ни для каких целых значений k равенство $\sin(-\frac{5\pi}{2}+10\pi k)=1$. Следовательно, числа $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ не являются решениями этой системы.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

задача 40

Решите уравнение $\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$.

Решение. Поскольку $\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}$, числа $\mathrm{ctg}^2 x$ и $\mathrm{tg}^2 x$ — взаимно обратные числа. Следовательно, $\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x\ge 2$. С другой стороны, $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=2(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)=2\sin(x+\frac{\pi}{4})\le 2$. Таким образом, уравнение $\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$ равносильно системе $\begin{cases}2\sin(x+\frac{\pi}{4})=2,\\ \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=2.\end{cases}$

Решая первое уравнение системы, последовательно находим: $\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$; $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$;

$x=\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. Подставляя найденные значения x во второе уравнение системы, получаем верное равенство $\mathrm{tg}^2(\frac{\pi}{4}+2\pi k)+\mathrm{ctg}^2(\frac{\pi}{4}+2\pi k)=2$. Значит, числа $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ — решения системы.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

задача 41

Решите уравнение $2(\sin x-\cos x)=2-\sin x\cos x$.

Решение. Пусть $\sin x-\cos x=t$, тогда $(\sin x-\cos)^2=t^2$, $\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=t^2$, откуда $\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$ и данное уравнение принимает вид $2t=2-\frac{1-t^2}{2}$. (*)

Уравнение (*) равносильно уравнению $t^2-4t+3=0$, корни которого $t=1$ и $t=3$. Возвращаясь к переменной x, получаем: $\sin x-\cos x=1$ или $\sin x-\cos x=3$.
Второе уравнение не имеет решений, так как $|\sin x|\le 1$ и $|\cos x|\le 1$.
Решим первое уравнение:

$$\sin x-\cos x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z},\\ x=\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности: владение понятием «квадратное неравенство», знание основных свойств числовых неравенств; умение решать квадратные неравенства, применять свойства числовых неравенств для оценки алгебраических выражений, выполнять тождественные преобразования.

Ориентировочное время выполнения: 30 минут.

Это нужно знать

I. Квадратные неравенства

Квадратным неравенством называется неравенство
$ax^2+bx+c>0$ или
$ax^2+bx+c<0$, где $a\neq 0$.

Решение неравенств

$ax^2+bx+c>0$ и
$ax^2+bx+c<0$

Пусть $a>0$ [1], $D=b^2-4ac$ — дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c, x_1 и x_2 — его действительные корни.

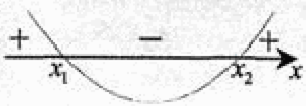


Рис.1

1. $D>0$ (см. Рис. 1).

$ax^2+bx+c>0$
при $x<x_1$ и при $x>x_2$;
$ax^2+bx+c<0$
при $x_1<x<x_2$.

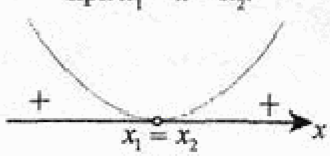


Рис.2

2. $D=0$ (см. Рис. 2).

$ax^2+bx+c>0$ при $x\neq x_{1,2}$;
$ax^2+bx+c=0$ при $x=x_{1,2}$.

Рис.3

3. $D<0$ (см. Рис. 3).

$ax^2+bx+c>0$ при всех действительных значениях x.

---

[1] При $a<0$, умножив обе части данного неравенства на −1, получаем один из рассмотренных случаев.

Задача 42

Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2<(a+1)x+3a$ при любом значении параметра a, принадлежащем промежутку (1; 2)

Решение.

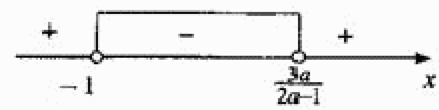
Мы имеем квадратное неравенство $(2a-1)x^2-(a+1)x-3a<0$, так как $(2a-1)\neq 0$ при условии $a\in(1;2)$.

Найдем корни квадратного трехчлена $(2a-1)x^2-(a+1)x-3a$:

$D=(a+1)^2+12a(2a-1)=(5a-1)^2$, $\quad x=\frac{a+1\pm(5a-1)}{2(2a-1)}$, $\quad x_1=-1$,

$x_2=\frac{3a}{2a-1}$. Выражение $\frac{3a}{2a-1}$ положительно, так как $a>1$ по условию.

Следовательно, $x_2>x_1$ и решением данного неравенства является промежуток $\left(-1;\frac{3a}{2a-1}\right)$.



Оценим снизу выражение $\frac{3a}{2a-1}$:

$$\frac{3a}{2a-1}=\frac{3a-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{2a-1}=\frac{3(a-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{2(a-\frac{1}{2})}=\frac{3(a-\frac{1}{2})}{2(a-\frac{1}{2})}+\frac{3}{2(2a-1)}=\frac{3}{2}+\frac{3}{4a-2}.$$

Далее имеем: $1<a<2 \Leftrightarrow 4<4a<8 \Leftrightarrow 2<4a-2<6$, откуда

$\frac{1}{4a-2}>\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{3}{4a-2}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{3}{4a-2}>2$. Таким образом, при любом значении параметра a, принадлежащем промежутку (1; 2), верхняя граница промежутка $\left(-1;\frac{3a}{2a-1}\right)$ больше 2. Значит, все значения x из промежутка (1; 2] удовлетворяют данному неравенству.

Ответ: (1; 2].

Приведем *краткую запись* другого способа решения этой задачи.

$(2x^2-x-3)a+(-x^2-x)<0 \Leftrightarrow (2x^2-x-3)a+(-x^2-x)<0$.

Полученное неравенство — линейное неравенство относительно a. Линейная функция $f(a)=(2x^2-x-3)a-(x^2+x)$ отрицательна на промежутке (1; 2) тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух условий:

$$1)\ \begin{cases} f(1)\le 0 \\ f(2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3\le 0 \\ 3x^2-3x-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2. \qquad (1)$$

$$2)\ \begin{cases} f(1)<0 \\ f(2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ 3x^2-3x-6\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x\le 2. \qquad (2)$$

Объединяя решения (1) и (2), получаем: $-1<x\le 2$.

задача 43

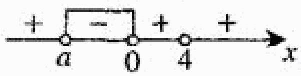
Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $1-\frac{a}{x}<\frac{8}{x}\left(1-\frac{a+2}{x}+\frac{2a}{x^2}\right)$ содержится в некотором отрезке длиной 7 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 4.

Решение. Умножив обе части данного неравенства на x^4, получим неравенство $x^4-(a+8)x^3+(8a+16)x^2-16ax<0$, равносильное данному, так как $x=0$ не является решением ни одного из них и $x^4>0$.

Разложим левую часть полученного неравенства на множители:
$x^4-(a+8)x^3+(8a+16)x^2-16ax=x(x^3-ax^2-8x^2+8ax+16x-$
$-16a)=x(x^2(x-a)-8x(x-a)+16(x-a))=x(x-a)(x-4)^2$.

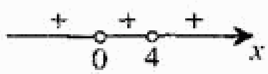
Решим неравенство $x(x-a)(x-4)^2<0$ методом интервалов:

1) Если $a<0$, то $a<x<0$.

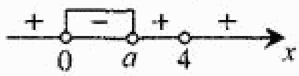


Промежуток (a; 0) должен содержаться в некотором отрезке длиной 7 и при этом содержать какой-нибудь отрезок длиной 4, откуда $4<|a|\le 7$. Учитывая $a<0$, имеем $-7\le a<-4$.

2) Если $a=0$, неравенство не имеет решений.

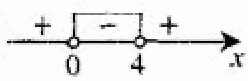


3) Если $0<a<4$, то $0<x<a$.

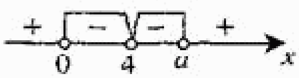


Длина промежутка $(0; a)$ меньше 4, что не удовлетворяет условию.

4) Если $a=4$, то $0<x<4$. Промежуток (0; 4) не содержит ни одного отрезка длиной 4.



5) Если $a>4$, то $0<x<4$; $4<x<a$.



Промежуток (0; 4) не содержит ни одного отрезка длиной 4, следовательно, $4<a-4\le 7$, откуда $8<a\le 11$.

Ответ: $[-7;-4)\cup(8;11]$.

Пример 1.

Решите неравенство $-2x^2-3x+5\ge 0$.

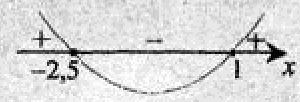
Решение. $-2x^2-3x+5\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x-5\le 0$.

Найдем корни квадратного трехчлена $2x^2+3x-5$:

$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\frac{-3\pm 7}{4}$; $x_1=-2{,}5$; $x_2=1$.

Далее имеем:



$-2{,}5\le x\le 1$.

Ответ: $[-2{,}5; 1]$.

Пример 2.

Решите неравенство $2x^2-x+5\le 0$.

Решение.

$D=1-40=-39<0$, следовательно, $2x^2-x+5>0$ при всех действительных значениях x, т.е. данное неравенство решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

II. Основные свойства числовых неравенств:

1. $a>b \Leftrightarrow b<a$;
2. $\begin{cases}a>b\\ b>c\end{cases} \Rightarrow a>c$;
3. $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$;
4. если $c>0$, то $a>b \Leftrightarrow ac>bc$;
5. если $c<0$, то $a>b \Leftrightarrow ac<bc$;
6. $\begin{cases}a>b\\ c>d\end{cases} \Rightarrow a+c>b+d$;
7. $\begin{cases}a>b\ge 0\\ c>d\ge 0\end{cases} \Rightarrow ac\ge bd$;
8. если $ab>0$, то $a>b \Leftrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;
9. $\left|a+\frac{1}{a}\right|\ge 2$;
10. $a^2+b^2\ge 2|ab|$;
11. $a^2\pm ab+b^2\ge 0$.

задача 44

Выясните, при каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2+y^2=2a \\ 2xy=2a-1 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение. $\begin{cases} x^2+y^2=2a \\ 2xy=2a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy+y^2=1 \\ x^2+2xy+y^2=4a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1 \\ (x+y)^2=4a-1. \end{cases}$

При $a<0,25$ второе уравнение, а следовательно, и вся система решений не имеет. При $a\ge 0,25$ имеем:

$\begin{cases} (x-y)^2=1, \\ (x+y)^2=4a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x\pm 1, \\ y=-x\pm\sqrt{4a-1}. \end{cases}$

График первого уравнения полученной системы – объединение двух прямых $y=x-1$ и $y=x+1$, параллельных прямой $y=x$, график второго уравнения – либо (при $a>0,25$) объединение двух прямых $y=-x-\sqrt{4a-1}$ и $y=-x+\sqrt{4a-1}$, параллельных прямой $y=-x$, либо (при $a=0,25$) прямая $y=-x$ (см. Рис. 2). В первом случае графики уравнений системы имеют ровно четыре общих точки, и, следовательно, система имеет ровно четыре решения, во втором – графики имеют ровно две общие точки, и, следовательно, система имеет ровно два решения.

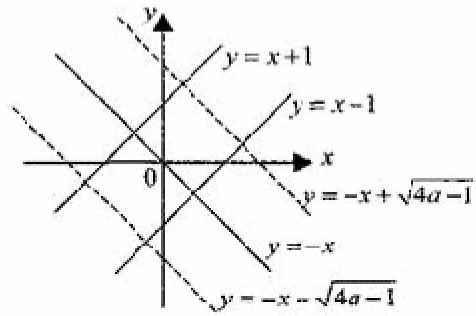


Рис. 2

Ответ: $a=0,25$.

задача 45

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x+3a-2}+\sqrt{x}=1$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{x+3a-2}=-\sqrt{x}+1$. Построим эскизы графиков функций $y=-\sqrt{x}+1$ и $y=\sqrt{x+3a-2}$. Эти графики имеют общую точку, а, следовательно, уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $a_2\le a\le a_1$ (Рис. 4).

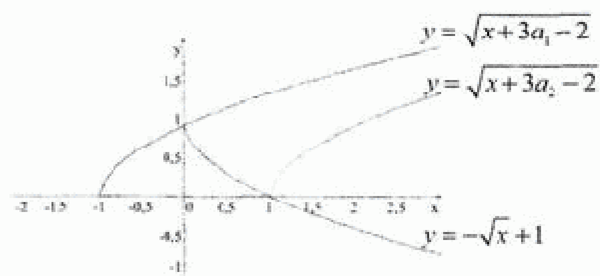


Рис. 4

График функции $y=\sqrt{x+3a_1-2}$ проходит через точку (0; 1), откуда $1=\sqrt{3a_1-2}$ и $a_1=1$. Аналогично, график функции $y=\sqrt{x+3a_2-2}$ проходит через точку (1; 0), откуда $0=\sqrt{1+3a_2-2}$ и $a_2=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}\le a\le 1$.

задача 46

Найдите все значения параметра a, при которых длина интервала, являющегося решением неравенства $\sqrt{2ax-x^2}\ge a-x$, равна $2+\sqrt{2}$.

Решение. Пусть $a-x=t$, тогда $x=a-t$. Подставив $x=a-t$ в данное неравенство, приходим к равносильной задаче: найти все значения параметра a, при которых длина интервала, являющегося решением неравенства $\sqrt{a^2-t^2}\ge t$, равна $2+\sqrt{2}$.

Построим эскизы графиков функций $y=\sqrt{a^2-t^2}$ и $y=t$.

Графиком функции $y=\sqrt{a^2-t^2}$ является полуокружность радиуса $|a|$ с центром в начале координат, расположенная в I и II координатных четвертях (Рис. 5).

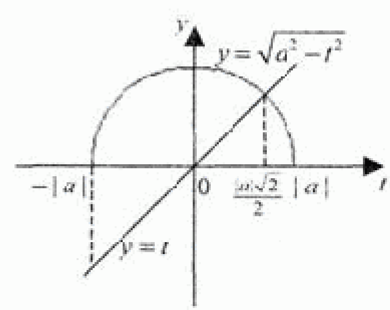


Рис. 5

Действительно, $y=\sqrt{a^2-t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=a^2-t^2 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+y^2=a^2 \\ y\ge 0. \end{cases}$

Решением данного неравенства является отрезок $\left[-|a|;\frac{|a|\sqrt{2}}{2}\right]$, длина которого по условию должна равняться $2+\sqrt{2}$. Имеем: $\frac{|a|\sqrt{2}}{2}-(-|a|)=2+\sqrt{2} \Leftrightarrow |a|(2+\sqrt{2})=2(2+\sqrt{2}) \Leftrightarrow |a|=2$.

Ответ: $a=\pm 2$.

задача 47

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности: владение понятиями «правильная пирамида» и «конус», знание свойств правильной пирамиды, правильного и равнобедренного треугольников, биссектрисы треугольника и высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины его прямого угла; умение находить по данным элементам геометрических фигур другие их элементы.

Ориентировочное время выполнения: 40 минут.

Это нужно знать

I. Правильная пирамида

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник, а основание ее высоты – центр этого многоугольника.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины пирамиды, называется *апофемой* правильной пирамиды. Боковые ребра правильной пирамиды равны и одинаково наклонены к основанию пирамиды, боковые грани правильной пирамиды – равные между собой равнобедренные треугольники и также одинаково наклонены к основанию пирамиды, двугранные углы при боковых ребрах правильной пирамиды равны. Противоположные (скрещивающиеся) боковые ребра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

II. Виды треугольников

1. Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона – *основанием* равнобедренного треугольника. Вершина угла равнобедренного треугольника, лежащая напротив основания, называется *вершиной* равнобедренного треугольника. Высота, медиана и биссектриса равнобедренного треугольника, проведенные к его основанию, совпадают. Углы при основании равнобедренного треугольника равны. Высоты (медианы, биссектрисы), проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.

Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

Решение.

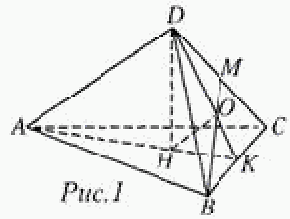


Рис.1

1. Пусть $DABC$ – данная правильная пирамида, DK – ее апофема, DH – высота, и пусть основание конуса вписано в боковую грань BCD (Рис.1).

Тогда:

а) по свойству правильной пирамиды точка H – центр треугольника ABC, следовательно, точка H принадлежит высоте (медиане, биссектрисе) AK треугольника ABC;

б) отрезок DK является высотой, медианой и биссектрисой равнобедренного треугольника BCD;

в) основание O высоты HO конуса является центром окружности, вписанной в треугольник BCD, следовательно, O – точка пересечения биссектрис DK и BM этого треугольника. Кроме того, отрезок HK является радиусом окружности, вписанной в правильный треугольник ABC, а отрезок OK – радиусом окружности, вписанной в равнобедренный треугольник BCD, т.е. искомым радиусом основания конуса.

2. Обозначим через a, b и d соответственно длину стороны основания данной пирамиды, длину ее бокового ребра и ее апофему, а через x – радиус основания конуса. Тогда имеем:

а) отрезок HK – радиус окружности, вписанной в правильный треугольник ABC, следовательно, $HK = \frac{a}{2\sqrt{3}}$;

б) так как $HO \perp (BDK)$, отрезок HO – высота прямоугольного треугольника DHK, проведенная из вершины его прямого угла H, следовательно, $HK^2 = OK \cdot DK$, т.е. $\frac{a^2}{12} = dx$, откуда $x = \frac{a^2}{12d} = \frac{7}{3d}$;

в) отрезок OK – радиус окружности, вписанной в треугольник BCD, следовательно, $OK = \frac{S}{p}$, где S – площадь треугольника BCD, p – его полупериметр, откуда $x = \frac{ad}{a+2b} = \frac{d\sqrt{7}}{b+\sqrt{7}}$[1];

г) приравнивая найденные в пп. б) и в) значения x, получаем $\frac{d\sqrt{7}}{b+\sqrt{7}} = \frac{7}{3d}$, откуда $3d^2 = b\sqrt{7} + 7$; (1)

д) из прямоугольного треугольника BDK находим: $DK^2 = BD^2 - BK^2$, т.е. $d^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = b^2 - 7$; (2)

---

[1] Это же соотношение можно было получить, применив свойство биссектрисы треугольника к биссектрисе BO треугольника BDK (Рис.1): $\frac{OK}{OD} = \frac{BK}{BD}$.

е) решаем систему уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} 3d^2 = b\sqrt{7} + 7 \\ d^2 = b^2 - 7 \end{cases} \underset{(b>0,\, d>0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b = \frac{4\sqrt{7}}{3}, \\ d = \frac{7}{3}; \end{cases}$$

ж) окончательно имеем: $x = \frac{7}{3d} = 1$.

Ответ: 1.

2. Треугольник, все три стороны которого равны, называется *правильным* (*равносторонним*) треугольником.

Пусть a, h, S, R, r – соответственно длина стороны, высота, площадь, радиус описанной и радиус вписанной окружности правильного треугольника (Рис. 2).

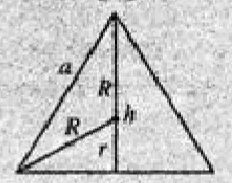


Рис. 2

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}},\ r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

3. Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется *прямоугольным*. В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой*, а две другие стороны называются *катетами* этого треугольника.

Обозначим через c гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC, через a_c и b_c – проекции катетов a и b на гипотенузу AB, а через h_c – высоту, проведенную из вершины прямого угла C этого треугольника (Рис. 3).

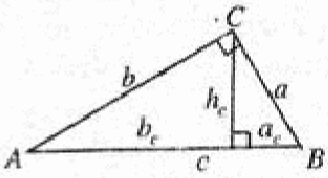


Рис. 3

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (т. Пифагора)},$$

$$\sin A = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a},$$

$$a^2 = ca_c,\ b^2 = cb_c,$$

$$h_c^2 = a_c b_c,\ \frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2}.$$

III. Элементы треугольника

1. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется *средней линией* треугольника. Средняя линия треугольника параллельна одной из сторон треугольника и равна ее половине.

2. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой* треугольника. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и точка пересечения делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.

3. Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется *биссектрисой* треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (центре вписанной окружности). Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

4. Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону, называется *высотой* треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

5. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (в центре описанной окружности).

Точки пересечения медиан, биссектрис, прямых, содержащих высоты треугольника, и серединных перпендикуляров к сторонам треугольника называются *замечательными точками* треугольника.

задача 48 Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD. Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB. Площадь боковой поверхности конуса равна $9\pi\sqrt{3}$. Найдите длину ребра тетраэдра.

Решение. Пусть $ABCD$ – данный тетраэдр, точка P – середина ребра CD, точка M – середина ребра BC, четырехугольник $KLMN$ – сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB, точка O – центр основания конуса, E – точка пересечения отрезков BP и LM (Рис. 4).

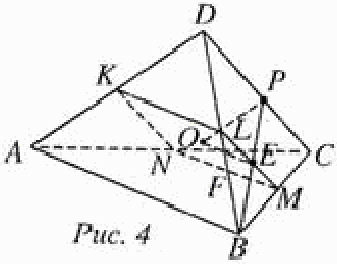


Рис. 4

Тогда:

1) Плоскость BCD проходит через прямую CD, параллельную плоскости KLM, и пересекает плоскость KLM по прямой LM, следовательно, $LM \parallel CD$ согласно теореме, обратной признаку параллельности прямой и плоскости. Аналогично $KN \parallel CD$, $KL \parallel AB$, $MN \parallel AB$. Имеем $LM \parallel CD$ и $KN \parallel CD$, откуда $LM \parallel KN$; аналогично $KL \parallel MN$. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ – параллелограмм по определению.

2) Так как M – середина ребра BC и $LM \parallel CD$, отрезок LM – средняя линия треугольника BCD, следовательно, $LM = 0{,}5CD$; аналогично $KL = 0{,}5AB$, откуда, учитывая $AB = CD$, получаем: $KL = LM$. Кроме того, $KL \perp LM$, так как $\angle(KL;LM) = \angle(AB;CD)$ по определению угла между скрещивающимися прямыми, и $AB \perp CD$ по свойству правильной треугольной пирамиды[1]. Таким образом, четырехугольник $KLMN$ – квадрат, и следовательно, радиус окружности, вписанной в сечение $KLMN$, равен половине стороны этого квадрата.

3) Стороны угла PBC пересечены параллельными прямыми ME и CP, и $BM = MC$, следовательно, $BE = EP$ по теореме Фалеса.

4) Отрезок BP – медиана правильного треугольника BCD, следовательно, $BP \perp CD$, откуда, учитывая $LM \parallel CD$, получаем $BP \perp LM$. Отрезок OE – проекция наклонной PE на плоскость KLM, следовательно, $OE \perp LM$ по теореме о трех перпендикулярах. Значит, отрезок OE – радиус основания конуса, а отрезок PE – образующая этого конуса, и площадь боковой поверхности конуса равна $S = \pi \cdot OE \cdot PE$.

5) Обозначим через x искомую длину ребра тетраэдра.

Тогда $OE = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}x$; $PE = \frac{1}{2}BP = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{4}x$, откуда $S = \frac{\pi\sqrt{3}}{16}x^2$.

Так как по условию $S = 9\pi\sqrt{3}$, окончательно имеем: $\frac{\pi\sqrt{3}}{16}x^2 = 9\pi\sqrt{3}$, откуда $x = 12$.

Ответ: 12.

---

[1] Мы использовали следующее свойство правильной треугольной пирамиды: скрещивающиеся ребра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

задача 49

В шар вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая BA_1 образует с плоскостью BCC_1 угол 30°. Площадь поверхности шара равна 180π. Найдите объем призмы.

Решение. Опустим перпендикуляр A_1K на ребро B_1C_1 и соединим точку K с вершиной B (Рис. 5). Так как $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма, плоскости $A_1B_1C_1$ и BCC_1 взаимно перпендикулярны и, следовательно, $A_1K \perp (BCC_1)$. Тогда $A_1K \perp BK$ и, кроме того, прямая BK является проекцией прямой BA_1 на плоскость BCC_1, откуда $\angle A_1BK = \angle(BA_1;(BCC_1)) = 30°$.

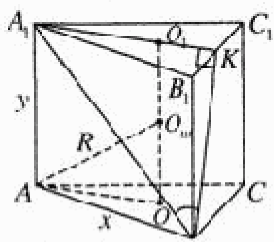


Рис. 5

Центр $O_ш$ шара, описанного около данной призмы, есть середина отрезка, соединяющего центры O и O_1 окружностей, описанных около оснований призмы. Тогда отрезок $AO_ш$ – радиус R этого шара. По условию площадь поверхности описанного шара равна 180π, откуда $4\pi R^2 = 180\pi$, $R^2 = 45$.

Обозначим через x и y соответственно длину стороны основания и высоту данной призмы. Тогда находим:

а) отрезок AO – радиус окружности, описанной около правильного треугольника ABC, следовательно, $AO = \frac{AB}{\sqrt3} = \frac{x}{\sqrt3}$;

б) отрезок A_1K – высота правильного треугольника ABC, следовательно, $A_1K = \frac{x\sqrt3}{2}$;

в) из прямоугольного треугольника A_1BK: $A_1B = 2A_1K = x\sqrt3$;

г) из прямоугольного треугольника $AOO_ш$: $AO^2 + OO_ш^2 = AO_ш^2$, откуда $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 45$; (1)

д) из прямоугольного треугольника A_1AB: $AB^2 + AA_1^2 = A_1B^2$, откуда $x^2 + y^2 = 3x^2$, $y^2 = 2x^2$. (2)

Далее решая систему уравнений (1) и (2), находим: $x^2 = 54$, $y = 6\sqrt3$.

Окончательно имеем: $V_{пр} = S_{осн}H = \frac{x^2\sqrt3}{4}\cdot y = \frac{54\sqrt3\cdot 6\sqrt3}{4} = 243$.

Ответ: 243.

задача 50

Отрезок PN – диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN, если T – середина ребра ML.

Решение. Примем треугольник MNP за основание пирамиды $PNML$, а отрезок PN – за основание треугольника MNP (Рис. 6). Тогда объем пирамиды $PNML$ можно вычислить по формуле: $V = \frac13\cdot\frac12\cdot PN\cdot h\cdot H = \frac13 RhH$, где R – радиус данной сферы, h – высота треугольника MNP, проведенная из вершины M, H – высота пирамиды $PNML$.

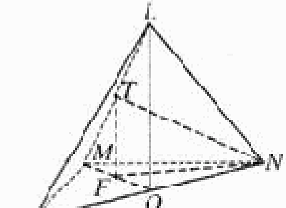


Рис. 6

IV. Сфера, вписанная в многогранник, и сфера, описанная около многогранника

Определение. Многогранник называется *вписанным в сферу* (сфера *описана около многогранника*), если все вершины многогранника принадлежат этой сфере.

Следствие. Центр описанной около многогранника сферы есть точка, равноудаленная от всех вершин этого многогранника.

1. Около призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда эта призма прямая и около ее основания можно описать окружность. Центр сферы, описанной около такой призмы, есть середина отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований призмы.

2. Около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность. Центр сферы, описанной около такой пирамиды, есть точка пересечения прямой, перпендикулярной плоскости основания пирамиды, проходящей через центр описанной около этого основания окружности, и плоскости серединных перпендикуляров к боковому ребру пирамиды.

Следствия:

а) около тетраэдра можно описать сферу;

б) если боковые ребра пирамиды равны (одинаково наклонены к основанию), то около такой пирамиды можно описать сферу; в этом случае центр сферы принадлежит прямой, содержащей высоту пирамиды.

Определение. Многогранник называется *описанным около сферы* (сфера *вписана в многогранник*), если все грани многогранника касаются этой сферы.

Следствие. Центр вписанной в многогранник сферы есть точка, равноудаленная от всех граней этого многогранника.

В призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение этой призмы[1] можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности (диаметру вписанной сферы).

В пирамиду можно вписать сферу, если двугранные углы при основании пирамиды равны, причем центр этой сферы – точка пересечения высоты пирамиды и биссектрисы двугранного угла при основании пирамиды.

В любой тетраэдр можно вписать сферу.

Теорема. Если в многогранник, объем которого равен V, а площадь поверхности S, вписана сфера радиуса R, то имеет место соотношение

$$R=\frac{3V}{S}.$$

[1] *Перпендикулярным сечением* призмы называется сечение призмы плоскостью, перпендикулярной к ее боковому ребру и пересекающей все боковые ребра призмы.

Поскольку PN – диаметр данной сферы, а точка M лежит на сфере, треугольник MNP – прямоугольный треугольник, вписанный в окружность, радиус которой равен радиусу R данной сферы. Следовательно, наибольшее значение высоты h треугольника MNP равно R. Плоскость MNP отсекает от данной сферы полусферу, следовательно, наибольшее расстояние от точек сферы до этой плоскости также равно радиусу сферы, откуда R – наибольшее значение высоты H пирамиды $PNML$. Таким образом, пирамида $PNML$ имеет наибольший объем, если PNM и PNL – прямоугольные равнобедренные треугольники, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях, поскольку плоскость PNL содержит перпендикуляр к плоскости PNM – высоту LO пирамиды $PNML$ (Рис. 6).

Опустим перпендикуляр TF из середины T ребра ML на плоскость MNP. Точка F принадлежит отрезку MO, так как MO – проекция отрезка ML на плоскость MNP. Тогда FN – проекция TN на плоскость MNP и, следовательно, угол между прямой NT и плоскостью PMN равен углу между прямой NT и прямой FN, т.е. углу FNT.

Далее имеем:

а) отрезки TF и LO параллельны, так как они перпендикулярны одной плоскости;

б) отрезок TF – средняя линия треугольника MLO, так как T – середина ребра ML и $TF \parallel LO$, откуда $TF=\frac{1}{2}LO=\frac{R}{2}$;

в) треугольник FNO прямоугольный, откуда $FN^2=FO^2+ON^2=$ $=\frac{R^2}{4}+R^2=\frac{5R^2}{4}$;

г) треугольник FNT прямоугольный, откуда $TN=\sqrt{FT^2+FN^2}=$ $=\sqrt{\frac{R^2}{4}+\frac{5R^2}{4}}=\frac{R\sqrt{6}}{2}$ и, следовательно, $\sin\angle FNT=\frac{FT}{TN}=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

задача 51

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1, BB_1 и CC_1 – боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1, пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается плоскости основания ABC и плоскости BCB_1. Известно, что $AB=12$, $A_1M:MC_1=3:1$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

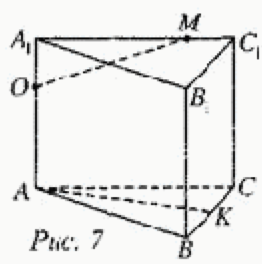


Рис. 7

Решение. Пусть точка O – центр данной сферы, тогда отрезок OM – ее радиус R (Рис. 7). Так как сфера касается плоскостей ABC и BCB_1, расстояние от точки O до каждой из этих плоскостей равно радиусу сферы. Расстояние от точки O до плоскости ABC равно отрезку OA ребра AA_1, а расстояние от точки O до плоскости BCB_1 равно расстоянию от прямой AA_1 до параллельной ей плоскости BCB_1, т.е. высоте AK правильного треугольника ABC.

Далее имеем: $OM=OA=AK=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$, $A_1M=\frac{3}{4}A_1C_1=9$,

$A_1O=\sqrt{OM^2-A_1M^2}=3\sqrt{3}$, $AA_1=OA+OA_1=9\sqrt{3}$, откуда площадь боковой поверхности призмы $S=3AB\cdot AA_1=3\cdot 12\cdot 9\sqrt{3}=324\sqrt{3}$.

Ответ: $324\sqrt{3}$.

задача 52 Основание призмы – треугольник со сторонами 10, 10 и 12. В призму вписан шар, и около нее описан шар. Найдите радиусы этих шаров.

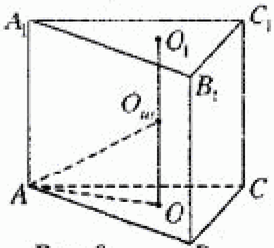


Рис. 8

Решение. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ – данная призма (Рис. 8). Эта призма прямая, так как только около прямой призмы можно описать шар.

1. Основание прямой призмы равно ее перпендикулярному сечению, следовательно, радиус вписанного шара r равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы. Обозначим через p полупериметр основания, а через S его площадь. Тогда $r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=\frac{\sqrt{16\cdot 6\cdot 6\cdot 4}}{16}=3$.

2. Высота h призмы, описанной около шара, равна диаметру этого шара, откуда $h=2r=6$.

3. Центр $O_ш$ шара, описанного около призмы, есть середина высоты OO_1, соединяющей центры окружностей, описанных около оснований призмы, а радиус этого шара R – расстояние от точки $O_ш$ до любой вершины призмы, например отрезок $AO_ш$.

4. Длину отрезка $AO_ш$ находим из прямоугольного треугольника $AO_шO$, в котором $OO_ш=0{,}5h=3$, а отрезок OA – радиус окружности, описанной около основания призмы, откуда $OA=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S}=\frac{25}{4}$. Окончательно получаем: $R=\sqrt{AO^2+OO_ш^2}=\frac{\sqrt{769}}{4}$.

Ответ: $r=3$, $R=\frac{\sqrt{769}}{4}$.

задача 53 Ребро PA пирамиды $PABC$ равно 15 и перпендикулярно плоскости треугольника ABC, в котором $AB=AC=10$, $BC=12$ Найдите радиусы вписанной в пирамиду и описанной около пирамиды сфер.

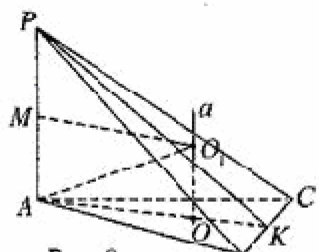


Рис. 9

Решение. Через центр O окружности, описанной около треугольника ABC, проведем прямую a, перпендикулярную плоскости этого треугольника (Рис. 9). Прямые a и PA перпендикулярны одной плоскости, следовательно, они параллельны, а значит, лежат в одной плоскости – плоскости PAO. Проведем в плоскости PAO через середину M ребра PA прямую, перпендикулярную к PA, и обозначим через O_1 точку пересечения этой прямой с прямой a. Точка O_1 равноудалена от всех вершин данной пирамиды, следовательно, эта точка – центр сферы, описанной около пирамиды, а отрезок AO_1 – радиус R этой сферы. Далее находим:

1) Отрезок AO – радиус окружности, описанной около треугольника ABC, следовательно,

$$AO=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S_{\Delta ABC}}=\frac{10\cdot 10\cdot 12}{4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{10\cdot 10\cdot 12}{4\cdot\sqrt{16\cdot 6\cdot 6\cdot 4}}=\frac{25}{4}.$$

2) Четырехугольник AMO_1O – прямоугольник, так как $AM\perp AO$ и $OO_1\perp AO$ по определению прямой, перпендикулярной плоскости, а $MO_1\perp AM$ по построению. Следовательно, $OO_1=0{,}5AP=7{,}5$.

3) Треугольник AOO_1 прямоугольный, следовательно, $AO_1=R=\sqrt{AO^2+OO_1^2}=\sqrt{\frac{225}{4}+\frac{625}{16}}=\frac{5\sqrt{61}}{4}$.

4) Ребро PA пирамиды $PABC$ перпендикулярно плоскости ABC, следовательно, отрезок PA – высота данной пирамиды, откуда $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot PA=240$, где V – объем данной пирамиды.

5) Треугольник ABC равнобедренный, следовательно, отрезок AK – высота этого треугольника, и из прямоугольных треугольников ABK и APK последовательно находим: $AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=8$, $PK=\sqrt{AK^2+PA^2}=17$. Тогда площадь S полной поверхности данной пирамиды равна: $S=S_{ABC}+2S_{PAB}+S_{PBC}=48+2\cdot 0{,}5\cdot 15\cdot 10+0{,}5\cdot 12\cdot 17=300$.

6) Радиус r сферы, вписанной в пирамиду, находим по формуле $r=\frac{3V}{S}$, откуда $r=\frac{3\cdot 240}{300}=\frac{12}{5}$.

Ответ: $r=\frac{12}{5}$, $R=\frac{5\sqrt{61}}{4}$.