B1 Решите уравнение $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, приведем уравнение к квадратному относительно $\sin x$ и решим его:

$$2\cos^2 x - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2(1-\sin^2 x) - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -2 \text{ — решений нет,} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}.$$

B2 Решите уравнение $\sqrt{2x+7} - 2 = x$.

Решение. Используя теорему $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$, получим:

$$\sqrt{2x+7} - 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{2x+7} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \ge 0, \\ 2x+7 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2, \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2, \\ \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

B3 Найдите значение выражения $\dfrac{\sin^2 27^\circ - \sin^2 63^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ}$.

Решение (I способ). Воспользуемся формулами приведения и формулами косинуса и синуса двойного аргумента: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ и $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Имеем:

$$\frac{\sin^2 27^\circ - \sin^2 63^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} = \frac{\sin^2(90^\circ - 63^\circ) - \sin^2 63^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} = \frac{2(\cos^2 63^\circ - \sin^2 63^\circ)}{2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos(2\cdot 63^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{2\cos 126^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2\cos(90^\circ + 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{-2\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = -2.$$

Решение (II способ). Используем формулу понижения степени $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$. Имеем:

$$\frac{\sin^2 27^\circ - \sin^2 63^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} = \frac{\dfrac{1-\cos 54^\circ}{2} - \dfrac{1-\cos 126^\circ}{2}}{\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} = \frac{-\cos 54^\circ + \cos 126^\circ}{2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{-\cos(90^\circ - 36^\circ) + \cos(90^\circ + 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{-\sin 36^\circ - \sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = -2.$$

Ответ: -2.

B 4

Найдите точку максимума функции $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = (x^2)' \cdot e^x + (e^x)' \cdot x^2 = 2x \cdot e^x + e^x \cdot x^2 =$$
$$= e^x(2x + x^2).$$

Найдем нули производной:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2x + x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Поведение функции изображено на рисунке. Максимум функции достигается в точке $x = -2$.

Ответ: точка максимума: −2.

B 5

Найдите меньший корень уравнения $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$.

Решение. Данное уравнение является однородным относительно выражений 3^x и 2^x. Так как 4^x не равно нулю ни при каких значениях x, разделив левую и правую часть уравнения на 4^x, получаем:

$$3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 2 = 0. \ (*)$$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$. Тогда уравнение (*) принимает вид $3t^2 - 5t + 2 = 0$. Далее имеем:

$$3t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{3}, \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Итак, меньший корень уравнения равен −1.

Ответ: −1.

B6

Катер прошел по течению реки расстояние от пункта A до пункта B за 3 ч, а от B до A — за 5 ч. За скольк часов от A до B проплывет плот?

Решение. Пусть S — расстояние между A и B, v — скорость катера, u — скорость течения реки (S, v, $u > 0$, $v > u$). При движении из A в B скорость катера была $v+u=\dfrac{S}{3}$ км/ч, при движении из B в A скорость была $v-u=\dfrac{S}{5}$ км/ч. Решим систему: $\begin{cases} v+u=\dfrac{S}{3}, \\ v-u=\dfrac{S}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u=\dfrac{S}{3}-\dfrac{S}{5}, \\ v=\dfrac{S}{5}+u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{S}{15}, \\ v=\dfrac{4S}{15}. \end{cases}$

Таким образом, скорость течения реки равна $\dfrac{S}{15}$ км/ч, и плот, движущийся со скоростью реки, пройдет путь от A до B за 15 ч.

Ответ: 15 ч.

B7

Найдите число целых решений неравенства $(|x+2|-3)(\sin x-\pi)\ge 0$.

Решение. Поскольку второй множитель, в силу ограничения $-1\le \sin x\le 1$, отрицателен при всех значениях x, имеем неравенство:

$$|x+2|-3\le 0 \Leftrightarrow |x+2|\le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge -3, \\ x+2\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -5, \\ x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -5\le x\le 1.$$

Таким образом, неравенство имеет 5 отрицательных целых решений, одно положительное и решение 0. Всего их 7.

Ответ: 7 решений.

B8

Найдите наибольшее целое значение параметра c, при котором решение системы уравнений $\begin{cases} x+7y=c, \\ 2x-y=5 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x>y-2$.

Решение. Решим систему:

$$\begin{cases} x+7y=c, \\ 2x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c-7y, \\ 2(c-7y)-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c-7y, \\ 15y=2c-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c-7y, \\ y=\dfrac{2}{15}c-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=c-7\left(\dfrac{2}{15}c-\dfrac{1}{3}\right), \\ y=\dfrac{2}{15}c-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{15}c+\dfrac{7}{3}, \\ y=\dfrac{2}{15}c-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Решим неравенство $x > y - 2$:

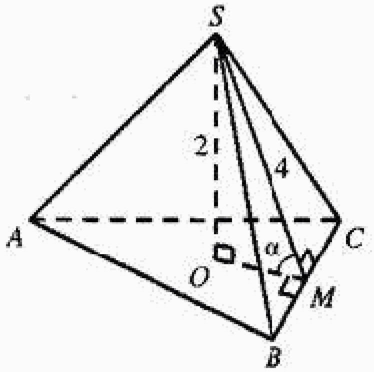
$$\frac{1}{15}c + \frac{7}{3} > \frac{2}{15}c - \frac{1}{3} - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{15}c - \frac{2}{15}c > -\frac{1}{3} - \frac{7}{3} - 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{15}c > -\frac{14}{3} \Leftrightarrow c < 70.$$

Наибольшим целым значением c, удовлетворяющим неравенству $c < 70$, является число 69.

Ответ: 69.

B9

Высота правильной треугольной пирамиды равна 2, двугранные углы при основании равны $30°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Решение. Пусть $SABC$ — заданная пирамида (см. рис.), SO — ее высота, $\angle SMO$ — линейный угол двугранного угла при основании. Поскольку $SABC$ — правильная пирамида, основание O ее высоты есть центр окружности, вписанной в треугольник ABC, следовательно, OM — радиус этой окружности, откуда $BC = 2\sqrt{3}OM$. Из прямоугольного треугольника SOM находим $OM = SO\,\mathrm{ctg}\,30° = 2\sqrt{3}$, $SM = 4$. Тогда $BC = 12$.

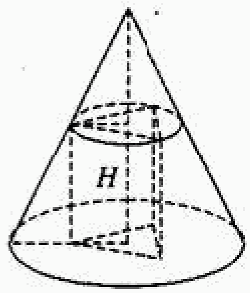
Окончательно получаем:

$$S_{б.п.} = 0{,}5P_{ABC} \cdot SM = 0{,}5 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 4 = 72.$$

Ответ: 72.

B10

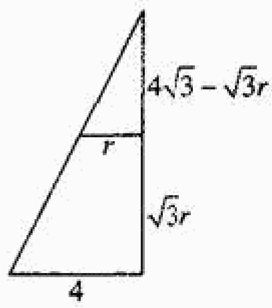
В конус с радиусом основания 4 и высотой $4\sqrt{3}$ вписана треугольная призма, у которой все ребра равны. Найдите объем призмы.



Решение. Пусть ребро призмы равно a, пусть окружность, описанная около верхнего основания — правильного треугольника, имеет радиус r. Тогда ребро призмы есть $a = \sqrt{3}r$.

Отношение площади сечения, параллельного основанию конуса, к площади основания равно отношению квадратов их расстояний до вершины конуса, откуда последовательно получаем:

$$\frac{\pi r^2}{16\pi} = \frac{(4\sqrt{3} - r\sqrt{3})^2}{(4\sqrt{3})^2},\ \frac{r}{4} = \frac{4\sqrt{3} - r\sqrt{3}}{4\sqrt{3}},\ \frac{r}{4} = \frac{4-r}{4},\ r = 4 - r,\ r = 2.$$



Тогда $a = 2\sqrt{3}$, откуда объем призмы равен:

$$V = S \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{3})^3\sqrt{3}}{4} = 18.$$

Ответ: 18.

B1 Найдите значение выражения $\sqrt[6]{3^7 \cdot 4^5} \cdot \sqrt[6]{3^5 \cdot 4}$.

Решение. Пользуясь свойствами арифметического корня, находим:

$$\sqrt[6]{3^7 \cdot 4^5} \cdot \sqrt[6]{3^5 \cdot 4} = \sqrt[6]{3^7 \cdot 4^5 \cdot 3^5 \cdot 4} = \sqrt[6]{3^{12} \cdot 4^6} = \sqrt[6]{(3^2 \cdot 4)^6} = 3^2 \cdot 4 = 36.$$

Ответ: 36

B2 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+4} + \frac{4\sqrt{y}}{y-16}$ при $y = 18$.

Решение. Заметим, что $(\sqrt{y}-4)(\sqrt{y}+4) = y-16$. Тогда

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+4} + \frac{4\sqrt{y}}{y-16} = \sqrt{y}\left(\frac{1}{\sqrt{y}+4} + \frac{4}{(\sqrt{y}+4)(\sqrt{y}-4)}\right) = \sqrt{y} \cdot \frac{\sqrt{y}-4+4}{(\sqrt{y}+4)(\sqrt{y}-4)} = \frac{y}{y-16}.$$

При $y = 18$ значение выражения равно $\frac{18}{2} = 9$.

Ответ: 9

B3 Укажите значение выражения $2\log_2 3 + \log_2 \frac{1}{3}$.

Решение. Используя формулы логарифма степени и логарифма произведения, находим:

$$2\log_2 3 + \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3^2 + \log_2 \frac{1}{3} = \log_2\left(3^2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \log_2 3.$$

B4 Упростите выражение $\frac{1}{1+\sin\alpha}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

Решение. Применяя основное тригонометрическое тождество и формулу синуса двойного аргумента, получаем:

$$\frac{1}{1+\sin\alpha}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{1+\sin\alpha}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\sin\alpha}\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=1.$$

B5 Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{27}\right)^{0,5x-1}=9$.

Решение. Перейдем к степени с основанием $\frac{1}{3}$:

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{0,5x-1}=9\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{3(0,5x-1)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\Leftrightarrow 3(0,5x-1)=-2\Leftrightarrow\frac{3}{2}x-3=-2\Leftrightarrow\frac{3}{2}x=1\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$$

Корень уравнения принадлежит промежутку $[-1;\ 1)$.

B6 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(6-0,3x)>-1$.

Решение. Пользуясь свойством логарифмической функции, основание которой меньше единицы, получаем:

$$\log_{\frac{1}{9}}\left(6-\frac{3}{10}x\right)>-1\Leftrightarrow 0<6-\frac{3}{10}x<\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}\Leftrightarrow -6<-\frac{3}{10}x<9-6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{10}{3}\cdot6<-x<\frac{10}{3}\cdot3\Leftrightarrow-20<-x<10\Leftrightarrow 20>x>-10\Leftrightarrow-10<x<20.$$

Ответ: (-10; 20)

B7

Найдите область определения функции $y=\sqrt[4]{1-7^{x^2}\cdot 49^x}$.

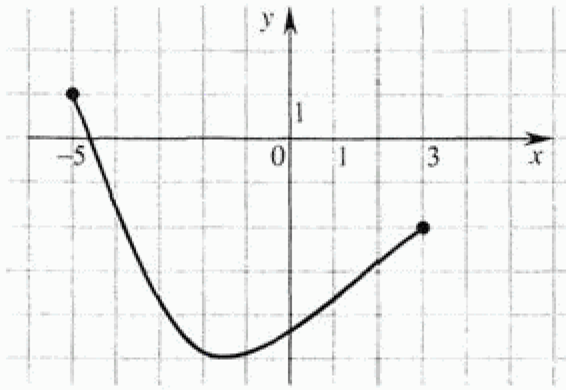
Решение. Область определения функции задается неравенством $1-7^{x^2}\cdot 49^x\geq 0$. Решим его:

$$1-7^{x^2}\cdot 49^x\geq 0\Leftrightarrow 7^{x^2}\cdot 7^{2x}\leq 1\Leftrightarrow 7^{x^2+2x}\leq 7^0\underset{7>1}{\Leftrightarrow} x^2+2x\leq 0\Leftrightarrow x(x+2)\leq 0\Rightarrow -2\leq x\leq 0.$$

Ответ: [-2; 0]

B8

Функция $y=f(x)$ задана графиком на отрезке $[-5;3]$. Укажите область ее значений.



Решение. Значение функции — ордината проекции точки ее графика на ось Oy. В нашем случае множество этих значений есть отрезок $[-5;1]$.

Ответ: [-5; 1]

B9

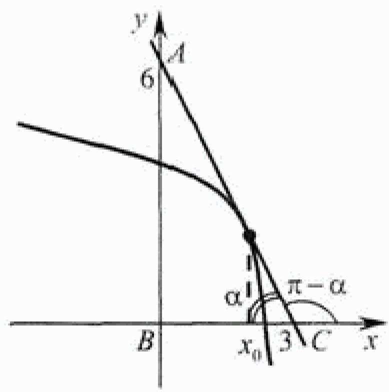
Найдите произведение корней уравнения $\sin 2x=x$.

Решение. Ясно, что число 0 — решение данного уравнения, следовательно, сколько бы корней не имело данное уравнение, произведение всех корней равно нулю.

Ответ: 0

B10

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



Решение. Значение производной в точке касания равно тангенсу угла наклона касательной к графику в этой точке, причем угол отсчитывается от положительного направления оси абсцисс. Найдем тангенс угла ACB прямоугольного треугольника ABC (см. рис.):

$\operatorname{tg}\angle ACB=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{6}{3}=2$. Тогда тангенс угла наклона касательной есть

$\operatorname{tg}(\pi-\angle ACB)=-\operatorname{tg}\angle ACB=-2$.

Ответ: -2

B11 Найдите значение производной функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.

Решение. Используя формулы $(x^n)' = nx^{n-1}$ и $(\sin x)' = \cos x$, получим:

$$y' = 2x + \cos x;$$
$$y'(\pi) = 2 \cdot \pi + \cos\pi = 2\pi - 1.$$

Ответ: $2\pi - 1$

B12 Укажите первообразную функции $f(x) = x + \cos x$.

Решение. Поскольку первообразной функции x^n является $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, а первообразной функции $\cos x$ является $\sin x$, получаем:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C \text{ (в нашем случае } C = 0\text{)}.$$

Ответ: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \sin x$

B13 Решите уравнение $\sin^2 x - \cos^2 x = \dfrac{1}{2}$.

Решение. Используя формулу косинуса двойного аргумента, получаем:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ 2x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

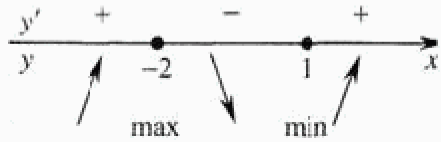
Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

B14

Найдите максимум функции $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x-2\frac{1}{3}$.

Решение. Найдем производную: $y'=3\cdot\frac{1}{3}x^2+2\cdot\frac{1}{2}x-2=x^2+x-2$.

Найдем нули производной:



$$y'=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2,\\x=1.\end{array}\right.$$

Знаки производной и промежутки монотонности функции показаны на рисунке. Функция имеет максимум в точке $x=-2$, следовательно,

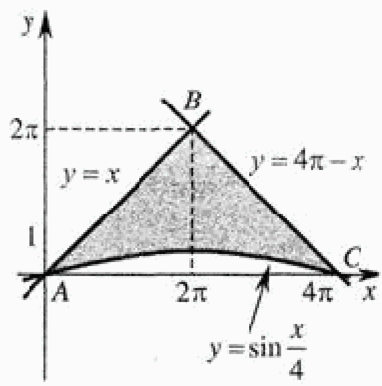
$$y_{\max}=y(-2)=\frac{(-2)^3}{3}+\frac{(-2)^2}{2}-2(-2)-\frac{7}{3}=6-5=1.$$

Ответ: 1.

B15

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=-x+4\pi$, $y=\sin\frac{x}{4}$.

Решение. Построим эскизы графиков (см. рис.). Площадь заштрихованной фигуры равна разности площади треугольника ABC и площади фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sin\frac{x}{4}$ и отрезком $[0;4\pi]$ оси абсцисс. Координаты точки пересечения графиков $y=-x+4\pi$ и $y=x$ находятся из условия $-x+4\pi=x$, откуда $x=2\pi$, $y=2\pi$. Площадь треугольника ABC равна:



$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AC|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot4\pi\cdot2\pi=4\pi^2.$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=\sin\frac{x}{4}$ и отрезком $[0;4\pi]$ оси абсцисс, равна: $S=\int_0^{4\pi}\sin\frac{x}{4}dx=-4\cos\frac{x}{4}\Big|_0^{4\pi}=-4(\cos\pi-\cos0)=8$.

Таким образом, искомая площадь равна: $S=4\pi^2-8$.

Ответ: $4\pi^2-8$.

B16

Сколько корней имеет уравнение $\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)\sqrt{25-x^2}=0$?

Решение. Произведение равно нулю, если какой-то из множителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл. Для нашего случая имеем:

$$\text{либо а)}\begin{cases}25-x^2\ge0\\ \frac{1}{\cos^2x}-1=0\end{cases},\ \text{либо б)}\begin{cases}25-x^2=0\\ \cos x\ne0\end{cases}.$$

$$\text{а)}\begin{cases}25-x^2\ge 0\\ \dfrac{1}{\cos^2 x}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5\le x\le 5\\ \cos^2 x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5\le x\le 5\\ x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\pi\\ x=0\\ x=\pi\end{array}\right.$$

$$\text{б)}\begin{cases}25-x^2=0\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\ x=5\end{array}\right.$$

Таким образом, данное уравнение имеет пять корней.

Ответ: 5.

B17

При каком наибольшем значении a функция $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-ax^2+7ax+5$ возрастает на всей числовой прямой?

Решение. Поскольку функция $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-ax^2+7ax+5$ дифференцируема на всей числовой прямой, она возрастает, если $f'(x)>0$ при любом значении x, за исключением, может быть, «отдельных» точек, в которых $f'(x)=0$.

$$f'(x)=2x^2-2ax+7a.$$

Чтобы неравенство $f'(x)\ge 0$ выполнялось на всей числовой прямой, необходимо, чтобы дискриминант квадратного трехчлена $2x^2-2ax+7a$ был неположителен:

$$\frac{D}{4}\le 0\Leftrightarrow a^2-14a\le 0\Leftrightarrow a(a-14)\le 0\Leftrightarrow 0\le a\le 14.$$

Ответ: 14.

B18

Пусть $(x_0;\, y_0)$ — решение системы $\begin{cases}y+2=\sqrt{x+4},\\ y+|x-5|=1.\end{cases}$ Найдите отношение $\dfrac{x_0}{y_0}$.

Решение.
I способ.

$$\begin{cases}y+2=\sqrt{x+4}\\ y+|x-5|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+2=\sqrt{x+4},\\ y+2=3-|x-5|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+4}=3-|x-5|,\\ y+|x-5|=1.\end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

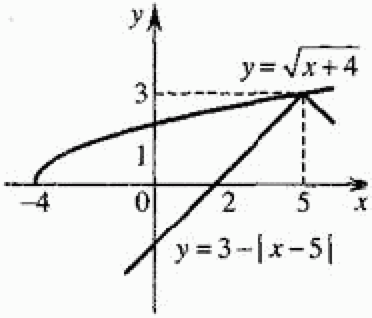
$$\text{а)}\begin{cases}x\ge 5,\\ \sqrt{x+4}=8-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\le x\le 8,\\ x+4=64-16x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\le x\le 8,\\ x^2-17x+60=0\end{cases}\Leftrightarrow x=5.$$

$$\text{б)}\begin{cases}-4\le x<5,\\ \sqrt{x+4}=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x<5,\\ x+4=x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x<5,\\ x^2-5x=0\end{cases}$$ — система не имеет решений.

Подставляя найденное значение x во второе уравнение системы, получаем $y=1$. Таким образом, пар (5; 1) — единственное решение данной системы, откуда искомое отношение равно 5.

II способ.

$$\begin{cases} y+2=\sqrt{x+4}, \\ y+|x-5|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4}=3-|x-5| \ (*), \\ y=1-|x-5|. \end{cases}$$



Решим уравнение (*) с помощью графиков функций $y=\sqrt{x+4}$ и $y=3-|x-5|$. Проверка подтверждает, что «вершина» графика $y=3-|x-5|$ — точка (5; 3) — принадлежит графику функции $y=\sqrt{x+4}$, следовательно, графики имеют ровно одну общую точку — (5; 3). Отсюда следует, что $x=5$ — единственное решение уравнения (*).

Далее получаем:

$$\begin{cases} x=5, \\ y=1-|x-5| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ y=1. \end{cases}$$

Таким образом, искомое отношение равно 5.

Ответ: 5.

B19 Найдите значение выражения $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение. Поскольку $\arcsin(-x)=-\arcsin(x)$, получаем:

$$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

Ответ: 0.

B20 Найдите наименьшее значение функции $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x^2)$.

Решение. Поскольку $\frac{1}{2}<1$, функции $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x^2)$ принимает свое наименьшее значение в той точке в которой функция $f(x)=2-x^2$ принимает свое наибольшее значение, т.е. в точке $x=0$. Таким образом, наименьшее значение функции $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x^2)$ равно $g(0)=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$.

Ответ: −1.

B21

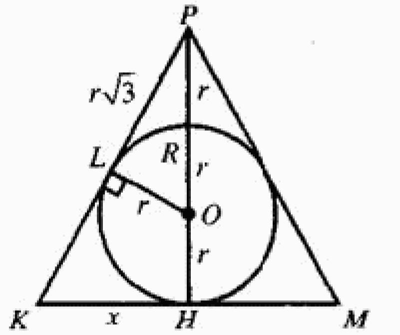
В равнобедренный треугольник PMK с основанием MK вписана окружность с радиусом $2\sqrt{3}$. Высота PH делится точкой пересечения с окружностью в отношении 1 : 2, считая от вершины P. Найдите периметр треугольника PMK.

Решение.

I способ.

1. Поскольку PH делится точкой R пересечения с окружностью в отношении 1 : 2, имеем:

$PR = \frac{1}{2}RH = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot r = r$; откуда $PO = PR + RO = 2r$.



2. Проведем $OL \perp PK$, $OL = r$. Поскольку в прямоугольном треугольнике PLO катет OL равен половине гипотенузы PO, имеем $\widehat{LPO} = 30^\circ$. Тогда $\widehat{KPM} = 60^\circ$ и KPM — равносторонний треугольник. Тогда $KM = 2\sqrt{3}r = 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 12$, откуда $P_{\triangle KPM} = 3\cdot 12 = 36$.

II способ.

1. Поскольку PH делится точкой R пересечения с окружностью в отношении 1 : 2, имеем:

$PR = \frac{1}{2}RH = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot r = r$; откуда $PO = PR + RO = 2r$ и $PO : OH = 2:1$.

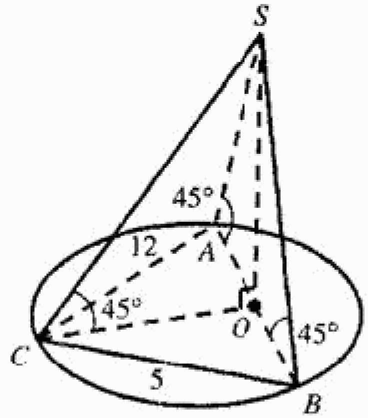
2. Так как PMK — равнобедренный треугольник, его высота PH является также и медианой, следовательно, точка O — точка пересечения медиан треугольника PMK. Но центр вписанной в треугольник окружности есть точка пересечения его биссектрис. Поскольку точка пересечения медиан треугольника PMK и точка пересечения его биссектрис совпадают, треугольник KPM — равносторонний треугольник, откуда получаем $KM = 2\sqrt{3}r = 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 12$. $P_{\triangle KPM} = 3\cdot 12 = 36$.

Ответ: 36.

B22

В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13, 12 и 5. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Решение. Введем обозначения, как показано на рисунке.



1. Заметим, что в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник ($5^2 + 12^2 = 13^2$), следовательно, его площадь S равна половине произведения катетов:

$$S = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5 = 30.$$

2. Поскольку боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания, — в середину O гипотенузы AB.

3. Медиана CO прямоугольного треугольника ABC равна радиусу описанной около него окружности — половине гипотенузы AB.

4. Треугольник SOC прямоугольный и равнобедренный ($\angle SCO = 45^\circ$), откуда

$$|SO| = |CO| = |OB| = \frac{13}{2},\ V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot |SO| = \frac{1}{3}\cdot 30\cdot \frac{13}{2} = 65.$$

Ответ: 65.

B1 Упростите выражение $\dfrac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$\frac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\,\alpha.$$

B2 Представьте выражение $a^{\frac{9}{4}}:a^{-\frac{3}{4}}$ в виде степени с основанием a.

Решение. На основании свойств степени имеем:

$$a^{\frac{9}{4}}:a^{-\frac{3}{4}}=a^{\frac{9}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)}=a^{\frac{12}{4}}=a^3.$$

B3 Вычислите $\sqrt[3]{125\cdot 0{,}027}$.

Решение. Применяя свойства корня, последовательно получаем:

$$\sqrt[3]{125\cdot 0{,}027}=\sqrt[3]{5^3\cdot 3^3\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3}=5\cdot 3\cdot\frac{1}{10}=\frac{3}{2}.$$

B4 Найдите значение выражения $\log_{20}5+\log_{20}4+2$.

Решение. Используя формулу преобразования суммы логарифмов в логарифм произведения, получаем:

$$\log_{20}5+\log_{20}4+2=\log_{20}(5\cdot 4)+2=1+2=3.$$

B5 Найдите все решения уравнения $(\mathrm{tg}^2 x+1)\,\mathrm{tg}\,x=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Решение. Применив формулу $1+\mathrm{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, получим:

$$(\mathrm{tg}^2 x+1)\,\mathrm{tg}\,x=-\frac{1}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\cos^2 x}=0\Leftrightarrow\frac{1}{\cos^2 x}(\mathrm{tg}\,x+1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mathrm{tg}\,x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

B6 Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\lg(5+x)-\lg(1-x)=\lg 2$.

Решение. Решим уравнение

$$\lg(5+x)-\lg(1-x)=\lg 2\Leftrightarrow\lg(5+x)=\lg 2+\lg(1-x)\Leftrightarrow\begin{cases}1-x>0,\\5+x=2(1-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1,\\3x=-3\end{cases}\Leftrightarrow x=-1.$$

Таким образом, корень уравнения принадлежит промежутку $(-2;\ 0)$.

B7 Решите неравенство $16\le 2^{x+3}$.

Решение. По свойству показательной функции с основанием, большим единицы, имеем:

$$16\le 2^{x+3}\Leftrightarrow 2^4\le 2^{x+3}\underset{2>1}{\Leftrightarrow}4\le x+3\Leftrightarrow x\ge 1.$$

Таким образом ответ: $[1;+\infty)$

B8 Определите число целых решений неравенства $\dfrac{6-x}{3x-9}\ge 0$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{6-x}{3x-9}\ge 0\Leftrightarrow\frac{x-6}{x-3}\le 0$$

Промежуток $(3;\ 6]$ содержит три целых числа: 4, 5, 6.

B9 Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{x-5}=7-x$.

Решение.

I способ. Используя теорему равносильности $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$, получим:

$$\sqrt{x-5} = 7 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x \ge 0, \\ x - 5 = (7-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7, \\ x^2 - 15x + 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7, \\ \left[\begin{array}{l} x = 6, \\ x = 9 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

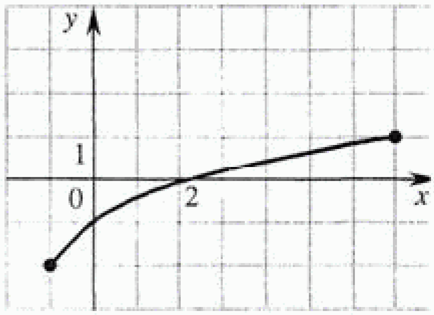
II способ. Приведем уравнение к квадратному относительно $\sqrt{x-5}$:

$$\sqrt{x-5} = 7 - x \Leftrightarrow x - 5 + \sqrt{x-5} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-5}^{\,2} + \sqrt{x-5} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-5} = -2 \text{ – решений нет,} \\ \sqrt{x-5} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x - 5 = 1 \Leftrightarrow x = 6.$$

Таким образом, корень уравнения принадлежит промежутку [5,5; 6,3].

B10 Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



Решение. Область определения функции есть множество значений ее аргумента x. В нашем случае это отрезок $[-1; 7]$.

B11 Найдите область определения функции $y = \log_{\frac{1}{5}} \dfrac{6-x}{6+2x}$.

Решение. Область определения функции (ООФ) задается неравенством $\dfrac{6-x}{6+2x} > 0$. Решим его методом интервалов:

$$\frac{6-x}{6+2x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-6}{x+3} < 0.$$

Ответ: (-3; 6).

B12 Найдите множество значений функции $y = \sin x - 3$.

Решение. В силу ограниченности функции синус и свойств неравенств имеем:

$$-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow -4 \le \sin x - 3 \le -2.$$

Ответ: $[-4; -2]$

B13

Пусть $(x_0;\, y_0)$ — решение системы $\begin{cases} y+3=\sqrt{4x^2+20x+25}, \\ 3x-y+7=0. \end{cases}$ Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

Решение. Решим систему

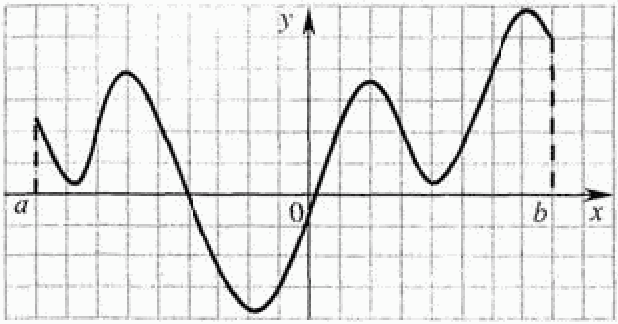
$$\begin{cases} y+3=\sqrt{4x^2+20x+25}, \\ 3x-y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(2x+5)^2}=3x+7+3, \\ y=3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x+5|=3x+10, \\ y=3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{10}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} 2x+5=-(3x+10), \\ 2x+5=3x+10, \end{array}\right. \\ y=3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{10}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-5, \end{array}\right. \\ y=3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=-2. \end{cases}$$

Таким образом, искомое произведение равно 6.

B14

На рисунке изображен график производной функции $y=f'(x)$, заданной на отрезке $[a;\, b]$. Исследуйте функцию $y=f(x)$ на монотонность и в ответе укажите число промежутков возрастания.



Решение. Данная функция возрастает на тех промежутках, на которых производная этой функции неотрицательна. В нашем случае таких промежутков 2.

Ответ: 2.

B15

Найдите значение выражения $(\log_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5}+\log_3 48-\log_3 16)\cdot 15^{\log_{15}4}$.

Решение.

$$(\log_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5}+\log_3 48-\log_3 16)\cdot 15^{\log_{15}4}=\left(\log_{5^{\frac{1}{5}}}5^{\frac{1}{2}}+\log_3\frac{48}{16}\right)\cdot 4=$$

$$=\left(\frac{5}{2}\log_5 5+\log_3 3\right)\cdot 4=\left(\frac{5}{2}+1\right)\cdot 4=14.$$

Ответ: 14.

B16 Найдите наибольшее целое значение функции $y=\frac{3}{2}\sqrt{25\cos^2 x+10\cos x+14}$.

Решение. Наибольшее значение функции y достигается при наибольшем значении подкоренного выражения $g(x)=25\cos^2 x+10\cos x+14$, т.е. при наибольшем значении квадратного трехчлена $f(t)=25t^2+10t+14$ на отрезке $[-1;\ 1]$:

$$f(t)=25t^2+10t+14=(5t+1)^2+13;$$

$$\max_{[-1;\,1]} f(t)=f(1)=6^2+13=49.$$

Тогда

$$\max_{\mathbb{R}} y(x)=1{,}5\sqrt{49}=10{,}5.$$

Ответ: 10,5.

B17 Укажите число корней уравнения $\operatorname{tg}2x\cdot\sin 4x+\cos 4x-\cos 8x=0$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$.

Решение. Упростим выражение $\operatorname{tg}2x\cdot\sin 4x+\cos 4x-\cos 8x$:

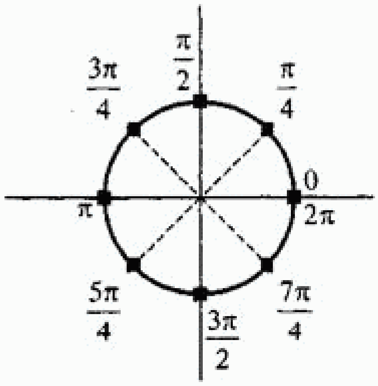
$$\operatorname{tg}2x\cdot\sin 4x+\cos 4x-\cos 8x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot 2\sin 2x\cdot\cos 2x+\cos 4x-\cos 8x=$$

$=2\sin^2 2x+\cos 4x-\cos 8x=2\sin^2 2x+1-2\sin^2 2x-\cos 8x=1-\cos 8x$, где $\cos 2x\neq 0$.

Решим систему

$$\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ 1-\cos 8x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ \cos 8x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ 8x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi k}{4},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$



На промежутке $[0;\ 2\pi]$ решениями являются $0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$.

Ответ: 5.

B18 При каком значении a функция $y=\sqrt[5]{ax^2+15x-1}$ имеет максимум в точке $x_0=\frac{3}{2}$?

Решение. Функция $y(x)$ имеет максимум в той же точке, что и функция $g(x)=ax^2+15x-1$, которая имеет максимум в точке $x=-\frac{15}{2a}$ только при отрицательных значениях старшего коэффициента a. Решим уравнение

$$-\frac{15}{2a}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=-5.$$

Ответ: –5.

B19

К 120 г раствора, содержащего 80% соли, добавили 480 г раствора, содержащего 20% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

Решение. В первом растворе находится $0,8\cdot 120=96$ г, а во втором — $480\cdot 0,2=96$ г соли. Масса сухого вещества после сливания стала $96+96=192$ г, масса растворов — $120+480=600$ г. Тогда процентное содержание η соли в полученном растворе есть

$$\eta=\frac{192}{600}\cdot 100\%=32\%.$$

Ответ: 32%.

B20

Десятый член арифметической прогрессии равен 19, а сумма первых пятидесяти членов равна 2500. Найдите сумму третьего, двенадцатого и двадцатого членов этой прогрессии.

Решение. Поскольку $a_n=a_1+(n-1)d$ и $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$, имеем систему

$$\begin{cases} a_1+(10-1)d=19, \\ \frac{2a_1+d(50-1)}{2}\cdot 50=2500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+9d=19, \\ 2a_1+49d=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=19-9d, \\ 31d=62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=1, \\ d=2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$a_3=1+(3-1)\cdot 2=5,$$
$$a_{12}=1+(12-1)\cdot 2=23,$$
$$a_{20}=1+(20-1)\cdot 2=39.$$

Искомая сумма равна:

$$5+23+39=67.$$

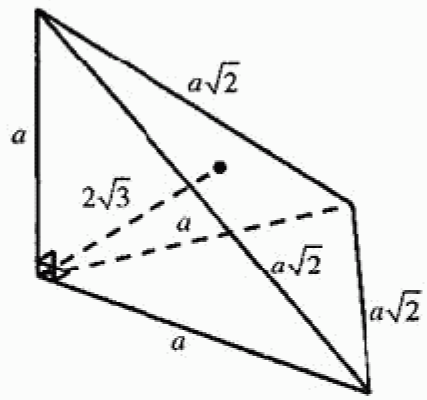
Ответ: 67.

B21

Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $2\sqrt{3}$, а все плоские углы при вершине прямые.

Решение.

1. Пусть боковые ребра пирамиды имеют длину a. Тогда длина стороны ее основания равна $a\sqrt{2}$. Если за основание принять одну из боковых граней пирамиды, то объем пирамиды равен: $V=\frac{1}{6}a^3$ (см. рис.).



2. С другой стороны,

$$V=\frac{1}{3}H\cdot S_{осн.}=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}=a^2.$$

3. Решая уравнение $\frac{1}{6}a^3=a^2$, находим $a=6$, откуда $V=36$.

Ответ: $V=36$.

B22

Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 30°, а взятая внутри треугольника точка находится на одинаковом расстоянии, равном 3, от боковых сторон и на расстоянии $2\sqrt{3}$ от основания.

Решение.

1. Введем обозначения, как показано на рисунке. Поскольку точка O равноудалена от боковых сторон, она принадлежит BD — биссектрисе, а следовательно, медиане и высоте данного треугольника.

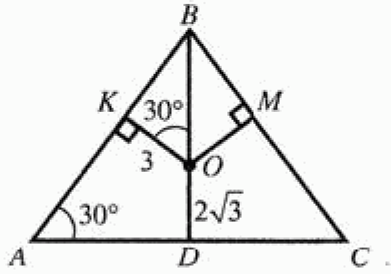
2. Треугольники ABD и OKB — подобны ($\angle BKO = \angle BDA = 90°$ и $\angle ABD$ — общий), следовательно, $\angle KOB = \angle BAD = 30°$.

Рассмотрим треугольник KBO:

$$BO = KO : \cos(\widehat{BOK}) = 2\sqrt{3},$$

следовательно,

$$BD = BO + OD = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$



3. Из прямоугольного треугольника ABD получаем:

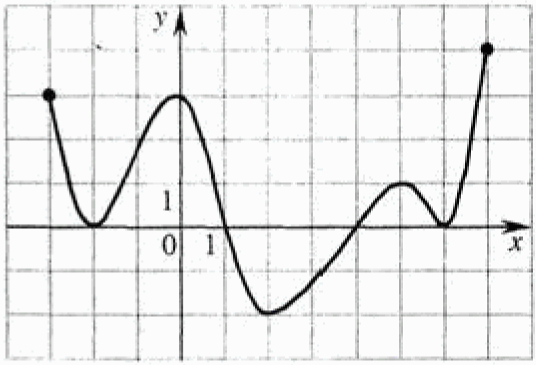
$AD = BD \cdot \mathrm{ctg}(\widehat{BAD}) = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$, и поскольку $AD = DC$,

$AC = 2AD = 24$.

Ответ: 24.

B1

Функция задана графиком. Укажите промежуток, на котором она принимает только отрицательные значения.



Решение. Функция отрицательна на тех промежутках, на которых ее график лежит ниже оси абсцисс; для заданной функции это интервал (1; 4).

B2

Найдите множество значений функции $y = \sin x - 3$.

Решение. В силу ограниченности функции $y = \sin x$ и свойств неравенств имеем:

$$-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow -4 \le \sin x - 3 \le -2.$$

Ответ: [-4; -2].

B3

Найдите производную функции $y = -\frac{6}{5}x^5 + 4x^3 - 12$.

Решение. Поскольку $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ и $(const)' = 0$, пользуясь правилами дифференцирования, получаем:

$$y' = -\frac{6}{5} \cdot 5 \cdot x^4 + 4 \cdot 3 \cdot x^2 - 0 = -6x^4 + 12x^2.$$

B4

Укажите область определения функции $y = \frac{1}{2^{6x-13} - 2^5}$.

Решение. Область определения функции задается неравенством $2^{6x-13} - 2^5 \ne 0$. Имеем:

$$2^{6x-13} \ne 2^5 \Leftrightarrow 6x - 13 \ne 5 \Leftrightarrow 6x \ne 18 \Leftrightarrow x \ne 3.$$

B5

Вычислите $125^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

Решение. Поскольку $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, имеем:

$$125^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (5^3)^{\frac{1}{3}} + (2^{-1})^{-1} = 5^{3 \cdot \frac{1}{3}} + 2^{(-1)\cdot(-1)} = 5^1 + 2^1 = 5 + 2 = 7.$$

B6

Упростите выражение $\frac{\sqrt[5]{a^{11}}}{\sqrt[5]{a}}$.

Решение. Поскольку $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ и $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, получаем:

$$\frac{\sqrt[5]{a^{11}}}{\sqrt[5]{a}} = a^{\frac{11}{5}} : a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{11}{5} - \frac{1}{5}} = a^{\frac{10}{5}} = a^2.$$

B7

Вычислите $\log_3 \frac{1}{2} + \log_3 6$.

Решение. Используя формулу преобразования суммы логарифмов в логарифм произведения, имеем.

$$\log_3 \frac{1}{2} + \log_3 6 = \log_3 \left(\frac{1}{2} \cdot 6\right) = \log_3 3 = 1.$$

B8

Решите уравнение $\sin(\pi - x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Последовательно получаем:

$$\sin(\pi - x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

B9

К графику функции $f(x) = 3x^2 + 5x - 15$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{6}$ проведена касательная. Найдите тан генс угла наклона касательной к оси Ox.

Решение. Тангенс угла наклона к оси Ox касательной к графику функции, проведенной в его точке абсциссой x_0, равен значению производной данной функции в точке x_0. Найдем производную и вычис лим ее значение в заданной точке:

$$f'(x) = (3x^2 + 5x - 15)' = 6x + 5;$$

$$f'(x_0) = 6 \cdot \frac{1}{6} + 5 = 6.$$

B10

Найдите значение $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$.

Решение. Поскольку число α лежит во второй координатной четверти, его косинус отрицателен, откуд

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} : \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

B11

Решите неравенство $2^{5x+7} \ge 8^x$.

Решение. Перейдем к основанию степени 2 и воспользуемся возрастанием показательной функции с основанием, большим единицы:

$$2^{5x+7} \ge 8^x \Leftrightarrow 2^{5x+7} \ge 2^{3x} \underset{2>1}{\Leftrightarrow} 5x + 7 \ge 3x \Leftrightarrow 2x \ge -7 \Leftrightarrow x \ge -\frac{7}{2}.$$

Ответ: $\left[-\frac{7}{2}; +\infty\right)$

B12

Какому промежутку принадлежит корень уравнения $\log_5(27+x)-\log_5 2=\log_5(7x)$?

Решение. Пользуясь теоремами равносильности, последовательно получаем:

$$\log_5(27+x)-\log_5 2=\log_5(7x) \Leftrightarrow \log_5(27+x)=\log_5 2+\log_5(7x) \Leftrightarrow \log_5(27+x)=\log_5(14x) \Leftrightarrow$$

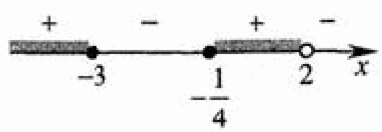
$$\Leftrightarrow \begin{cases}14x>0,\\ 27+x=14x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ 27=13x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ x=\dfrac{27}{13}\end{cases} \Leftrightarrow x=2\frac{1}{13}.$$

Найденный корень принадлежит промежутку (2; 4).

B13

Решите неравенство $\dfrac{(1+4x)(x+3)}{2-x}\geq 0.$

Решение. Решим данное неравенство методом интервалов (см. рис.):

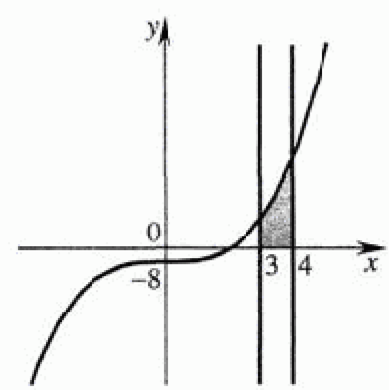


Ответ: $(-\infty;-3]\cup\left[-\frac{1}{4};2\right)$

B14

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3-8$, $x=3$, $x=4$, $y=0$.

Решение. Изобразим на рисунке эскизы графиков функций $y=x^3-8$, $y=0$, и прямые $x=3$, $x=4$. Фигура, площадь которой требуется найти, на рисунке заштрихована. Площадь этой фигуры S дается формулой $S=\int_3^4 y(x)dx$:

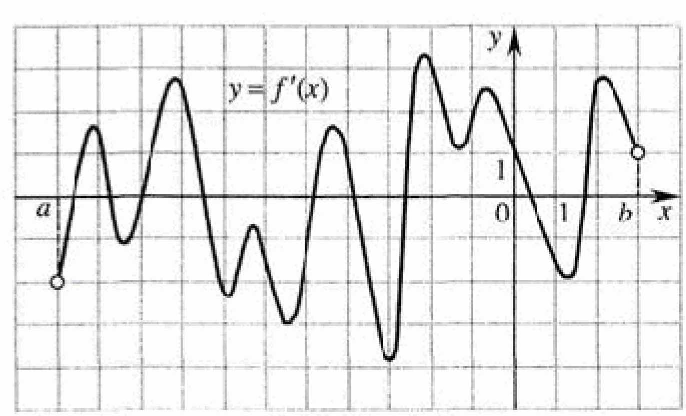


$$S=\int_3^4(x^3-8)dx=\left(\frac{x^4}{4}-8x\right)\Bigg|_3^4=\left(\frac{4^4}{4}-8\cdot 4\right)-\left(\frac{3^4}{4}-8\cdot 3\right)=35\frac{3}{4}=35{,}75.$$

Ответ: 35,75.

B15

Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(a;b)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите число точек максимума функции $y=f(x)$ на промежутке $(a;b)$.



Решение. Дифференцируемая функция достигает максимума в некоторой точке, если в левой полуокрестности этой точки ее производная положительна, а в правой — отрицательна. На заданном графике таких точек четыре.

Ответ: 4.

B16 Найдите значение выражения $\sqrt{19}\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$, если $\cos x=\frac{4}{\sqrt{19}}$ и $\pi\le x\le 2\pi$.

Решение. Поскольку $\pi\le x\le 2\pi$, имеем:

$$\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{19}}\right)^2}=-\sqrt{\frac{3}{19}}.$$

Далее, используя формулу $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$, получаем:

$$\sqrt{19}\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sqrt{19}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)=\sqrt{19}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{19}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right)\right)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

B17 Сколько корней имеет уравнение $(\sin^4 x-\cos^4 x)\cdot\log_2(1-x^2)=0$?

Решение. Поскольку $\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x$, получаем

$$(\sin^4 x-\cos^4 x)\cdot\log_2(1-x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2(1-x^2)=0,\\ \begin{cases}\sin^4 x-\cos^4 x=0,\\ 1-x^2>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x^2=1;\\ \begin{cases}\cos 2x=0,\\ -1<x<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;\\ \begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ -1<x<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\\ -1<x<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;\\ x=-\frac{\pi}{4};\\ x=\frac{\pi}{4}.\end{array}\right.$$

Таким образом, данное уравнение имеет три корня.

Ответ: 3.

B18 Найдите точку минимума функции $f(x)=\log_2(x^2-7x+13)$.

Решение. Поскольку логарифмическая функция с основанием, большим единицы, монотонно возрастает, точка минимума заданной функции совпадает с точкой минимума квадратного трехчлена $g(x)=x^2-7x+13$, если он положителен в этой точке. Квадратный трехчлен $g(x)=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min}=-\frac{b}{2a}$. В нашем случае: $x_{min}=\frac{7}{2}$,

тогда $g_{min}=g\left(\frac{7}{2}\right)=\left(\frac{7}{2}\right)^2-7\cdot\frac{7}{2}+13=\frac{3}{4}>0$.

Таким образом, число 3,5 — искомая точка минимума функции $f(x)$.

Ответ: 3,5.

B19 Укажите наибольшее целое число из области определения функции $y=(35-|3x-11|)^{-0,5}$.

Решение. Область определения данной функции задается неравенством $35-|3x-11|>0$. Решим его:

$$35-|3x-11|>0 \Leftrightarrow |3x-11|<35 \Leftrightarrow -35<3x-11<35 \Leftrightarrow -24<3x<46 \Leftrightarrow -8<x<15\frac{1}{3}.$$

Тем самым область определения данной функции есть интервал $\left(-8;\ 15\frac{1}{3}\right)$. Наибольшее целое число из этого интервала равно 15.

Ответ: 15.

B20 На каждый из нескольких опытных участков внесли два удобрения. Первое вносили по такой схеме: 0,5 кг на первый участок, а на каждый следующий участок на 0,5 кг больше, чем на предыдущий. Второе удобрение вносили по 3 кг на каждый участок. Всего внесли 42 кг удобрений. На сколько участков внесли удобрения?

Решение. Пусть искомое число участков n. Используя формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n=\frac{1}{2}(a_1+a_n)n$, получим количество внесенных килограммов первого удобрения:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)n=\frac{n^2+n}{4}.$$

Поскольку второго удобрения внесли $3n$ кг, а всего внесли 42 кг удобрений, имеем уравнение: $\frac{n^2+n}{4}+3n=42$, откуда

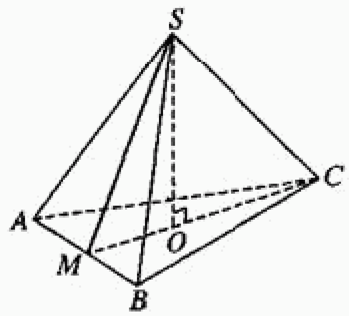
$$\frac{n^2+n}{4}+3n=42 \Leftrightarrow n^2+n+12n=168 \Leftrightarrow n^2+13n-168=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-21; \\ n=8 \end{array}\right. \underset{n\in N}{\Leftrightarrow} n=8.$$

Таким образом, удобрения внесли на 8 участков.

Ответ: 8.

B21 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а боковое ребро наклонено к плоскости основания ABC под углом, тангенс которого равен $\frac{4}{3}$. Найдите площадь треугольника MSC, где M — середина отрезка AB.

Решение. Пусть SO — высота пирамиды (см. рис.). Поскольку пирамида правильная, ее основанием является равносторонний треугольник, а точка O — его центр, $O\in CM$.



Отрезок CM — медиана и, следовательно, высота правильного треугольника ABC, откуда $CM=BC\cdot\sin\widehat{CBM}=6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9$.

Отрезок CO — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, следовательно, $CO=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=6$.

Поскольку угол между боковым ребром и плоскостью основания есть угол между наклонной SC и ее проекцией на плоскость основания CO, имеем: $SO = CO \cdot \operatorname{tg}\widehat{SCO} = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$.

Окончательно имеем: $S_{MSC} = \frac{1}{2} MC \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36$.

Ответ: 36.

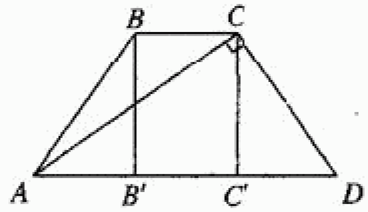
B22

В равнобедренной трапеции основания равны 9 и 15, диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ — заданная трапеция, $AD = 15$, $BC = 9$, BB' и CC' — высоты трапеции (см. рис.). Заданная трапеция равнобедренная, поэтому

$$AB' = C'D = \frac{AD - BC}{2} = 3,$$

$$AC' = AD - C'D = 12.$$



Отрезок CC' — высота прямоугольного треугольника ACD, опущенная из вершины прямого угла C на гипотенузу AD, откуда

$$CC' = \sqrt{AC' \cdot C'D} = \sqrt{12 \cdot 3} = 6.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CC' = \frac{15 + 9}{2} \cdot 6 = 72.$$

Ответ: 72.

B1 Найдите значение выражения $\frac{n^{\frac{3}{5}}}{n^{-\frac{7}{5}}}$ при $n=8$.

Решение. Частное от делении степеней с одинаковыми основаниями есть степень с тем же основание и показателем, равным разности показателей делимого и делителя:

$$\frac{n^{\frac{3}{5}}}{n^{-\frac{7}{5}}}=n^{\frac{3}{5}+\frac{7}{5}}=n^2.$$

При $n=8$, получим: $n^2=8^2=64$.

B2 Упростите выражение $\sqrt[7]{2^{14}q^{14}}$.

Решение. Поскольку $\sqrt[7]{ab}=\sqrt[7]{a}\sqrt[7]{b}$, получаем:

$$\sqrt[7]{2^{14}q^{14}}=\sqrt[7]{2^{14}}\sqrt[7]{q^{14}}=2^2q^2.$$

B3 Вычислите значение выражения $\log_5(5ab)$, если $\log_5(ab)=0,7$.

Решение. Используя формулу преобразования логарифма произведения в сумму логарифмов, имеем:

$$\log_5(5ab)=\log_5 5+\log_5(ab)=1+0,7=1,7.$$

B4 Упростите выражение $\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha}{2}+\cos\alpha-\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}$.

Решение. Используя формулу $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$, получим:

$$\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha}{2}+\cos\alpha-\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}=\cos\alpha-\cos\left(\frac{7\alpha}{2}+\frac{5\alpha}{2}\right)=\cos\alpha-\cos 6\alpha.$$

B5 Найдите производную функции $y=-\frac{7}{6}x^6+5x^4-14$.

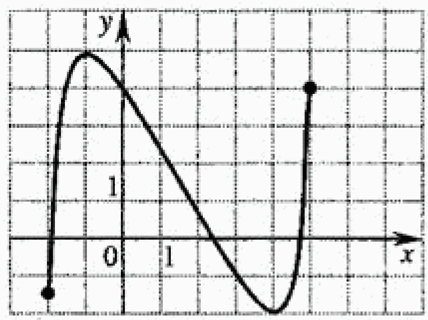
Решение. Используя формулу $(x^n)'=nx^{n-1}$ и правила дифференцирования, получим:

$$y'=-7x^5+20x^3.$$

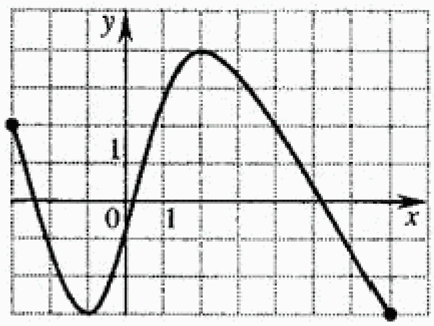
B6

На каком из следующих рисунков функция, заданная графиком, убывает на промежутке [0; 3]?

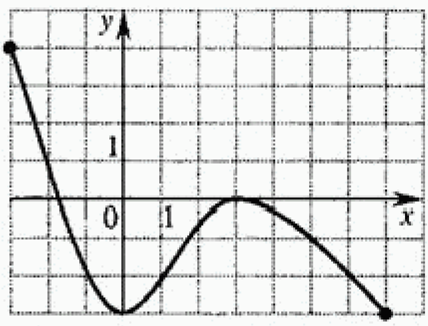
1.



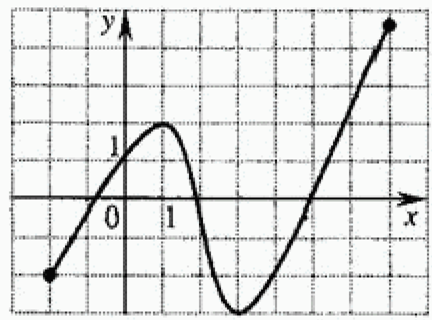
2.



3.



4.



Решение. Функция, график которой изображен на рисунке 1, убывает на отрезке [0; 3]; функция, график которой изображен на рисунке 2, не является монотонной на отрезке [0; 3]; функция, график которой изображен на рисунке 3, возрастает на отрезке [0; 3]; функция, график которой изображен на рисунке 4, не является монотонной на отрезке [0; 3].

Правильный ответ: 1.

B7

Найдите множество значений функции $y = 7 + \cos x$.

Решение. В силу ограниченности функции косинус и свойств неравенств имеем:

$$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow 6 \le 7 + \cos x \le 8.$$

Ответ: $[6; 8]$

B8

Решите уравнение $\cos x - 1 = 0$.

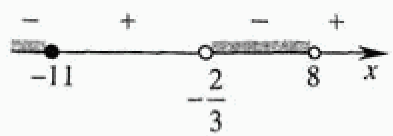
Решение. Последовательно получаем:

$$\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

B9

Решите неравенство $\dfrac{x+11}{(x-8)(3x+2)} \le 0$.

Решение. Решим неравенство $\dfrac{x+11}{(x-8)(3x+2)} \le 0$ методом интервалов (см. рис.):



Ответ: $(-\infty; -11] \cup \left(-\frac{2}{3}; 8\right)$

B10 Найдите область определения функции $f(x)=\dfrac{11}{2+\log_3 x}$.

Решение. Область определения функции задается соотношением $2+\log_3 x\neq 0$. Тогда

$$2+\log_3 x\neq 0 \Leftrightarrow \log_3 x\neq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 3^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<\frac{1}{9}, \\ x>\frac{1}{9}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{9}\right)\cup\left(\frac{1}{9};+\infty\right)$

B11 Решите уравнение $\sqrt{2x^2+2x-3}+1=-x$.

Решение. Используем теорему равносильности $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$

В нашем случае $\sqrt{2x^2+2x-3}+1=-x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x-3}=-x-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-1\geq 0, \\ 2x^2+2x-3=(-x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1, \\ x^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1, \\ \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: $\{-2\}$.

B12 Решите уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}x+1}=8$.

Решение. Перейдем к одному основанию и воспользуемся монотонностью показательной функции:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}x+1}=8 \Leftrightarrow (2^{-4})^{\frac{1}{2}x+1}=2^3 \Leftrightarrow -2x-4=3 \Leftrightarrow x=-3{,}5.$$

Ответ: $\{-3; 5\}$.

B13 Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t)=7+5t-e^{4-t}$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t. Найдите скорость точки при $t=4$.

Решение. Скорость точки в момент времени t равна $x'(t)=5+e^{4-t}$. При $t=4$ получаем:

$$x'(4)=5+e^{4-4}=5+e^0=5+1=6.$$

Ответ: 6.

B14

Вычислите: $(11{,}2\sqrt[3]{64\sqrt{8}}-3{,}2\sqrt{8\sqrt[3]{64}})^{\frac{6}{11}}$.

Решение. Применяя формулы $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$, последовательно получаем:

$$(11{,}2\sqrt[3]{64\sqrt{8}}-3{,}2\sqrt{8\sqrt[3]{64}})^{\frac{6}{11}}=(11{,}2(8^2\cdot8^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}-3{,}2\cdot(8\cdot8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{6}{11}}=$$

$$=(11{,}2\cdot8^{\left(2+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}}-3{,}2\cdot8^{\left(1+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}})^{\frac{6}{11}}=(11{,}2\cdot8^{\frac{5}{6}}-3{,}2\cdot8^{\frac{5}{6}})^{\frac{6}{11}}=(8\cdot8^{\frac{5}{6}})^{\frac{6}{11}}=(8^{\frac{11}{6}})^{\frac{6}{11}}=8.$$

Ответ: 8.

B15

Найдите значение функции $y=\sqrt{3}\sin2t+\sin\left(\frac{17\pi}{2}-t\right)$ в точке $t=\frac{19\pi}{3}$.

Решение. Поскольку

$$\sin\left(\frac{17\pi}{2}-t\right)=\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t,$$

имеем:

$$y=\sqrt{3}\sin2t+\cos t.$$

Тогда

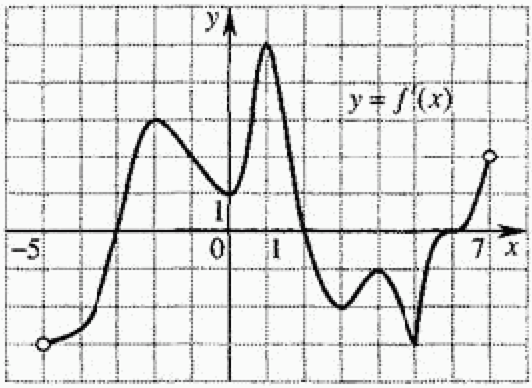
$$y\left(\frac{19\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\frac{38\pi}{3}+\cos\frac{19\pi}{3}=\sqrt{3}\sin\left(12\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=2.$$

Ответ: 2.

B16

Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-5;\ 7)$. График ее производной изображен на рисунке. Найдите промежутки убывания функции $y=f(x)$. В ответе укажите наибольшую из длин этих промежутков.



Решение. Интервалы убывания функции $f(x)$ совпадают с интервалами, на которых ее производная отрицательна. Производная отрицательна на интервалах $(-5;\ -3)$ и $(2;\ 6)$, длины которых соответственно равны 2 и 4. Наибольшая длина — 4.

Ответ: 4.

B17

Найдите наибольший корень уравнения $(3^{2{,}5-2x^2}-\sqrt{3})\cdot\log_5(3-10x)=0$.

Решение. Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, а остальные при этом определены. Так как множитель $3^{2{,}5-2x^2}-\sqrt{3}$ определен при любых значениях x, имеем:

а) $\log_5(3-10x)=0 \Leftrightarrow\ 3-10x=1\ \Leftrightarrow\ x=0{,}2;$

б) $\begin{cases}3^{2{,}5-2x^2}-\sqrt{3}=0\\3-10x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{2{,}5-2x^2}=3^{0{,}5}\\x<0{,}3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2{,}5-2x^2=0{,}5\\x<0{,}3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=1\\x<0{,}3\end{cases}\Leftrightarrow\ x=-1.$

Больший корень исходного уравнения — число 0,2.

Ответ: 0,2.

B18

Найдите значение функции $y(x)=\dfrac{g(x)+f(-x)+2g(-x)}{5f(x)}$ в точке x_0, если известно, что функция $y=f(x)$ четная, функция $y=g(x)$ нечетная, $f(x_0)=1$, $g(x_0)=-3$.

Решение. В силу четности $y=f(x)$ имеем: $f(-x_0)=f(x_0)=1$. В силу нечетности $y=g(x)$ имеем: $g(-x_0)=-g(x_0)=3$. Тогда

$$y(x_0)=\frac{g(x_0)+f(-x_0)+2g(-x_0)}{5f(x_0)}=\frac{-3+1+2\cdot 3}{5\cdot 1}=\frac{4}{5}=0{,}8.$$

Ответ: 0,8.

B19

Двум сотрудникам издательства поручили отредактировать рукопись объемом 560 страниц. Один сотрудник, отдав второму 80 страниц рукописи, взял остальные себе. Второй выполнил свою работу за время в 8 раз меньшее, чем первый свою. Сколько страниц рукописи первый сотрудник должен был сразу отдать второму (взяв себе остальные), чтобы они, работая с прежней производительностью, выполнили свою работу за одинаковое время?

Решение (I способ). Если второй сотрудник выполнил свою работу за x дней, то он редактировал по $\dfrac{80}{x}$ страниц в день, а первый — по $\dfrac{560-80}{8x}=\dfrac{60}{x}$ страниц в день. Поэтому первому сотруднику нужно было разделить 560 страниц в отношении $\dfrac{60}{x}:\dfrac{80}{x}=3:4$ и отдать из них четыре части, т. е. $560\cdot\dfrac{4}{3+4}=320$ страниц, второму сотруднику.

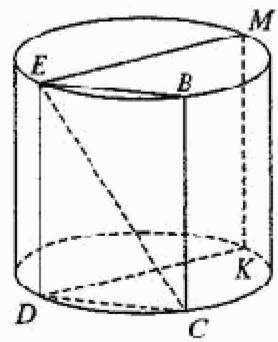
Решение (II способ). Второй сотрудник редактировал 80 страниц рукописи за время в восемь раз меньшее, чем первый 480 страниц рукописи. Если бы они работали с одной скоростью, то за время в восемь раз меньшее он должен был бы отредактировать 60 страниц. Значит, он работает со скоростью $\dfrac{80}{60}=\dfrac{4}{3}$ скорости первого работника, и для того чтобы они закончили одновременно, работа должны быть разделена между ними в отношении 4:3. Таким образом, первый сотрудник должен отдать второму $\dfrac{4}{7}\cdot 560=320$ страниц.

Ответ: 320.

B20

Через образующую BC цилиндра проведено сечение $BCDE$. Объем цилиндра равен 1440π, $BE=8$, тангенс угла между прямой CE и плоскостью основания равен 1,25. Найдите площадь осевого сечения.

Решение.



1. Имеем: $DE\perp CD$, EC — наклонная, CD — ее проекция на плоскость основания, угол ECD — угол между прямой CE и плоскостью основания. Тогда, учитывая $CD=BE=8$, из прямоугольного треугольника ECD находим: $DE=CD\cdot\operatorname{tg}\angle ECD=8\cdot 1{,}25=10$.

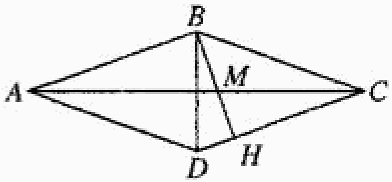
2. Поскольку $V_{цил.}=1440\pi$ и $V_{цил.}=\pi R^2H$, имеем: $\pi R^2\cdot ED=1440\pi$, откуда $R=12$.

3. Пусть $EDKM$ — осевое сечение цилиндра. Поскольку $EDKM$ — прямоугольник и $EM=2R=24$, имеем: $S_{EDKM}=DE\cdot EM=10\cdot 24=240$.

Ответ: 240.

B21

Дан ромб $ABCD$ с острым углом A. Высота BH, проведенная к стороне CD, пересекает диагональ AC в точке M. Найдите площадь треугольника CMH, если высота ромба равна 8, а площадь ромба равна 80.



Решение.

1. Найдем сторону ромба: $S_{ромба} = DC \cdot BH$, откуда $80 = DC \cdot 8$, $DC = 10$.

2. Из прямоугольного треугольника BCH находим: $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{100-64} = 6$.

3. В треугольнике BCH отрезок CM — биссектриса. Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{MH}{BM} = \frac{CH}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \text{ откуда } \frac{MH}{BH} = \frac{3}{8}.$$

4. Отрезок CH — общая высота треугольников CMH и CBH, следовательно, отношение площадей этих треугольников равно отношению их оснований MH и BH:

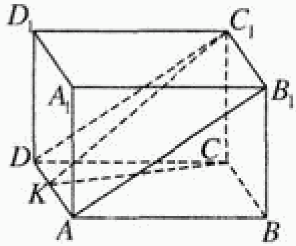
$$\frac{S_{CMH}}{S_{CBH}} = \frac{MH}{BH} = \frac{3}{8}, \text{ откуда } S_{CMH} = \frac{3}{8} S_{BCH} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot CH \cdot BH = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 9.$$

Ответ: 9.

B22

Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = 4$, $\angle ABC = 30°$. Высота призмы равна 3. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью ADC_1.

Решение. Построим высоту CK параллелограмма $ABCD$ и соединим отрезком точки C_1 и K (см. рис.). Поскольку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, $C_1C \perp (ABC)$. Значит, CK — проекция наклонной C_1K на плоскость ABC, и на основании теоремы о трех перпендикулярах $C_1K \perp AD$. Следовательно, угол C_1KC — линейный угол двугранного угла C_1ADC. Основание данной призмы — параллелограмм $ABCD$, откуда на основании свойств параллелограмма $CD = AB$, $\angle CDA = \angle ABC$.



Далее находим:

1) из прямоугольного треугольника CDK: $CK = CD \sin \hat{D} = 4 \cdot \sin 30° = 2$;

2) из прямоугольного треугольника C_1KC: $\operatorname{tg} \hat{K} = \frac{C_1C}{CK} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.