

# Методические материалы для подготовки к ЕГЭ по математике для тех, кто ее не знает и не любит



М.: МастерВУЗ, 2011

Что делать, если Вы – гуманитарий? Если математика дается Вам с трудом, и Вы ее не любите, зато Вам нравится что-то другое – например, иностранные языки. Если Вы точно знаете, что в Вашей будущей профессии Вам не пригодятся ни логарифмы, ни таблица производных, и Вам просто надо сдать ЕГЭ по математике, чтобы получить аттестат. Да к тому же хочется сэкономить время и деньги, которые так необходимы для подготовки по другим предметам.

К сожалению, подготовка к ЕГЭ в школе и на курсах на Вас не рассчитана. Учительница в классе или лектор на курсах ориентируются на некий средний уровень. Никто Вам не будет персонально объяснять, как решать текстовые задачи или считать площадь геометрических фигур.

Представленная информация поможет Вам подготовиться за минимальное время и сдать ЕГЭ по математике.

Авторы материала – профессиональные репетиторы-математики с двадцатилетним опытом подготовки в вузы.

Для тех, кто хочет просто сдать ЕГЭ, самостоятельно, бесплатно и без репетитора.

По официальным данным ФИПИ, количество учеников, получивших на ЕГЭ по математике неудовлетворительную оценку, в 2006 году составляло 19,4 процента от общего числа сдававших экзамен, а в 2008 году – уже 23 процента.

Конечно, если Вы поступаете в серьезный технический или экономический вуз, Вам необходима серьезная математическая подготовка. Для тех же, кто хочет просто сдать ЕГЭ, самостоятельно, бесплатно и без репетитора — практическое руководство по решению задач В1, В2, В5 и В12. Их уже достаточно, чтобы сдать ЕГЭ по математике на положительный балл.

В статьях, посвященных ЕГЭ по математике, преобладают общие слова: решайте как можно больше задач, будьте уверены в себе, полюбите математику, потому что она ум в порядок приводит... В отличие от этих «добрых советов», в этой статье вы получите конкретные рекомендации: что делать, как и в каком порядке.

### **Итак, внимание.**

**Для того чтобы просто сдать ЕГЭ и получить аттестат, в 2010 году достаточно было получить 21 балл. Это означает — решить три задачи из части В. А уж если вы решили пять задач — аттестат у вас в кармане.**

Здравый смысл подсказывает, что сначала надо выбрать три самые легкие. Это В1, В2 и В5. Обо всех нюансах их решения мы вам расскажем. А дальше — задачи В12 и В6. Они выбраны не случайно. Мы объясним, почему лучше всего заняться именно этими задачами, и главное — как с ними справиться.

Для решения этих задач не надо обладать математическими способностями. Важно знать секреты, которые, как правило, ученику рассказывает репетитор.

Все задачи, приведенные в этой статье, взяты из Банка заданий ФИПИ. Подобраны они так, чтобы представить все возможные типы заданий с таким номером.

Начинаем с простейшей задачи В1, которую осилит и второклассник:

*1. Теплоход рассчитан на 750 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?*

Правильный ответ: 12 шлюпок. Делим 775 на 70, получаем 11 и 5 в остатке. Значит, одиннадцать шлюпок будут полностью загружены пассажирами, а в двенадцатой будет сидеть пять человек. И даже если бы там было два человека или один, все равно ответ — 12 шлюпок. Ответ «одиннадцать, а остальные как-нибудь доплывут» — не принимается, это не кино про «Титаник».

Во многих задачах В1 используется понятие — процент.

Вспомним, что **1 %** — это одна сотая часть от чего-либо.

Что такое дробь (то есть часть) от числа? Когда мы говорим «одна четверть от  $x$ » — это значит, что дробь  $\frac{1}{4}$  умножается на величину  $x$ . «2 % от 60 минут» означают, что  $\frac{2}{100}$  надо умножить на 60.

**Чтобы найти дробь (или часть) от числа, надо дробь умножить на это число.**

Итак,

$$10 \% = \frac{10}{100} = 0,1$$

от какой-либо величины;

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4};$$

$$60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5};$$

$$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}.$$

В задачах (да и в жизни) часто говорится об изменении какой-либо величины на определенный процент. Что это значит?

Повышение цены на 10% означает, что к прежней цене  $x$  прибавили  $0,1x$ . Наоборот, скидка на 25% означает, что прежняя цена уменьшилась на 25%. Если первоначальная цена равна  $x$ , то новая цена составит

$$x - 0,25x = 0,75x.$$

2. Шариковая ручка стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 900 рублей после повышения цены на 10%?

Очевидно, что 10% от 40 — это

$$\frac{10}{100} \cdot 40 = 0,1 \cdot 40 = 4.$$

Новая цена ручки составит 44 рубля. На 900 рублей можно купить 22 ручки.

Легко? Да, очень легко. Однако не будем преждевременно расслабляться. Даже среди детских задач под номером В1 встречаются интересные экземпляры.

Вот, например, задача В1, с которой справляются далеко не все выпускники:

3. Цена на электрический чайник была повышена на 16% и составила 3480 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Запомним важное правило: **за 100% принимается та величина, с которой мы сравниваем.** Цена была повышена на 16% по сравнению с чем? — с прежней ценой. Значит, прежняя цена — это 100%, новая цена — 116%. Составляем пропорцию:

$$\frac{100\%}{116\%} = \frac{x}{3480 \text{ рублей}}$$

Решаем пропорцию. Получаем, что

$$x = \frac{3480 \cdot 100}{116}.$$

Напомним, что пропорция — это равенство вида

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Основное правило пропорции: произведение крайних членов равно произведению средних, то есть  $a \cdot d = b \cdot c$ .

Если какая-либо величина в пропорции неизвестна, ее можно найти именно по этому правилу.

Например, из пропорции

$$\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$$

находим  $x$ :

$$a \cdot d = x \cdot c$$

$$x = \frac{a \cdot d}{c}$$

Еще одна задача на проценты. Обратите на нее внимание — она не так проста, как может показаться на первый взгляд.

4. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Марья Константиновна

получила 9570 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марьи Константиновны?

Итак, Марья Константиновна получила 9570 рублей после удержания налога. Следовательно, 13 % у нее уже удержали, а выдали ей 87 % ее заработной платы. Составляем пропорцию:

$$\frac{9570 \text{ рублей}}{x \text{ рублей}} = \frac{87 \%}{100 \%}$$

Решаем пропорцию:

$$x = \frac{9570 \cdot 100}{87}$$

Получаем, что зарплата Марьи Константиновны составляет одиннадцать тысяч рублей. Возможно, эта печальная история о бедной женщине поможет вам выбрать себе правильное будущее :-)

Следующая задача — самая сложная из тех, которые могут вам встретиться под номером В1.

5. В городе N живет 200000 жителей. Среди них 15 % детей и подростков. Среди взрослых 45 % не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых жителей работает?

В чем сложность этой задачи и почему ее редко решают правильно? Дело в том, что «15 процентов» или «45 процентов» — величины относительные. Каждый раз за сто процентов могут приниматься разные величины. Помните правило: за сто процентов принимается в каждом случае то, с чем мы сравниваем.

Итак, дети и подростки составляют 15 % от 200000 жителей.

Значит, их число — это 15 % от 200000, то есть  $\frac{15}{100}$  надо умножить на 200000. Получим, что городе N 30000 детей и подростков. Следовательно, взрослых 170000.

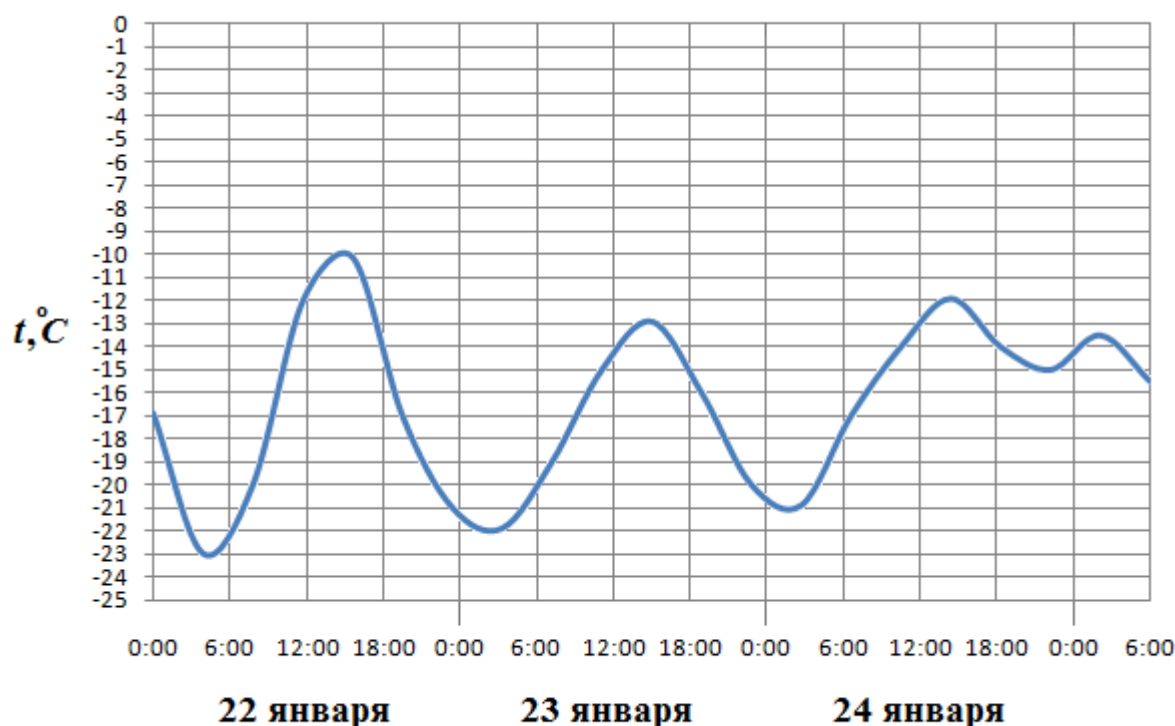
Среди взрослых 45% не работает. Теперь за 100% мы принимаем число взрослых. Получается, что число работающих взрослых жителей равно 55% от 170000, то есть 93500.

Ответ: 93500.

## Задача В2: чтение графика функции

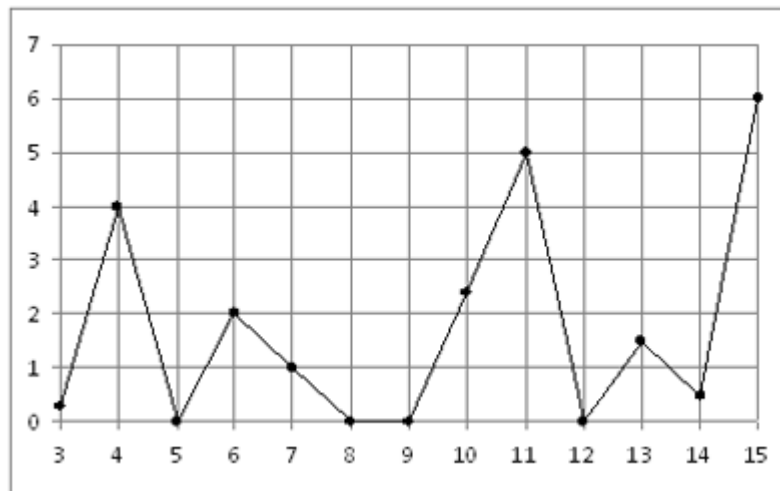
Задачу В2 решают все! Она очень проста — надо посмотреть на график и ответить на вопрос. Просто будьте внимательны.

6. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 23 января.



Помня, что сутки начинаются в 0:00 и заканчиваются в 24:00, отмечаем на графике начало и конец нужных суток и записываем ответ: -13.

7. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода не выпадало осадков.

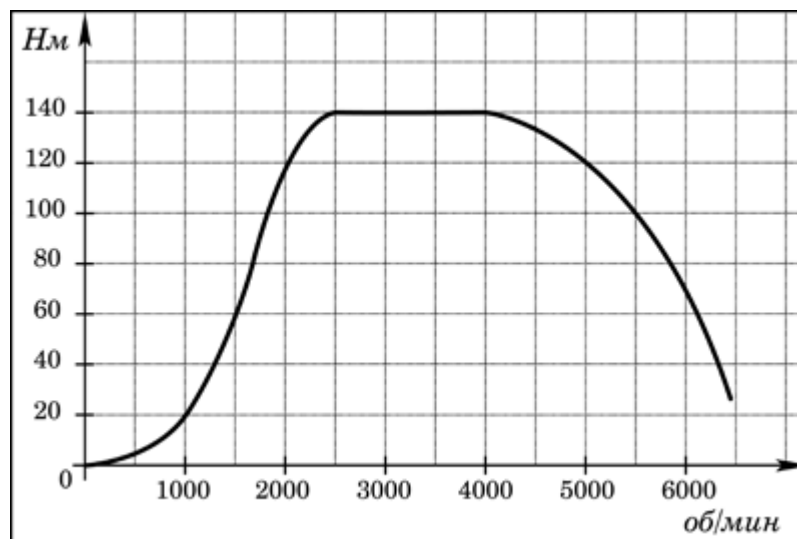


Здесь тоже все понятно. Не выпадало осадков — значит, их количество было равно нулю. Находим такие точки на графике.

Ответ: 4.

8. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Нм. Скорость автомобиля (в км/ч) приближенно выражается формулой  $v = 0,036 n$ , где  $n$  — число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться водитель, чтобы крутящий момент был не меньше 120? Ответ дайте в километрах в час.



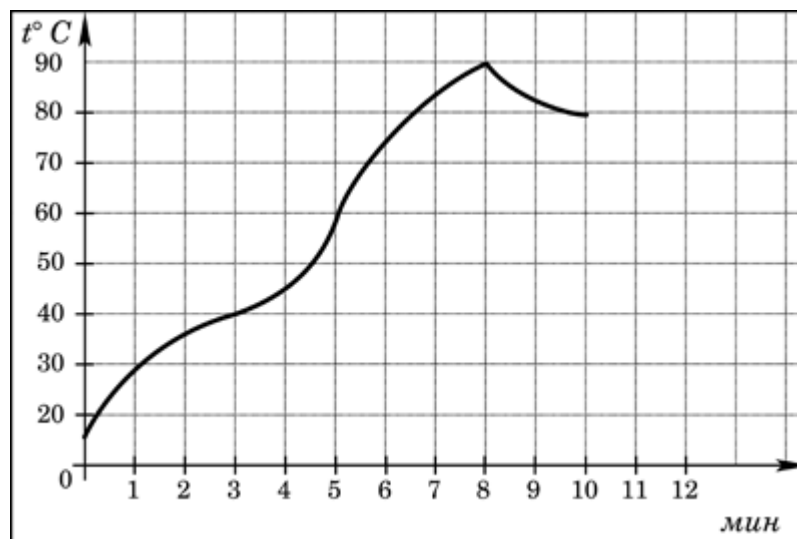


Если даже вы не знаете, что такое крутящий момент двигателя — не переживайте. Чем бы он ни был, его зависимость от числа оборотов в минуту изображена на графике. Крутящий момент должен быть не меньше (то есть больше или равен) 120. Минимальное значение числа оборотов в минуту, при котором это происходит, равно 2000.

А скорость равна  $0,036 \cdot 2000 = 72$  км/ч.

Ответ: 72.

9. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля при температуре окружающего воздуха  $10^\circ\text{C}$ . На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, включается вентилятор, охлаждающий двигатель, и температура начинает понижаться. Определите по графику, сколько минут прошло от момента запуска двигателя до включения вентилятора?



Внимательно читаем условие. Когда включили вентилятор, температура двигателя начала понижаться. То есть до этого момента температура росла. Значит, нам нужна самая высокая точка на графике. Достигается она на восьмой минуте.

Ответ: 8

Ну что ж, с задачей В2 все понятно. Следующую задачу вы тоже наверняка решите.

### Задача В5: простая логика и умение считать без калькулятора

Задача В5 очень проста. В ней нет ничего, кроме элементарных арифметических действий.

10. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяженностью 500 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант? Цена дизельного топлива — 19 рублей за литр, бензина — 22 рублей за литр, газа — 14 рублей за литр.

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л. на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	7	3700
Б	Бензин	10	3200
Г	Газ	14	3200

Очевидно, надо посчитать расход топлива для каждого автомобиля и прибавить стоимость аренды.

Для автомобиля А получим:  $7 \cdot 5 \cdot 19 + 3700 = 4365$  рублей,

Для автомобиля Б:  $10 \cdot 5 \cdot 22 + 3200 = 4300$  рублей,

и для автомобиля В:  $14 \cdot 5 \cdot 14 + 3200 = 4180$  рублей.

Ответ: 4180.

Еще одна задача В5:

*11. В таблице даны условия банковского вклада в трех различных банках. Предполагается, что клиент кладет на счет 30000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в конце года (в рублях).*

Банк	Обслуживание счета*	Процентная ставка (% годовых)**
А	40 руб./год	2,1
Б	5 руб./месяц	2,4
В	Бесплатно	1

\*В начале года или месяца со счета снимается указанная сумма в уплату за ведение счета.

\*\*В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

Обратите внимание, что плата за обслуживание счета взимается в начале месяца или года — то есть прежде, чем начисляются проценты.

Для банка А получаем:

$$30000 - 40 = 29960$$

$$29960 + \left( \frac{2,1}{100} \cdot 29960 \right) = 30589,16 \text{ рублей,}$$

Для банка Б:

$$30000 - 5 \cdot 12 = 29940$$

$$29940 + \left( \frac{2,4}{100} \cdot 29940 \right) = 30658,56 \text{ рублей,}$$

Для банка В:

$$30000 + \left( \frac{1}{100} \cdot 30000 \right) = 30300 \text{ рублей,}$$

Ответ: 30658,56.

Итак, с задачами В1, В2 и В5 любой школьник справится самостоятельно, без всяких курсов и репетиторов. Да, мы прекрасно понимаем, что вы не любите математику. Но сдать ЕГЭ надо, поэтому минимальные усилия все же придется затратить. Цель вашей тренировки – решать любые задания В1, В2 и В5 правильно, то есть без вычислительных ошибок.

Несколько слов о том, как записывать ответ в бланки ЕГЭ. Для ответов в части В выделены специальные клеточки. В каждую клеточку надо написать один символ (цифру, знак или десятичную запятую). Это значит, что ответ должен быть целым числом или конечной десятичной дробью. Поэтому, если в задании из части В вы получили в ответе  $\frac{2}{3}$ , или  $\sqrt{2}$ , или  $2x$  — ответ явно неправильный и вам придется проверить решение.

Следующее простое задание в вариантах ЕГЭ — это текстовая задача В12. Большинство абитуриентов не умеют решать такие задачи и даже не знают, насколько они просты. Между тем задача В12 — это ваш шанс с легкостью получить еще один балл на ЕГЭ по математике.

## Текстовая задача В12 — легко! Алгоритм решения и успех на ЕГЭ

Почему текстовые задачи В12 относятся к простым? Во-первых, все задачи В12 из банка заданий ФИПИ решаются по единому алгоритму, о котором мы вам расскажем. Во-вторых, все В12 однотипны — это задачи на движение или на работу. Главное — знать к ним подход.

**Внимание! Чтобы научиться решать текстовые задачи, вам понадобится всего три-четыре часа самостоятельной работы, то есть два-три занятия.** Всё, что нужно, — это здравый смысл плюс умение решать квадратное уравнение. А если даже вы забыли формулу для дискриминанта — не беда, напомним.

Но прежде чем перейти к самим задачам — проверьте себя.

Запишите в виде математического выражения:

1.  $x$  на 5 больше  $y$
2.  $x$  в пять раз больше  $y$

3.  $z$  на 8 меньше, чем  $x$
4.  $z$  меньше  $x$  в 3,5 раза
5.  $t_1$  на 1 меньше, чем  $t_2$
6. частное от деления  $a$  на  $b$  в полтора раза больше  $b$
7. квадрат суммы  $x$  и  $y$  равен 7
8.  $x$  составляет 60 процентов от  $y$
9.  $m$  больше  $n$  на 15 процентов

Пока не напишете — в ответы не подглядывайте! :-)

Казалось бы, на первые три вопроса ответит и второклассник. Но почему-то у половины выпускников они вызывают затруднения, не говоря уже о вопросах 7 и 8. Из года в год мы, репетиторы, наблюдаем парадоксальную картину: ученики одиннадцатого класса долго думают, как записать, что « $x$  на 5 больше  $y$ ». А в школе в этот момент они «проходят» первообразные и интегралы :-)

Итак, правильные ответы:

1.  $x = y + 5$

$x$  больше, чем  $y$ . Разница между ними равна пяти. Значит, чтобы получить бóльшую величину, надо к меньшей прибавить разницу.

2.  $x = 5y$

$x$  больше, чем  $y$ , в пять раз. Значит, если  $y$  умножить на 5, получим  $x$ .

3.  $z = x - 8$

$z$  меньше, чем  $x$ . Разница между ними равна 8. Чтобы получить меньшую величину, надо из большей вычесть разницу.

4.  $z = x : 3,5$

$$5. t_1 = t_2 - 1$$

$t_1$  меньше, чем  $t_2$ . Значит, если из большей величины вычтем разницу, получим меньшую.

$$6. a:b = 1,5b$$

$$7. (x+y)^2 = 7$$

На всякий случай повторим терминологию:

Сумма — результат сложения двух или нескольких слагаемых.

Разность — результат вычитания.

Произведение — результат умножения двух или нескольких множителей.

Частное — результат деления чисел.

$$8. x = 0,6y$$

Мы помним, что

$$60\% y = \frac{60}{100} \cdot y = 0,6y$$

$$9. m = 1,15n$$

Если  $n$  принять за 100%, то  $m$  на 15 процентов больше, то есть  $m = 115\% n = 1,15n$ .

Теперь — сами задания В12.

Начнем мы с задач на движение. Они часто встречаются в вариантах ЕГЭ. Здесь всего два правила:

1. Все эти задачи решаются по одной-единственной формуле:

$$S = v \cdot t,$$

то есть

*расстояние = скорость • время.*

Из этой формулы можно выразить скорость

$$v = \frac{S}{t}$$

или время

$$t = \frac{S}{v}.$$

2. В качестве переменной  $x$  удобнее всего выбирать скорость. Тогда задача точно решится!

Для начала очень внимательно читаем условие. В нем все уже есть. Помним, что текстовые задачи на самом деле очень просты.

*12. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 4 часа позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.*

Что здесь лучше всего обозначить за  $x$ ? Скорость велосипедиста. Тем более, что ее и надо найти в этой задаче. Автомобилист проезжает на 40 километров больше, значит, его скорость равна  $x + 40$ .

Нарисуем таблицу. В нее сразу можно внести расстояние — и велосипедист, и автомобилист проехали по 50 км. Можно внести скорость — она равна  $x$  и  $x + 40$  для велосипедиста и автомобилиста соответственно. Осталось заполнить графу «время».

Его мы найдем по формуле:



$$t = \frac{S}{v}.$$

Для велосипедиста получим

$$t_1 = \frac{50}{x},$$

для автомобилиста

$$t_2 = \frac{50}{x+40}.$$

Эти данные тоже запишем в таблицу. Вот что получится:

	v	t	S
велосипедист	$x$	$t_1 = \frac{50}{x}$	50
автомобилист	$x+40$	$t_2 = \frac{50}{x+40}$	50

Остается записать, что велосипедист прибыл в конечный пункт на 4 часа позже автомобилиста. Позже — значит, времени он затратил больше. Это значит, что  $t_1$  на четыре больше, чем  $t_2$ , то есть

$$t_2 + 4 = t_1$$

$$\frac{50}{x+40} + 4 = \frac{50}{x}$$

Решаем уравнение.

$$\frac{50}{x} - \frac{50}{x+40} = 4$$

Приведем дроби в левой части к одному знаменателю.

Первую дробь домножим на  $x+4$ , вторую — на  $x$ .

Если вы не знаете, как приводить дроби к общему знаменателю (или — как раскрывать скобки, как решать уравнение...), подойдите с этим конкретным вопросом к вашему учителю математики и попросите объяснить. Бесполезно говорить учительнице: «Я не понимаю математику» — это слишком абстрактно и не располагает к ответу. Учительница может ответить, например, что она вам сочувствует. Или, наоборот, даст какую-либо характеристику вашей личности. И то и другое неконструктивно. А вот если вы зададите конкретный вопрос: «Как приводить дроби к одному знаменателю» или «Как раскрывать скобки» — вы получите нужный вам конкретный ответ. Вам ведь необходимо в этом разобраться! Если педагог занят, договоритесь о времени, когда вы можете с ним (или с ней) встретиться, чтобы получить консультацию. Используйте ресурсы, которые у вас под рукой!

Получим:

$$\frac{50(x+40) - 50x}{x(x+40)} = 4$$

$$\frac{50x + 2000 - 50x}{x(x+40)} = 4$$

$$\frac{2000}{x(x+40)} = 4$$

Разделим обе части нашего уравнения на 4. В результате уравнение станет проще. Но почему-то многие учащиеся забывают это делать, и в результате получают сложные уравнения и шестизначные числа в качестве дискриминанта.

$$\frac{500}{x(x+40)} = 1$$

Умножим обе части уравнения на  $x(x+40)$ . Получим:

$$x(x+40) = 500$$

Раскроем скобки и перенесем всё в левую часть уравнения:

$$x^2 + 40x = 500$$

$$x^2 + 40x - 500 = 0$$

Мы получили квадратное уравнение. Напомним, что квадратным называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Решается оно стандартно — сначала находим дискриминант по формуле

$$D = b^2 - 4ac,$$

затем корни по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

В нашем уравнении  $a = 1$ ,  $b = 40$ ,  $c = -500$ .

Найдем дискриминант  $D = 1600 + 2000 = 3600$  и корни:

$$x_1 = 10, x_2 = -50.$$

Ясно, что  $x_2$  не подходит по смыслу задачи — скорость велосипедиста не должна быть отрицательной.

Ответ: 10.

Следующая задача — тоже про велосипедиста.

13. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Пусть скорость велосипедиста на пути из А в В равна  $x$ . Тогда его скорость на обратном пути равна  $x+3$ . Расстояние в обеих строчках таблицы пишем одинаковое — 70 километров. Осталось записать время. Поскольку

$$t = \frac{S}{v},$$

на путь из А в В велосипедист затратит время

$$t_1 = \frac{70}{x},$$

а на обратный путь время

$$t_2 = \frac{70}{x+3}.$$

	v	t	S
туда	x	$t_1 = \frac{70}{x}$	70
обратно	$x+3$	$t_2 = \frac{70}{x+3}$	70

На обратном пути велосипедист сделал остановку на 3 часа и в результате затратил столько же времени, сколько на пути из А в В. Это значит, что на обратном пути он крутил педали на 3 часа меньше.

Значит,  $t_2$  на три меньше, чем  $t_1$ . Получается уравнение:

$$\frac{70}{x+3} + 3 = \frac{70}{x}$$

Оно очень похоже на предыдущее. Сгруппируем слагаемые:

$$\frac{70}{x} - \frac{70}{x+3} = 3$$

Точно так же приводим дроби к одному знаменателю:

$$\frac{70(x+3) - 70x}{x(x+3)} = 3$$

$$\frac{70 \cdot 3}{x(x+3)} = 3$$

Разделим обе части уравнения на 3.

$$\frac{70}{x(x+3)} = 1$$

Напомним — если вам непонятны какие-либо действия при решении уравнений, обращайтесь к учительнице! Показывайте конкретную строчку в решении задачи и говорите: «Пожалуйста, объясните, как это делать». Для нее такое объяснение — дело пятнадцати минут, а вы наконец научитесь решать уравнения, что очень важно для сдачи ЕГЭ по математике.

Умножим обе части уравнения на  $x(x+3)$ , раскроем скобки и соберем все в левой части.

$$x^2 + 3x - 70 = 0$$

Находим дискриминант. Он равен  $9 + 4 \cdot 70 = 289$ .

Найдем корни уравнения:

$x_1 = 7$ . Это вполне правдоподобная скорость велосипедиста. А ответ  $x_2 = -10$  не подходит, так как скорость велосипедиста должна быть положительна.

Ответ: 7.

Следующий тип задач — когда что-нибудь плавает по речке, в которой есть течение. Например, теплоход, катер или моторная лодка. Обычно в условии говорится о собственной скорости плавучей посудыны и скорости течения.

Собственной скоростью называется скорость в неподвижной воде.

При движении по течению эти скорости складываются. Течение помогает, по течению плыть — быстрее.

Скорость при движении по течению равна сумме собственной скорости судна и скорости течения.

А если двигаться против течения? Течение будет мешать, относить назад. Теперь скорость течения будет вычитаться из собственной скорости судна.

*14. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.*

Обозначим скорость лодки в неподвижной воде как  $x$ .

Тогда скорость движения моторки по течению равна  $x + 1$ , а скорость, с которой она движется против течения  $x - 1$ .

Расстояние и в ту, и в другую сторону одинаково и равно 255 км.

Занесем скорость и расстояние в таблицу.

Заполняем графу «время». Мы уже знаем, как это делать. При движении по течению

$$t_1 = \frac{255}{x+1},$$

при движении против течения

$$t_2 = \frac{255}{x-1},$$

причем  $t_2$  на два часа больше, чем  $t_1$ .

	v	t	S
по течению	$x + 1$	$t_1 = \frac{255}{x+1}$	255
против течения	$x - 1$	$t_2 = \frac{255}{x-1}$	255

Условие « $t_2$  на два часа меньше, чем  $t_1$ » можно записать в виде

$$t_2 - 2 = t_1$$

Составляем уравнение:

$$\frac{255}{x-1} - 2 = \frac{255}{x+1}$$

и решаем его.

$$\frac{255}{x-1} - \frac{255}{x+1} = 2$$

Приводим дроби в левой части к одному знаменателю

$$\frac{255(x+1) - 255(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 2$$

Раскрываем скобки

$$\frac{510}{x^2-1} = 2$$

Делим обе части на 2, чтобы упростить уравнение

$$\frac{255}{x^2-1} = 1$$

Умножаем обе части уравнения на  $x^2 - 1$

$$x^2 - 1 = 255$$

$$x^2 = 256.$$

Вообще-то это уравнение имеет два корня:  $x_1 = 16$  и  $x_2 = -16$  (оба этих числа при возведении в квадрат дают 256). Но конечно же, отрицательный ответ не подходит — скорость лодки должна быть положительной.

Ответ: 16.

15. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Обозначим за  $x$  скорость течения. Тогда скорость движения теплохода по течению равна  $15 + x$ , скорость его движения против течения равна  $15 - x$ . Расстояния — и туда, и обратно — равны 200 км.

Теперь графа «время».

Поскольку  $t = \frac{S}{v}$ , время  $t_1$  движения теплохода по течению равно  $\frac{200}{15+x}$ , а время  $t_2$ , которое теплоход затратил на движение против течения, равно  $\frac{200}{15-x}$ .

	$v$	$t$	$S$
по течению	$x + 15$	$\frac{200}{15+x}$	200
против течения	$x - 15$	$\frac{200}{15-x}$	200



В пункт отправления теплоход вернулся через 40 часов после отплытия из него. Стоянка длилась 10 часов, следовательно, 30 часов теплоход плыл — сначала по течению, затем против.

Значит,  $t_1 + t_2 = 30$

$$\frac{200}{15+x} + \frac{200}{15-x} = 30$$

Прежде всего разделим обе части уравнения на 10. Оно станет проще!

$$\frac{20}{15+x} + \frac{20}{15-x} = 3$$

Мы не будем подробно останавливаться на технике решения уравнения. Всё уже понятно — приводим дроби в левой части к одному знаменателю, умножаем обе части уравнения на  $225 - x^2$ , получаем квадратное уравнение  $x^2 = 25$ . Поскольку скорость течения положительна, получаем:  $x = 5$ .

Ответ: 5.

Наверное, вы уже заметили, насколько похожи все эти задачи. Текстовые задачи хороши еще и тем, что ответ легко проверить с точки зрения здравого смысла. Ясно, что если вы получили скорость течения, равную 300 километров в час — задача решена неверно.

*16. Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.*

Пусть скорость течения равна  $x$ . Тогда по течению баржа плывет со скоростью  $7 + x$ , а против течения со скоростью  $7 - x$ .

.

Сколько времени баржа плыла? Ясно, что надо из 16 вычесть 10, а затем вычесть время стоянки. Обратите внимание, что 1 час 20 минут придется перевести в часы:

$$1 \text{ час } 20 \text{ минут} = 1\frac{1}{3} \text{ часа.}$$

Получаем, что суммарное время движения баржи (по течению и против) равно  $4\frac{2}{3}$  часа.

	v	t	S
по течению	$x + 7$	$t_1$	15
против течения	$x - 7$	$t_2$	15

$$t_1 + t_2 = 4\frac{2}{3}$$

Возникает вопрос — какой из пунктов, А или В, расположен выше по течению? А этого мы никогда не узнаем! :-) Да и какая разница — ведь в уравнение входит сумма  $t_1 + t_2$ , равная

$$\frac{15}{7+x} + \frac{15}{7-x}.$$

Итак,

$$\frac{15}{7+x} + \frac{15}{7-x} = 4\frac{2}{3}$$

Решим это уравнение. Число  $4\frac{2}{3}$  в правой части представим в виде неправильной дроби:  $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ .

Приведем дроби в левой части к общему знаменателю, раскроем скобки и упростим уравнение. Получим:

$$30 \cdot 7 = \frac{14}{3} \cdot (49 - x^2)$$

Работать с дробными коэффициентами неудобно! Если мы разделим обе части уравнения на 14 и умножим на 3, оно станет значительно проще:

$$45 = 49 - x^2$$

$$x^2 = 4$$

Поскольку скорость течения положительна,  $x = 2$ .

Ответ: 2.

Еще один тип задач В12, встречающийся в вариантах ЕГЭ по математике — это задачи на работу.

Задачи на работу также решаются с помощью одной-единственной формулы:

$$A = p \cdot t.$$

Здесь  $A$  — работа,  $t$  — время, а величина  $p$ , которая по смыслу является скоростью работы, носит специальное название — **производительность**. Она показывает, **сколько работы сделано в единицу времени**. Например, продавец в супермаркете надувает воздушные шарик. Количество шариков, которые он надует за час — это и есть его производительность.

Правила решения задач на работу очень просты.

1.  $A = p \cdot t$ ,

то есть

$$\text{работа} = \text{производительность} \cdot \text{время}.$$

Из этой формулы легко найти  $t$  или  $p$ .

2. Если объем работы не важен в задаче и нет никаких данных, позволяющих его найти — работа принимается за единицу. Построен дом (один). Написана книга (одна). А вот если речь идет о количестве кирпичей, страниц или

построенных домов — работа как раз и равна этому количеству.

3. Если трудятся двое рабочих (два экскаватора, два завода...) — их производительности складываются. Очень логичное правило.

4. В качестве неизвестной  $x$  удобно взять именно производительность.

Покажем, как все это применяется на практике.

*17. Заказ на 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?*

Так же, как и в задачах на движение, заполним таблицу.

В колонке «работа» и для первого, и для второго рабочего запишем: 110. В задаче спрашивается, сколько деталей в час делает второй рабочий, то есть какова его производительность. Примем ее за  $x$ . Тогда производительность первого рабочего равна  $x+1$  (он делает на одну деталь в час больше). Поскольку

$$t = \frac{A}{p},$$

время работы первого рабочего равно

$$t_1 = \frac{110}{x+1},$$

время работы второго равно

$$t_2 = \frac{110}{x}.$$

	$p$	$t$	$A$
первый рабочий	$x+1$	$t_1 = \frac{110}{x+1}$	110

второй рабочий	$x$	$t_2 = \frac{110}{x}$	110

Первый рабочий выполнил заказ на час быстрее. Следовательно,  $t_1$  на 1 меньше, чем  $t_2$ , то есть

$$t_1 = t_2 - 1$$

$$\frac{110}{x+1} = \frac{110}{x} - 1.$$

Мы уже решали такие уравнения. Оно легко сводится к квадратному:

$$x^2 + x - 110 = 0$$

Дискриминант равен 441. Корни уравнения:

$$x_1 = 10, \quad x_2 = -11.$$

Очевидно, производительность рабочего не может быть отрицательной — ведь он производит детали, а не уничтожает их :-). Значит, отрицательный корень не подходит.

Ответ: 10.

*17. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?*

В этой задаче (в отличие от предыдущей) ничего не сказано о том, какая это работа, чему равен ее объем. Значит, работу можем принять за единицу.

А что же обозначить за переменные? Мы уже говорили, что за переменную  $x$  удобно обозначить производительность.

Пусть  $x$  — производительность первого рабочего. Но тогда производительность второго нам тоже понадобится, и ее мы обозначим за  $y$ .

По условию, первый рабочий за два дня делает такую же часть работы, какую второй — за три дня. Значит,

$$2x = 3y.$$

Отсюда  $y = \frac{2}{3} \cdot x$ .

Работая вместе, эти двое сделали всю работу за 12 дней. При совместной работе производительности складываются, значит,

$$(x + y) \cdot 12 = 1,$$

$$\left(x + \frac{2}{3}x\right) \cdot 12 = 1,$$

$$\frac{5}{3}x \cdot 12 = 1,$$

$$20x = 1,$$

$$x = \frac{1}{20}.$$

Итак, первый рабочий за день выполняет  $\frac{1}{20}$  всей работы. Значит, на всю работу ему понадобится 20 дней.

Ответ: 20.

18. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?

Всевозможные **задачи про две трубы**, которые наполняют какой-либо резервуар для воды — **это тоже задачи на работу**. В них также фигурируют известные вам величины — производительность, время и работа.

Примем производительность первой трубы за  $x$ . Именно эту величину и требуется найти в задаче. Тогда производительность второй трубы равна  $x+1$ , поскольку она пропускает на один литр в минуту больше, чем первая. Заполним таблицу

	p	t	A
первая труба	$x$	$t_1 = \frac{110}{x}$	110
вторая труба	$x+1$	$t_2 = \frac{99}{x+1}$	99

Первая труба заполняет резервуар на две минуты дольше, чем вторая. Значит,  $t_1 - t_2 = 2$ . Составим уравнение:

$$\frac{110}{x} - \frac{99}{x+1} = 2$$

и решим его.

Ответ: 10.

### Подведем итоги.

Для того чтобы просто сдать ЕГЭ по математике и получить аттестат, достаточно решить несколько простых задач. Это задачи В1, В2, В5 и В12. Никаких особых математических способностей для этого не требуется.

Мы рассказали, как решать такие задачи. А дальше — практика. На сайтах [www.mathege.ru](http://www.mathege.ru) вы найдете весь Банк заданий по математике, разработанный ФИПИ, а на сайте [ege.yandex.ru](http://ege.yandex.ru) — сможете проверить свои силы, решая типовые задания. Многочисленные сборники вариантов ЕГЭ можно найти в любом книжном магазине.

К сожалению, тесты, которые вы найдете в сборниках или на специальных сайтах, посвященных ЕГЭ, содержат немало опечаток. Поэтому, если задача у вас не получается, не впадайте в панику — решайте похожую.

Помните, что главный фактор успеха — время тренировки. Пробные ЕГЭ по математике, которые проводятся в школе — отличная возможность проверить свои силы. Они проходят четыре раза в течение учебного года. Перед пробными ЕГЭ имеет смысл повторить материал и потренироваться в решении задач.

Удачи вам, дорогие абитуриенты и родители!