Математика. ЕГЭ 2010.
Задания типа С1-С5.
Методы решения.

Корянов А.Г.

г. Брянск, 2010, 138 стр.

Корянов Анатолий Георгиевич. С 1999 года работает методистом по математике в городском информационно-методическом Центре (ГИМЦ) г. Брянска. За это время проведены десятки семинаров для учителей математики по различным темам школьного курса математики. Выпущены статьи и методические пособия.

В 2000-2005 годах - эксперт городской медальной комиссии, с 2009 года - член апелляционной комиссии по ЕГЭ. С 2009 года поддерживает сайт "Компьютерные программы по математике". e-mail: akoryanov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

11. Векторный метод
12. Метод объемов
13. Метод ключевых задач

Задания С3

Методы решения

1. Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем
   а) иррациональные неравенства;
   б) показательные неравенства;
   в) логарифмические неравенства;
   г) неравенства, содержащие знак модуля
2. Расщепление неравенств
3. Метод перебора
4. Метод интервалов
5. Введение новой переменной
6. Метод рационализации
7. Использование свойств функции
   а) область определения функции;
   б) ограниченность функции;
   в) монотонность функции;

Упражнения

Задания С4

Многовариантные задачи по планиметрии

1. Взаимное расположение элементов фигуры:
   а) выбор линейного элемента;
   б) выбор углового элемента;
   в) выбор отношения отрезков, площадей фигур.
2. Взаимное расположение двух фигур:
   а) точки и прямой (расположение точки на прямой или в одной из полуплоскостей);
   б) точки и двух параллельных прямых;
   в) точки и отрезка, лежащих на одной прямой (или трех точек, лежащих на одной прямой);
   г) точки и окружности;
   д) точки и многоугольника;
   е) вписанный угол, опирающийся на хорду (вид угла – острый, прямой или тупой);
   ж) треугольник, вписанный в окружность (расположение центра окружности относительно треугольника);
   з) трапеция, вписанная в окружность (расположение центра окружности относительно трапеции);
   и) касающиеся окружности (внутреннее или внешнее касание);
   к) непересекающиеся окружности и касательные (внутренние или внешние);
   л) пересекающиеся окружности (расположение центров окружностей относительно их общей хорды)

Примеры решения задач:

Выбор средней линии треугольника
Выбор оснований трапеции
Выбор отношения отрезков, площадей
Выбор угла треугольника
Выбор угла параллелограмма
Выбор угла трапеции

Вид угла (острый, прямой, тупой)
Взаимное расположение точки и отрезка, лежащие на одной прямой
Взаимное расположение точки и окружности
Расположение вершины вписанного угла относительно хорды
Расположение центра окружности относительно параллельных хорд
Расположение центра описанной окружности относительно треугольника
Расположение центра описанной окружности относительно трапеции
Расположение центра окружности относительно касательной
Вписанная или вневписанная окружность
Расположение точки касания на прямой
Внешняя или внутренняя касательная непересекающихся окружностей
Касающиеся окружности (внешнее или внутреннее касание)
Расположение центров пересекающихся окружностей относительно их общей хорды
Окружность, касающаяся одной из двух дуг другой окружности
Тематические задачи Медианы треугольника
Метод площадей
Отношение отрезков и площадей
Метод вспомогательной окружности
Высоты треугольника
Окружность и треугольник
Параллелограмм
Ромб
Прямоугольник
Трапеция
Касающиеся окружности
Упражнения

Задания С5

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Аналитические методы

1. Линейные уравнения
2. Квадратные уравнения
3. Уравнения высшей степени
4. Уравнения с модулем
5. Дробно-рациональные уравнения
6. Иррациональные уравнения
7. Показательные уравнения
8. Логарифмические уравнения
9. Тригонометрические уравнения
10. Уравнения смешанного типа
11. Линейные неравенства
12. Квадратные неравенства
13. Неравенства высшей степени
14. Неравенства с модулем
15. Дробно-рациональные неравенства
16. Иррациональные неравенства
17. Показательные неравенства
18. Логарифмические неравенства
19. Неравенства смешанного типа
20. Инвариантность
21. Функции

Функционально-графические методы

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2010
Задания С1 и С2

Корянов А.Г. *г.Брянск*

Задания С1

● (Д – 2010) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+3x-\sqrt{x^2+3x-1}=7 \\ 2\sqrt{2}\sin y = x \end{cases}$$

Ответ: $x=2, \quad y=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5\cdot 5^{tgy}+4=5^{-tgy} \\ \sqrt{x-5}+4\cos y=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(13;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^y+2\sin x=0 \\ tgx+1=\dfrac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;0{,}5\right),\ n\in Z.$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{\sin y}-5\cdot 2^{\sin y}+4=0 \\ \sqrt{x}+5\cos y+1=0 \end{cases}$$

Ответ: $(16;\pi+2\pi n),\ n\in Z.$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4\cos^2 x-12\cos x+5=0 \\ \sqrt{y^2-4y+16}+4\sin x=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;2\right),\ n\in Z.$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y+\cos^2 x-2}=\cos x \\ y\sin^2 x-\sin x-1=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;2\right),\ n\in Z;$

$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;2\right),\ k\in Z.$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^y-10\cdot 2^y+16=0 \\ \cos x=\sqrt{y-2} \end{cases}$$

Ответ: $(2\pi n;3),\ n\in Z.$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 16^{\cos x}-10\cdot 4^{\cos x}+16=0 \\ \sqrt{y}+2\sin x=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;3\right),\ n\in Z.$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{y+1}=2\cos x \\ 3^{-y}=4\cos x+1 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;-1\right),\ n\in Z.$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x=y-3 \\ \cos x=y-2 \end{cases}$$

Ответ: $(2\pi n;3),\ n\in Z;\ \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;2\right),\ k\in Z.$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y=x-6 \\ \cos y=x-7 \end{cases}$$

Ответ: $(6;\pi+2\pi n),\ n\in Z;\ \left(7;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x=\sin y \\ 2^{-x}=2\sin y+1 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-1;(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n\right),\ n\in Z.$

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 81^{\sin y}-30\cdot 9^{\sin y}+81=0 \\ \sqrt{x}+2\cos y=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(3;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin^2 y+3\sin y-2=0 \\ \sqrt{x^2-x}+4\cos y=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-3;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z;$

$\left(4;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sin x=\cos 2x+1 \\ \sqrt{y^2+6y}+6\cos x=0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;3\right),\ n\in Z;$

$\left(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k;-9\right),\ k\in Z;$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2-4xy+4y^2-16}=x-2y\\ y^2-2xy+16=0\end{cases}$$

Ответ: $(-4;4)$.

16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{2y^2-2xy+x^2-25}=y-x\\ x^2-4xy+100=0\end{cases}$$

Ответ: $(-10;-5)$.

17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2\sin^2 x-7\sin x+3=0\\ 6\sin x+5y=13\end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n;2\right),\ n\in Z.$

18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2\cos^2 y+11\cos y+5=0\\ 5\cos x-2\cos y+4=0\end{cases}$$

Ответ: $\left(\pi+2\pi n;\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\right),\ n\in Z,\ k\in Z.$

19. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2\,tgx+5y=12\\ 2\,tgx+3y=8\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n;2\right),\ n\in Z$.

20. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3\,tgx+4\cos y=5\\ 3\,tgx+8\cos y=7\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ n\in Z,\ k\in Z.$

21. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3^y+2\cos x=0\\ 2\sin^2 x-3\sin x-2=0\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\dfrac{1}{2}\right),\ n\in Z;$

22. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3^x+2\sin y=0\\ 4\cos^2 y-4\cos y-3=0\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in Z;$

23. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2=8\sin y+1\\ x+1=2\sin y\end{cases}$$

Ответ: $(-1;\pi n),\ n\in Z;$

24. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}y^2=4\cos x+1\\ y+1=2\cos x\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n;-1\right),\ n\in Z.$

25. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\cos y\sqrt{\sin x}=0\\ 2\sin^2 x=2\cos^2 y+1\end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right),\ n\in Z, k\in Z.$

26. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin y\sqrt{\cos x}=0\\ 2\sin^2 x+2\cos^2 y=3\end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;\pi k\right),\ n\in Z,\ k\in Z;$

$\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k\right),\ n\in Z,\ k\in Z.$

27. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}4\cos^2 x-4\cos x-3=0\\ \sqrt{y^2-y-3}+2\sin x=0\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n;3\right),\ n\in Z;$

$\left(-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;-2\right),\ k\in Z.$

28. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\cos 2y=\cos y\\ \sqrt{x^2-2x}=2\sin y\end{cases}$$

Ответ: $(0;2\pi n)$; $(2;2\pi n)$;

$\left(3;\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$; $\left(-1;\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

29. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x\,tgy=9\\ x\,ctgy=3\end{cases}$$

Ответ: $\left(3\sqrt{3};\dfrac{\pi}{3}+\pi n\right),\ n\in Z;$

$\left(-3\sqrt{3};-\dfrac{\pi}{3}+\pi k\right),\ k\in Z.$

30. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}y\,tgx=-2\\ y\,ctgx=-6\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{6}+\pi n;2\sqrt{3}\right),\ n\in Z;$

$\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;-2\sqrt{3}\right),\ k\in Z.$

31. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\sin 2x-\cos x}{\sqrt{y+1}}=0\\ y=4\sin x-3\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z,\ y=1.$

32. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{y-1}}=0\\ y=4\sin x+3\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z,\ y=7.$

33. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\sqrt{y}}=0\\ y-\cos x=0\end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы следует $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ и $y>0$. Пусть $\sin x=t$, где $-1\le t\le 1$. Из уравнения $2t^2-3t+1=0$ получаем корни $t_1=1,\ t_2=\frac{1}{2},$ которые удовлетворяют условию $-1\le t\le 1$.

а) Если $\sin x=1$, то $\cos x=0$ и из второго уравнения системы имеем $y=0$. Это значение не удовлетворяет условию $y>0$.

б) Пусть $\sin x=\frac{1}{2},$ тогда из тождества $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ получаем $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (не удовлетворяет условию $y>0$).

Из уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ имеем $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z.$

Таким образом, исходная система имеет решения $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

34. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{2\sin^2 x+3\sin x+1}{\sqrt{-y}}=0\\ y=-\cos x\end{cases}$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

35. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{16^{\sin x}-6\cdot 4^{\sin x}+8}{\log_2(1-2y)}=0\\ y=\cos x\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

36. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{81^{\cos x}-12\cdot 9^{\cos x}+27}{\log_7(1+2y)}=0\\ y=\sin x\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

37. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x-\sin y=1\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1\end{cases}$$

Ответ:

$\left((-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n;(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k\right),\ n\in Z, k\in Z.$

38. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\left(2x^2-5x-3\right)\sqrt{\cos y}=0\\ \sin y=x\end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z;$

$\left(-\frac{1}{2};-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

39. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\cos(x+y)=-\dfrac{1}{2}\\ \sin x+\sin y=\sqrt{3}\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)$;

$\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n;\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$.

40. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=1\\ |x-y|=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим два случая, связанные с раскрытием модуля.

1. Если $x-y=\dfrac{2\pi}{3}$, то $y=x-\dfrac{2\pi}{3}$. Первое уравнение системы примет вид

$\sin x+\sin\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=1;$

$\sin x+\sin x\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}-\cos x\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}=1;$

$\sin x-\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1;$

$\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1;\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1;$

$x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$ Отсюда

$y=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$

2. Если $x-y=-\dfrac{2\pi}{3}$, то $y=x+\dfrac{2\pi}{3}$. Первое уравнение системы примет вид

$\sin x+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=1;$

$\sin x+\sin x\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}=1;$

$\sin x-\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1;$

$\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1;\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1;$

$x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$ Отсюда

$y=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$

Ответ: $\left(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$;

$\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Получен ответ, но решение не верно из-за ошибки в формулах или значениях тригонометрических функций, из-за неверной записи ответа.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

41. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x=\sin 2y\\ \cos x=\sin y\\ 0\le x\le\pi\\ 0\le y\le\pi\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right)$; $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

42. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{2\pi}{3}\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=2\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\dfrac{\pi}{6}-\pi n\right)$, $n\in Z$.

Задания С 2

РАССТОЯНИЯ И УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Методы решения задач

1. Поэтапно-вычислительный метод
2. Координатный метод
3. Координатно-векторный метод
4. Векторный метод
5. Метод объемов
6. Метод ключевых задач

Ключевые задачи

1. Координаты точки $M(x;y;z)$, делящей отрезок M_1M_2 между точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и

$M_2(x_2;y_2;z_2)$ в отношении $M_1M : MM_2 = \lambda$, определяются формулами $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$,

$y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$.

2. Найти угол между диагоналями смежных граней куба.

3. Найти угол между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю грани.

4. Найти угол между диагональю куба и плоскостью, проведенной через концы трех ребер куба, выходящих из той же вершины, что и диагональ.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ BD_1 перпендикулярна плоскостям AB_1C и A_1DC_1 и делится ими на три равные части.

6. Отрезки, соединяющие середины противолежащих ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

7. В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра перпендикулярны.

8. Отрезок, соединяющий середины скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, является их общим перпендикуляром и имеет длину $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, где a – длина ребра.

9. Любое сечение треугольной пирамиды плоскостью, параллельной ее скрещивающимся ребрам, является параллелограммом.

10. Любое сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, параллельной ее скрещивающимся ребрам, есть прямоугольник.

1. Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками A и B можно вычислить:

1) как длину отрезка AB, если отрезок AB удается включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;

2) по формуле $\rho(A;B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$, где $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$;

3) по формуле $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Пример 1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E = \frac{1}{3}AD_1$, $D_1F = \frac{2}{3}D_1B_1$. Найдите длину отрезка EF.

Решение. Длину отрезка EF найдем по теореме косинусов из треугольника D_1EF (рис. 1), в котором $D_1F = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $D_1E = \frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\angle FD_1E = \frac{\pi}{3}$ (треугольник AB_1D_1 является равносторонним). Имеем

$$EF^2 = D_1E^2 + D_1F^2 - 2D_1E \cdot D_1F \cdot \cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{8}{9} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } EF = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

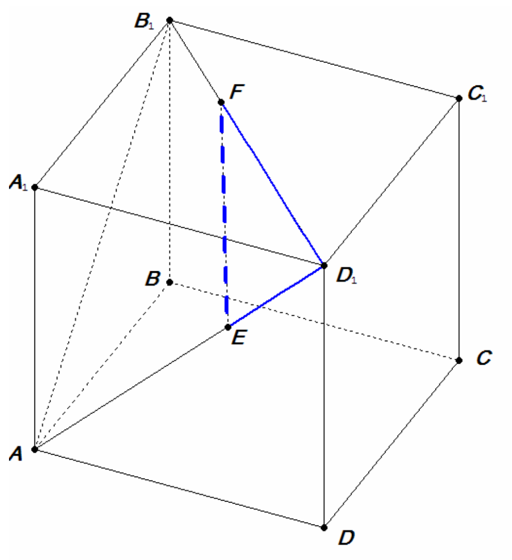


Рис. 1

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

1. (П) Ребра правильной четырехугольной призмы равны 1, 4 и 4. Найдите расстояние от вершины до центра основания призмы, не содержащего эту вершину.
Ответ: 3.

2. Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

Расстояние от точки до прямой можно вычислить:

1) как длину отрезка перпендикуляра, если удается включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот;
2) используя векторный метод;
3) используя координатно-векторный метод.

Пример 2. При условиях примера 1 найдите расстояние от точки D_1 до прямой *EF*.

Решение. Пусть *h* – длина высоты треугольника D_1EF, опущенной из точки D_1. Найдем *h*, используя метод площадей. Площадь треугольника D_1EF равна $\frac{1}{2}D_1F\cdot D_1E\cdot\sin\angle FD_1E=$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}$. С другой стороны площадь треугольника D_1EF равна $\frac{1}{2}FE\cdot h=\frac{\sqrt{6}}{6}h$. Из уравнения $\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{6}}{6}h$ находим искомое расстояние $h=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Замечание. Можно заметить, что выполняется равенство $FE^2+D_1E^2=D_1F^2$, то есть треугольник D_1EF прямоугольный и длина отрезка D_1E является искомым расстоянием.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

1. (П) В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки *A* до прямой:
а) B_1D_1; б) A_1C; в) BD_1.

Ответ: а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. (П) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки *A* до прямой BC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

3. (П) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки *A* до прямой:
а) *DE*; б) D_1E_1; в) B_1C_1; г) BE_1; д) BC_1; е) CE_1; ж) CF_1; з) CB_1.

Ответ: а) $\sqrt{3}$; б) 2; в) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; г) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; д) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; е) $\sqrt{2}$; ж) $\frac{\sqrt{30}}{5}$; з) $\frac{\sqrt{30}}{4}$.

4. (П) Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб $ABCD$, в котором $AB=10$, $AC=6\sqrt{7}$. Боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от вершины *B* до прямой AC_1.

Ответ: 8.

3. Расстояние от точки до плоскости

● *Расстояние от точки до плоскости*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

● *Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью* равно длине их общего перпендикуляра.

● *Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью* равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.

● *Расстояние между двумя параллельными плоскостями* равно длине их общего перпендикуляра.

● *Расстояние между двумя параллельными плоскостями* равно расстоянию между точкой одной из этих плоскостей и другой плоскостью.

Расстояние от точки *M* до плоскости α
1) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки *P*, лежащей на прямой *l*, которая проходит через точку *M* и параллельна плоскости α;
2) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки *P*, лежащей на плоскости β, которая проходит через точку *M* и параллельна плоскости α;
3) вычисляется по формуле $\rho=\rho_1\frac{r}{r_1}$, где $\rho=\rho(M;\alpha)$, $\rho_1=\rho(M_1;\alpha)$, $OM=r$, $OM_1=r_1$, $MM_1\cap\alpha=O$; в частности, $\rho=\rho_1$, если $r=r_1$:
прямая *m*, проходящая через точку *M*, пересекает плоскость α в точке *O*, а точка M_1 лежит на прямой *m*;
4) вычисляется по формуле
$\rho(M;\alpha)=\rho(M;ABC)=\frac{3V_{ABCM}}{S_{ABC}}$, где треугольник *ABC* расположен на плоскости α, а объем пирамиды *ABCM* равен V_{ABCM};

5) вычисляется по формуле

$$\rho(M;\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$ где

$M(x_0;y_0;z_0)$, плоскость α задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$;

6) находится с помощью векторного метода;

7) находится с помощью координатно-векторного метода.

Пример 3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки C_1 до плоскости AB_1C.

Решение. Так как прямая A_1C_1 параллельна AC, то прямая A_1C_1 параллельна плоскости AB_1C (рис. 2). Поэтому искомое расстояние h равно расстоянию от произвольной точки прямой A_1C_1 до плоскости AB_1C. Например, расстояние от центра O_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости AB_1C равно h.

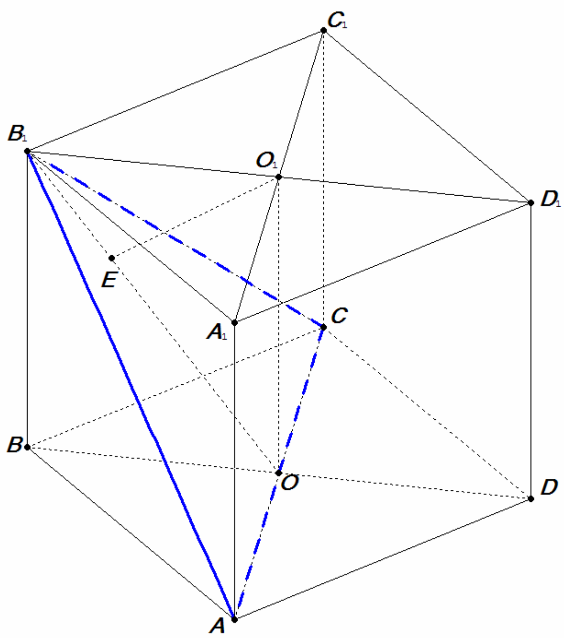


Рис. 2

Пусть E – основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую B_1O, где O – центр квадрата $ABCD$. Прямая O_1E лежит в плоскости BB_1D_1D, а прямая AC перпендикулярна этой плоскости. Поэтому $O_1E \perp AC$ и O_1E - перпендикуляр к плоскости AB_1C, а $O_1E = h$.

Так как $B_1O_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $O_1O=1$, то $OB_1=\sqrt{\frac{1}{2}+1}=\sqrt{\frac{3}{2}}$. Выражая двумя способами площадь треугольника B_1O_1O, получим $h\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1$, откуда $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1. Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AD, если $AD=2\sqrt{5}$, $AB=AC=10$, $BC=4\sqrt{5}$.

Ответ: 2.

4. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

1) равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой;

2) равно расстоянию между двумя параллельными плоскостями, содержащими эти прямые;

3) равно $\rho(a;b)=\rho(A;b_1)$, где $A=a_\alpha$, $b_1=b_\alpha$: если ортогональная проекция на плоскость α переводит прямую a в точку A, а прямую b в прямую b_1, то расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно расстоянию от точки A до прямой b_1;

4) вычисляется по формуле $\rho(AB;CD)=\frac{6V_{ABCD}}{AB\cdot CD\cdot\sin\varphi}$ где A и B – точки на одной прямой, C и D – точки на другой прямой, φ - угол между данными прямыми;

5) определяется с помощью векторного метода;

6) определяется с помощью координатно-векторного метода.

Пример 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BD и SA.

Решение. Пусть E – основание перпендикуляра (рис. 3), опущенного из точки O на ребро SA. Так как прямая BD перпендикулярна плоскости AOS, то $BD \perp OE$.

Таким образом, OE – общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым BD и SA.

Найдем его длину, вычислив двумя способами площадь треугольника AOS.

Из равенства $AO \cdot SO = AS \cdot OE$, где $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AS = 1$, $SO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ следует, что $OE = \frac{1}{2}$.

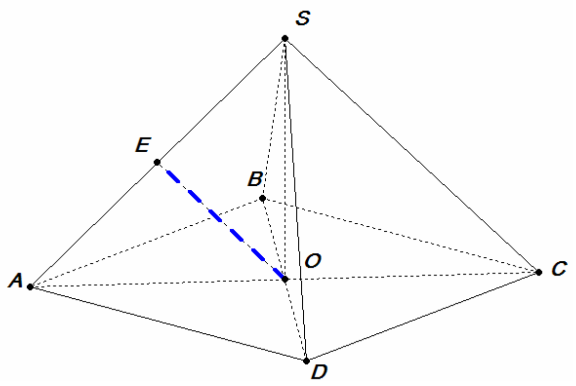


Рис. 3

Ответ: 0,5.

1. В пирамиде $DABC$ известны длины ребер: $AB = AC = DB = DC = 10$, $BC = DA = 12$. Найдите расстояние между прямыми DA и BC.
Ответ: $2\sqrt{7}$.

5. Угол между двумя прямыми

- *Углом между двумя пересекающимися прямыми* называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.
- $0^\circ < \angle(a;b) \le 90^\circ$.
- *Углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.
- Две прямые называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°.
- *Угол между параллельными прямыми* считается равным нулю.

• При нахождении угла между прямыми используют:

1) формулу $\cos\varphi = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{2bc}$ для нахождения угла φ между прямыми m и l, если стороны a и b треугольника ABC соответственно параллельны этим прямым;

2) формулу $\cos\varphi = \frac{|\overline{p} \cdot \overline{q}|}{|\overline{p}| \cdot |\overline{q}|}$ или в координатной форме

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$ для нахождения угла φ между прямыми m и l, если векторы $\overline{p}(x_1; y_1; z_1)$ и $\overline{q}(x_2; y_2; z_2)$ параллельны соответственно этим прямым; в частности, для того чтобы прямые m и l были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{p} \cdot \overline{q} = 0$ или $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$;

3) ключевые задачи.

Пример 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми A_1D и D_1E, где E – середина ребра CC_1.

Решение. Пусть F – середина ребра BB_1, a – ребро куба, φ - искомый угол.

Так как $A_1F \| D_1E$, то φ - угол при вершине A_1 в треугольнике A_1FD.

Из треугольника BFD имеем

$FD^2 = BD^2 + BF^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}$, а из треугольника A_1B_1F получаем

$A_1F^2 = A_1B_1^{\,2} + B_1F^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$, откуда

$A_1F = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Далее в треугольнике A_1FD используем теорему косинусов

$FD^2 = A_1D^2 + A_1F^2 - 2A_1D \cdot A_1F\cos\varphi$,

$\frac{9a^2}{4} = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} - 2a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}\cos\varphi$, откуда

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

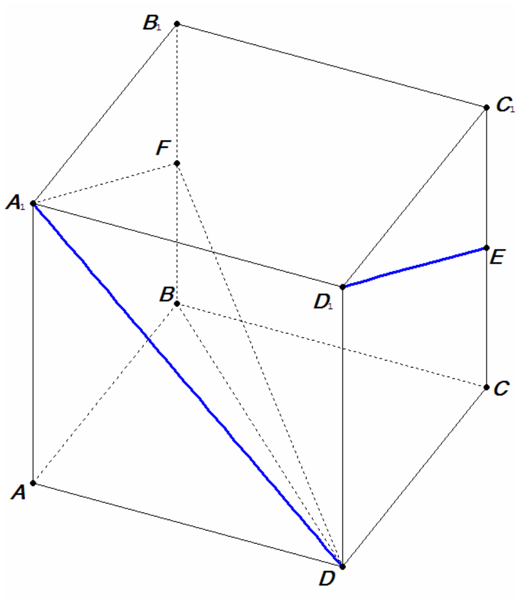


Рис. 4

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.
Ответ: 0,8.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно A_1B_1 и C_1D_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BD_1.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

4. К диагонали куба провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?
Ответ: на три части в отношении 1:1:1.

5. К диагонали A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели перпендикуляры из середин ребер AB и AD. Найдите угол между этими перпендикулярами.
Ответ: 60°.

6. К диагонали A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели перпендикуляры из вершин A и B. Найдите угол между этими перпендикулярами.
Ответ: 60°.

7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и A_1C.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

9. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с плоскостью его основания углы φ и ψ. Найдите угол между этими диагоналями.
Ответ: $\arccos(\sin\varphi\cdot\sin\psi)$

10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E – середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BE.
Ответ: 0,7.

11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$.

12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.
Ответ: 0,75.

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BE_1.

Ответ: 90°.

15. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точки G, H – середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AG и BH.

Ответ: 0,9.

16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AG и BC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

17. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AG и BD_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

18. Найдите угол между непересекающимися медианами граней правильного тетраэдра.

Ответ: $\arccos\frac{1}{6}$; $\arccos\frac{2}{3}$.

19. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, точки *E*, *F* – середины ребер соответственно *SB* и *SC*. Найдите косинус угла между прямыми *AE* и *BF*.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

20. Ребра AD и *BC* пирамиды *DABC* равны 24 см и 10 см. Расстояние между серединами ребер BD и AC равно 13 см. Найдите угол между прямыми AD и *BC*.

Ответ: 90°.

6. Угол между прямой и плоскостью

● *Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой* называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.

● $0^\circ < \angle(a;\alpha) < 90^\circ$.

● Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90°.

● Если прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным 0°.

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить:

1) если этот угол удается включить в прямоугольный треугольник в качестве одного из острых углов;

2) по формуле $\sin\varphi = \sin\angle(l;\alpha) = \frac{\rho(M;\alpha)}{AM}$, где $M \in l$, $l \cap \alpha = A$;

3) по формуле $\sin\varphi = \frac{|\overline{n}\cdot\overline{p}|}{|\overline{n}|\cdot|\overline{p}|}$ или в координатной форме

$$\sin\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$ где

$\overline{n}(x_1;y_1;z_1)$ - вектор нормали плоскости α,

$\overline{p}(x_2;y_2;z_2)$ - направляющий вектор прямой *l*;

● прямая l и плоскость α параллельны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$;

4) используя векторный метод;

5) используя координатно-векторный метод;

6) используя ключевые задачи.

Пример 6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью AA_1C_1C.

Решение. Пусть D – середина A_1C_1, тогда B_1D - перпендикуляр к плоскости AA_1C_1C, а D – проекция точки B_1 на эту плоскость (рис. 5).

Если φ - искомый угол, то $\sin\varphi = \frac{B_1D}{AB_1}$, где $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1D = \frac{\sqrt{3}}{2}$, и поэтому $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

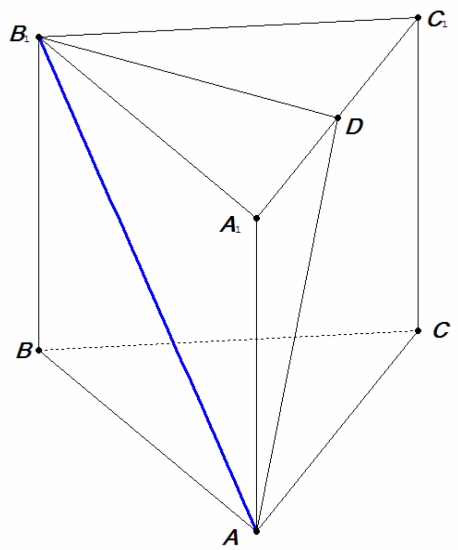


Рис. 5

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Ответ: 30°.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1=3$, $AB=4$, $BC=4$.

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1=8$, $AB=6$, $BC=15$.

Ответ: $\arcsin\frac{24}{85}$.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1=4$, $A_1D_1=6$, $C_1D_1=6$ найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=4$, $BC=6$, $CC_1=4$ найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF, проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AD и плоскостью BCC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

11. В основании прямой призмы $MNKM_1N_1K_1$ лежит прямоугольный треугольник MNK, у которого угол N равен 90°, угол M равен 60°, $NK=18$. Диагональ боковой грани M_1N составляет угол 30° с плоскостью MM_1K_1. Найдите высоту призмы.

Ответ: $6\sqrt{6}$.

12. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AC=10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани B_1C составляет угол 30° с плоскостью AA_1B_1. Найдите высоту призмы.

Ответ: $10\sqrt{2}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Способ нахождения искомой величины верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AG и BCC_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AG и BDD_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

15. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

7. Угол между плоскостями

- *Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.*
- *Величина двугранного угла принадлежит промежутку* $(0^\circ;180^\circ)$.
- *Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку* $(0^\circ;90^\circ]$.
- *Угол между двумя параллельными плоскостями* считается равным 0°.

Угол между пересекающимися плоскостями можно вычислить:

1) как угол между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными к линии их пересечения;

2) как угол треугольника, если удается включить линейный угол в некоторый треугольник;

3) по формуле $\sin\angle(\alpha;\beta)=\frac{\rho(M;\beta)}{\rho(M;l)}$, где $M\in\alpha$; $\alpha\cap\beta=l$;

4) по формуле $\cos\angle(\alpha;\beta)=\frac{S'}{S}$, где S – площадь фигуры Φ, расположенной в плоскости α, S' - площадь проекции фигуры Φ на плоскость β;

5) как угол между перпендикулярными им прямыми;

6) по формуле $\cos\angle(\alpha;\beta)=\frac{\left|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}\right|}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}$ или в координатной форме $\cos\angle(\alpha;\beta)=$

$$=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

где $\overline{n_1}(A_1;B_1;C_1)$ - вектор нормали плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\overline{n_2}(A_2;B_2;C_2)$ - вектор нормали плоскости $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$;

7) используя ключевые задачи.

Пример 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите двугранный угол между основанием и боковой гранью.

Решение. Пусть E и K – середины ребер AD и BC соответственно, O – центр основания $ABCD$ (рис. 6). Тогда $SE\perp AD$, $EK\perp AD$ и поэтому $\angle SEK=\varphi$ - линейный угол данного двугранного угла.

Так как $AD=1$, $OE=\frac{1}{2}$, $SD=1$, то

$$SE=\sqrt{SD^2-ED^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\varphi=\frac{OE}{SE}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

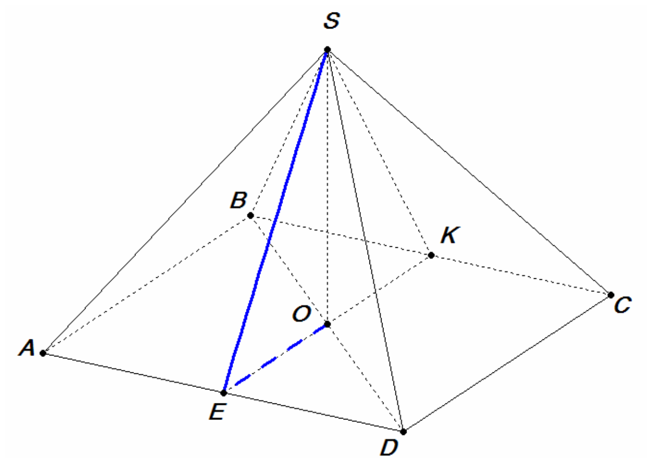


Рис. 6

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

2. Диагональ A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через середины ребер AB и DD_1. Найдите величину этого угла.

Ответ: 120°.

3. Диагональ $A'C$ куба $ABCDA'B'C'D'$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через B и D. Найдите величину этого угла.

Ответ: 120°.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BCC_1.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BDD_1.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $AD = 8$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AK, если K - середина ребра C_1D_1.

Ответ: 2.

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$ найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$ найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

9. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.

Ответ: 1,2.

10. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

11. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

Ответ: 30°.

12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями
ACB_1 и A_1C_1B.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{7}$.

13. (Демо 2010) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

Ответ: 30°.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E – середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1C_1. Найдите тангенс угла между плоскостями ADE и BCC_1.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

15. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P – середина ребра BB_1. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

Ответ: 2.

16. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребра BB_1, причем $BP : PB_1 = 1:3$. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

Ответ: 0,5.

17. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, в котором $AB = AC = 8$, а один из углов равен 60°. На ребре AA_1 отмечена точка P так, что $AP : PA_1 = 2:1$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CBP, если расстояние между прямыми AB и C_1B_1 равно $18\sqrt{3}$.

Ответ: 3.

18. Основанием прямой треугольной

призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, в котором $AC = BC = 6$, а один из углов равен 60°. На ребре CC_1 отмечена точка P так, что $CP : PC_1 = 2 : 1$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ABP, если расстояние между прямыми AC и A_1B_1 равно $18\sqrt{3}$.
Ответ: 4.
19. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Найдите тангенс угла между плоскостью $A_1B_1C_1$ и плоскостью, проходящей через середину ребра AA_1 и прямую BC, если $AB = 4$, $BB_1 = 12$.
Ответ: 1,5.
20. Основание пирамиды $DABC$ - равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC.
Ответ: 4.
21. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ABC и BCS.
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
22. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.
Ответ: 2 или 14.
23. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.
Ответ: 3 или $\frac{21}{17}$.

8. Разные задачи

1. Найдите радиус сферы, внутри которой расположены четыре шара радиуса r. Каждый из этих шаров касается трех других и поверхности сферы.
Ответ: $r\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.
2. Три сферы, попарно касаясь друг друга, касаются плоскости треугольника в его вершинах. Найти радиусы сфер, если стороны треугольника равны a, b и c.
Ответ: $\frac{ab}{2c}; \frac{bc}{2a}; \frac{ac}{2b}$.
3. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если известно, что $\frac{SK}{KA} = \frac{SL}{LB} = 2$, а медиану SN треугольника SBC эта плоскость делит пополам.
Ответ: $\frac{8}{37}$.
4. Найти угол при вершине в осевом сечении конуса, если на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.
Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.
5. Какие значения принимает угол между образующими конуса, если его образующая в два раза больше радиуса основания?
Ответ: $(0^\circ; 60^\circ]$.

9. Координатный метод

Пример 8. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K - середины ребер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M = 2MD_1$. Найдите расстояние между точками Q и L, где Q – середина отрезка EM, а L – точка отрезка MK такая, что $ML = 2LK$.
Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 7. Тогда $E\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, $K\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $B_1(0;1;1)$, $D_1(1;0;1)$. Для нахождения координат точки M используем формулу координат точки, делящей отрезок B_1D_1 в отношении 2:1. Имеем $M\left(\frac{0+2\cdot1}{1+2};\frac{1+2\cdot0}{1+2};\frac{1+2\cdot1}{1+2}\right) = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};1\right)$. Аналогично получим координаты точки L, делящей отрезок MK в отношении 2:1. Имеем $L\left(\frac{\frac{2}{3}+2\cdot1}{1+2};\frac{\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2};\frac{1+2\cdot0}{1+2}\right) = \left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{1}{3}\right)$ Координаты точки Q равны полусуммам соответствующих координат точек E и M, поэтому

$Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{3}{4}\right)$. Применим формулу для расстояния между точками с заданными координатами

$$QL=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{725}{36^2}}=\frac{5\sqrt{29}}{36}.$$

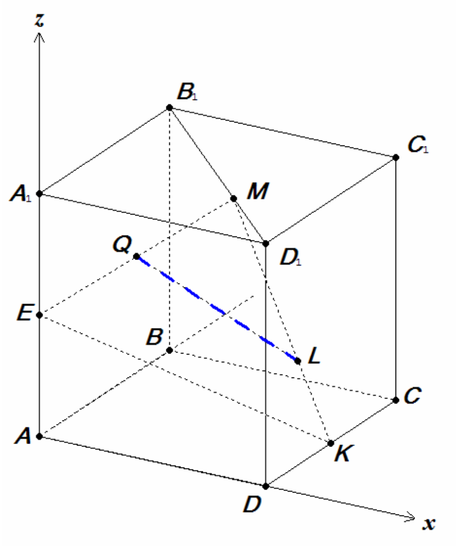


Рис. 7

Ответ: $\frac{5\sqrt{29}}{36}$.

Пример 9. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1.

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через точки $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$ и $C_1(1;1;1)$. Для этого подставим координаты этих точек в общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases}B+D=0\\A+D=0\\A+B+C+D=0\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}B=-D\\A=-D\\C=D\end{cases}$$

Отсюда находим уравнение $-Dx-Dy+Dz+D=0$ или $x+y-z-1=0$. По формуле находим расстояние от точки $A_1(0;0;1)$ до плоскости $\beta=BDC_1$:

$$\rho(A_1;\beta)=\frac{|0+0-1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

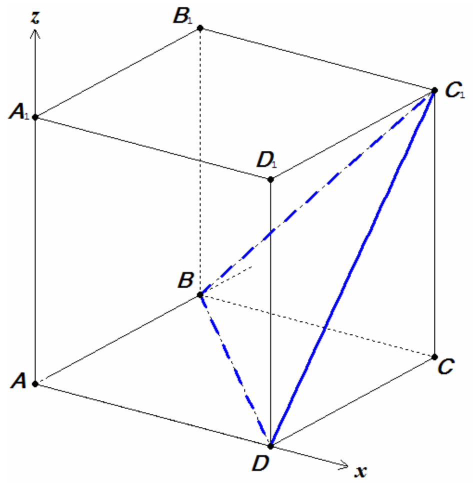


Рис. 8

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

10. Координатно-векторный метод

Пример 10. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1.

Решение. Введем прямоугольную систему координат (рис. 9), тогда

$A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $B_1(0;1;1)$, $D_1(1;0;1)$.

Пусть EF – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BD_1 и AB_1, то есть $EF\perp AB_1$, $EF\perp BD_1$, причем $E\in AB_1$ и $F\in BD_1$. Обозначим $\lambda=\frac{AE}{B_1E}$, $\mu=\frac{BF}{D_1F}$ и воспользуемся формулами для координат точки, которая делит данный отрезок в заданном отношении. Получим $E\left(0;\frac{\lambda}{1+\lambda};\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$, $F\left(\frac{\mu}{1+\mu};\frac{1}{1+\mu};\frac{\mu}{1+\mu}\right)$.

Пусть $\frac{\lambda}{1+\lambda}=p$, $\frac{\mu}{1+\mu}=q$, тогда $E(0;p;p)$, $F(q;1-q;q)$. Так как вектор $\overline{EF}=(q;\,1-q-p;\,q-p)$ должен быть перпендикулярным векторам $\overline{AB_1}=(0;1;1)$ и $\overline{BD_1}=(1;-1;\,1)$, то имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\overline{AB_1}\cdot\overline{EF}=0\\\overline{BD_1}\cdot\overline{EF}=0\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}1-q-p+q-p=0\\q-1+q+p+q-p=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}p=\frac{1}{2}\\q=\frac{1}{3}\end{cases}$$

Отсюда $\overline{EF}=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};-\frac{1}{6}\right)$,

$$EF=\left|\overline{EF}\right|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

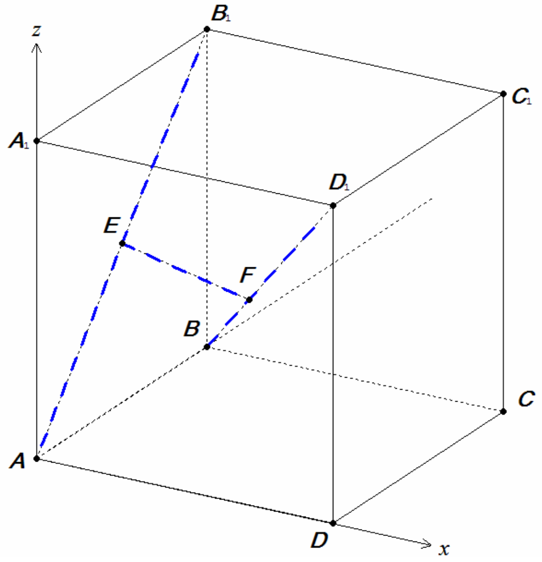


Рис. 9

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Пример 11. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AE и DF, где E и F – точки, расположенные на ребрах CD и C_1D_1 так, что $DE=\frac{1}{3}DC$, $C_1F=\frac{1}{3}C_1D_1$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 10. Тогда

$A(0;0;0)$, $D(1;0;0)$, $E\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $F\left(1;\frac{2}{3};1\right)$,

$\overline{AE}=\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $\overline{DF}=\left(0;\frac{2}{3};1\right)$,

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overline{AE}\cdot\overline{DF}\right|}{\left|\overline{AE}\right|\cdot\left|\overline{DF}\right|}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{\sqrt{13}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{130}},$$

$\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{130}}$, где α - искомый угол.

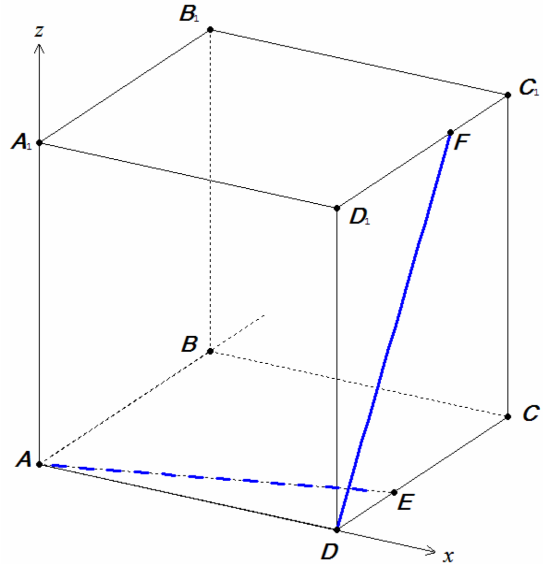


Рис. 10

Ответ: $\arccos\frac{2}{\sqrt{130}}$.

Пример 12. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью α, проходящей через точки A_1, E и F, где точка E – середина ребра C_1D_1, а точка F лежит на ребре DD_1, так, что $D_1F=2DF$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 11. Тогда

$A(0;0;0)$, $A_1(0;0;1)$, $D_1(1;0;1)$, $E\left(1;\frac{1}{2};1\right)$,

$F\left(1;0;\frac{1}{3}\right)$, $\overline{AD_1}=(1;0;1)$, $\overline{A_1E}=\left(1;\frac{1}{2};0\right)$,

$\overline{A_1F}=\left(1;0;-\frac{2}{3}\right)$. Пусть $\bar{n}=(x;y;z)$ - вектор, перпендикулярный плоскости α, φ - искомый угол. Тогда $\sin\varphi=\frac{\left|\overline{AD_1}\cdot\bar{n}\right|}{\left|\overline{AD_1}\right|\cdot\left|\bar{n}\right|}$.

Вектор $\bar{n}$ найдем из условий перпендикулярности этого вектора векторам $\overline{A_1E}$ и $\overline{A_1F}$, т.е. из условий

$$\begin{cases}\bar{n}\cdot\overline{A_1E}=0\\ \bar{n}\cdot\overline{A_1F}=0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x+\frac{y}{2}=0\\ x-\frac{2}{3}z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x\\ z=1{,}5x.\end{cases}$$

Пусть $x=2$, тогда $y=-4$, $z=3$ и $\bar{n}=(2;-4;3)$, $\left|\bar{n}\right|=\sqrt{29}$.

Так как $\overline{AD_1} \cdot \overline{n} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 = 5$, $\left|\overline{AD_1}\right| = \sqrt{2}$, то $\sin\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{58}}$.

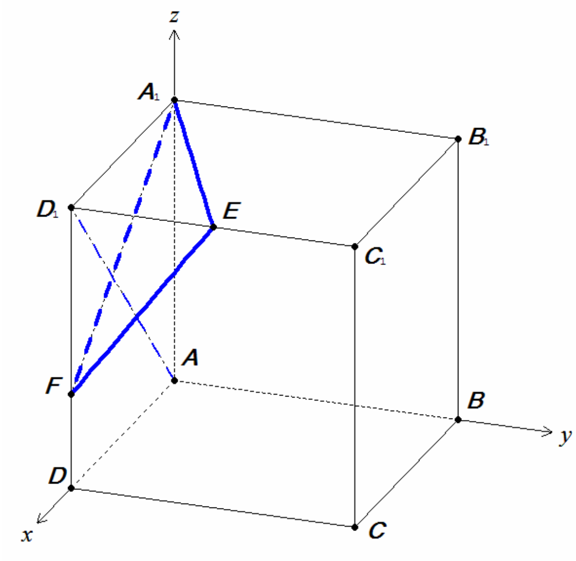


Рис. 11

Ответ: $\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{58}}$.

Пример 13. Найдите угол между плоскостями $2x + 3y + 6z - 5 = 0$ и $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{n} = (2;3;6)$ и $\overline{m} = (4;4;2)$, перпендикулярные к данным плоскостям. Искомый угол найдем по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{n} \cdot \overline{m}\right|}{\left|\overline{n}\right| \cdot \left|\overline{m}\right|}.$$

Так как $\overline{n} \cdot \overline{m} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 32$, $\left|\overline{n}\right| = \sqrt{4+9+36} = 7$, $\left|\overline{m}\right| = \sqrt{16+16+4} = 6$, то

$\cos\varphi = \dfrac{16}{21}$, откуда $\arccos\varphi = \dfrac{16}{21}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{16}{21}$.

Пример 14. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F – середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 12. Тогда

$A(0;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D_1(1;0;1)$, $E\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$, $F\left(\dfrac{1}{2};1;1\right)$, $\overline{AD_1} = (1;0;1)$, $\overline{AE} = \left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$, $\overline{CD_1} = (0;-1;1)$, $\overline{CF} = \left(-\dfrac{1}{2};0;1\right)$.

Найдем вектор $\overline{n} = (x;y;z)$, перпендикулярный плоскости AD_1E. Этот вектор должен быть перпендикулярным векторам $\overline{AE}$ и $\overline{AD_1}$ и поэтому

$$\begin{cases} \overline{n} \cdot \overline{AE} = 0 \\ \overline{n} \cdot \overline{AD_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{2} + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = -z. \end{cases}$$

Пусть $z = -1$, тогда $x = 1$, $y = 2$ и $\overline{n} = (1;2;-1)$.

Найдем вектор $\overline{m} = (x;y;z)$, перпендикулярный плоскости D_1FC. Этот вектор должен быть перпендикулярным векторам $\overline{CD_1}$ и $\overline{CF}$ и поэтому

$$\begin{cases} \overline{m} \cdot \overline{CD_1} = 0 \\ \overline{m} \cdot \overline{CF} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ -\dfrac{x}{2} + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 2z. \end{cases}$$

Пусть $z = 1$, тогда $x = 2$, $y = 1$ и $\overline{m} = (2;1;1)$.

Для нахождения искомого угла φ используем формулу $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overline{n} \cdot \overline{m}\right|}{\left|\overline{n}\right| \cdot \left|\overline{m}\right|}$. Так как

$\overline{n} \cdot \overline{m} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 3$, $\left|\overline{n}\right| = \sqrt{6}$, $\left|\overline{m}\right| = \sqrt{6}$,

то $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$, откуда $\varphi = 60^\circ$.

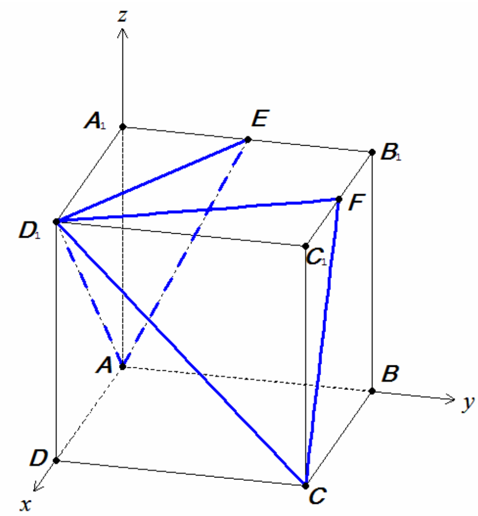


Рис. 12

Ответ: 60°.

11. Векторный метод

Пример 15. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E=\frac{1}{3}AD_1$, $D_1F=\frac{2}{3}D_1B_1$. Найдите длину отрезка EF.

Решение. Пусть $\overline{AD}=\bar a$, $\overline{AB}=\bar b$, $\overline{AA_1}=\bar c$ (рис. 1), тогда $|\bar a|=|\bar b|=|\bar c|=1$, $\bar a\cdot\bar b=\bar a\cdot\bar c=\bar b\cdot\bar c=0$.

Выразим вектор $\overline{FE}$ через базисные векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$:

$$\overline{FE}=\overline{EA}+\overline{AB_1}+\overline{B_1F}=-\frac{2}{3}(\bar a+\bar c)+(\bar b+\bar c)+\frac{1}{3}(\bar a-\bar b)=$$

$=-\frac{1}{3}\bar a+\frac{2}{3}\bar b+\frac{1}{3}\bar c$. Тогда

$$\left|\overline{FE}\right|=\sqrt{\overline{FE}^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\bar a+\frac{2}{3}\bar b+\frac{1}{3}\bar c\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=$$

$$=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt6}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt6}{3}$.

Пример 16. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки D_1 до прямой PQ, где P и Q – середины соответственно ребер A_1B_1 и BC.

Решение. Пусть $\overline{AD}=\bar a$, $\overline{AB}=\bar b$, $\overline{AA_1}=\bar c$ (рис. 1), тогда $|\bar a|=|\bar b|=|\bar c|=1$, $\bar a\cdot\bar b=\bar a\cdot\bar c=\bar b\cdot\bar c=0$.

Выразим вектор $\overline{PQ}$ через базисные векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$:

$$\overline{PQ}=\overline{PB_1}+\overline{B_1B}+\overline{BQ}=\frac{1}{2}\bar b-\bar c+\frac{1}{2}\bar a=\frac{1}{2}\bar a+\frac{1}{2}\bar b-\bar c$$

. $\overline{PD_1}=-\frac{1}{2}\bar b+\bar a$. Пусть $D_1N\perp PQ$, где $N\in PQ$. Выразим вектор $\overline{D_1N}$, учитывая коллинеарность векторов $\overline{PN}$ и $\overline{PQ}$: $\overline{D_1N}=\overline{PN}-\overline{PD_1}=x\cdot\overline{PQ}-\overline{PD_1}$. Так как $\overline{D_1N}\perp\overline{PQ}$, то $\overline{D_1N}\cdot\overline{PQ}=0$. Отсюда получаем $\left(x\cdot\overline{PQ}-\overline{PD_1}\right)\cdot\overline{PQ}=0$, $x\cdot\overline{PQ}^2=\overline{PD_1}\cdot\overline{PQ}$,

$$x\cdot\left(\frac{1}{2}\bar a+\frac{1}{2}\bar b-\bar c\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\bar b+\bar a\right)\left(\frac{1}{2}\bar a+\frac{1}{2}\bar b-\bar c\right),$$

$$x\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4},\ x=\frac{1}{6}.$$

$$\overline{D_1N}=\frac{1}{6}\cdot\overline{PQ}-\overline{PD_1}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\bar a+\frac{1}{2}\bar b-\bar c\right)+\frac{1}{2}\bar b-\bar a=$$

$$=-\frac{11}{12}\bar a+\frac{7}{12}\bar b-\frac{1}{6}\bar c.$$

Длина вектора

$$\left|\overline{D_1N}\right|=\sqrt{\overline{D_1N}^2}=\sqrt{\left(-\frac{11}{12}\bar a+\frac{7}{12}\bar b-\frac{1}{6}\bar c\right)^2}=.$$

$$=\sqrt{\frac{121}{144}+\frac{49}{144}+\frac{1}{36}}=\frac{\sqrt{174}}{12}.$$

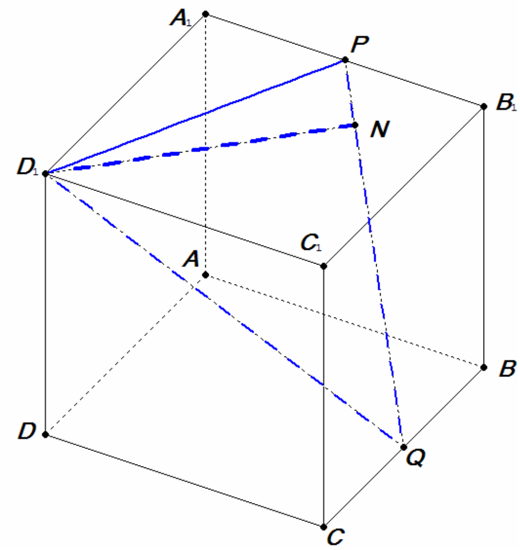


Рис. 13

Ответ: $\frac{\sqrt{174}}{12}$.

Пример 17. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1.

Решение. Пусть $\overline{AD}=\bar a$, $\overline{AB}=\bar b$, $\overline{AA_1}=\bar c$ (рис. 14), тогда $|\bar a|=|\bar b|=|\bar c|=1$, $\bar a\cdot\bar b=\bar a\cdot\bar c=\bar b\cdot\bar c=0$.

Выразим некоторые векторы через базисные векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$: $\overline{DB}=\bar b-\bar a$, $\overline{DC_1}=\bar b+\bar c$, $\overline{C_1A_1}=-\bar a-\bar b$. Пусть $MA_1\perp BDC_1$, где $M\in BDC_1$. Вектор $\overline{C_1M}=x\cdot\overline{DB}+y\cdot\overline{DC_1}$, поэтому

$$\overline{MA_1}=\overline{C_1A_1}-\overline{C_1M}=\overline{C_1A_1}-\left(x\cdot\overline{DB}+y\cdot\overline{DC_1}\right).$$

Далее имеем $\begin{cases}\overline{MA_1}\perp\overline{DB}\\ \overline{MA_1}\perp\overline{DC_1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{MA_1}\cdot\overline{DB}=0\\ \overline{MA_1}\cdot\overline{DC_1}=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\overline{C_1A_1}\cdot\overline{DB}-\left(x\cdot\overline{DB}^2+y\cdot\overline{DC_1}\cdot\overline{DB}\right)=0\\ \overline{C_1A_1}\cdot\overline{DC_1}-\left(x\cdot\overline{DB}\cdot\overline{DC_1}+y\cdot\overline{DC_1}^2\right)=0\end{cases}$$

Так как $\overline{C_1A_1}\cdot\overline{DB}=\left(-\bar a-\bar b\right)\left(\bar b-\bar a\right)=\bar a^2-\bar b^2=0$, $\overline{DC_1}\cdot\overline{DB}=\left(\bar b+\bar c\right)\left(\bar b-\bar a\right)=\bar b^2=1$,

$\overline{DC_1}\cdot\overline{C_1A_1}=\left(\bar b+\bar c\right)\left(-\bar a-\bar b\right)=-\bar b^2=-1$,

$\overline{DB}^2=\left(\bar b-\bar a\right)^2=\bar b^2+\bar a^2=2$,

$\overline{DC_1}^2=\left(\bar b+\bar c\right)^2=\bar b^2+\bar c^2=2$, то имеем

$$\begin{cases}0-(x\cdot 2+y\cdot 1)=0\\ -1-(x\cdot 1+y\cdot 2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=0\\ x+2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\overline{MA_1}=-\bar a-\bar b-\frac{1}{3}\left(\bar b-\bar a\right)+\frac{2}{3}\left(\bar b+\bar c\right)=-\frac{2}{3}\bar a-\frac{2}{3}\bar b+\frac{2}{3}\bar c$$

$$\left|\overline{MA_1}\right|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\bar a-\frac{2}{3}\bar b+\frac{2}{3}\bar c\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

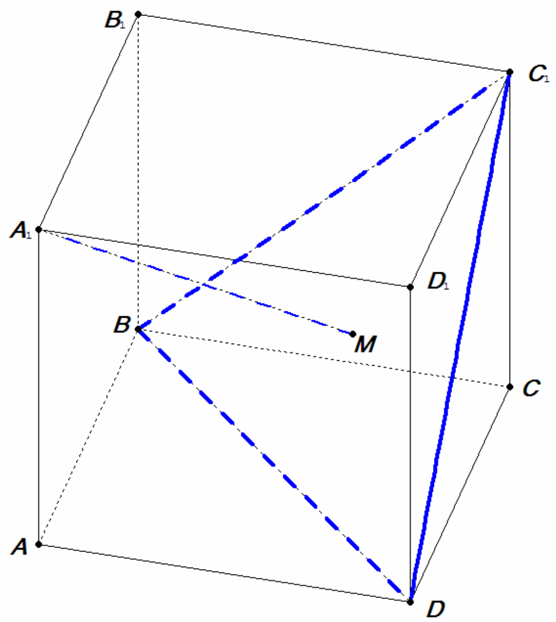


Рис. 14

Пример 18. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD.

Решение. Пусть $\overline{AD}=\bar a$, $\overline{AB}=\bar b$, $\overline{AA_1}=\bar c$ (рис. 15), тогда $\left|\bar a\right|=\left|\bar b\right|=\left|\bar c\right|=1$, $\bar a\cdot\bar b=\bar a\cdot\bar c=\bar b\cdot\bar c=0$.

Если M и N – основания общего перпендикуляра прямых AB_1 и BD соответственно, то имеем

$\overline{AB_1}=\bar b+\bar c$, $\overline{DB}=\bar b-\bar a$,

$\overline{MN}=\overline{MA}+\overline{AD}+\overline{DN}=x\cdot\overline{AB_1}+\bar a+y\cdot\overline{DB}=$

$=x\left(\bar b+\bar c\right)+\bar a+y\left(\bar b-\bar a\right)=$

$=(1-y)\cdot\bar a+(x+y)\cdot\bar b+x\cdot\bar c$.

Вектор $\overline{MN}$ перпендикулярен векторам $\overline{AB_1}$ и $\overline{DB}$, поэтому имеем

$$\begin{cases}\overline{MN}\cdot\overline{AB_1}=0\\ \overline{MN}\cdot\overline{BD}=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left((1-y)\cdot\bar a+(x+y)\cdot\bar b+x\cdot\bar c\right)\left(\bar b+\bar c\right)=0\\ \left((1-y)\cdot\bar a+(x+y)\cdot\bar b+x\cdot\bar c\right)\left(\bar b-\bar a\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)\cdot\bar b^2+x\cdot\bar c^2=0\\ -(1-y)\cdot\bar a^2+(x+y)\cdot\bar b^2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2x+y=0\\ x+2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Итак,

$$\overline{MN}=-\frac{1}{3}\left(\bar b+\bar c\right)+\bar a+\frac{2}{3}\left(\bar b-\bar a\right)=\frac{1}{3}\bar a+\frac{1}{3}\bar b-\frac{1}{3}\bar c,$$

$$\left|\overline{MN}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\bar a+\frac{1}{3}\bar b-\frac{1}{3}\bar c\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

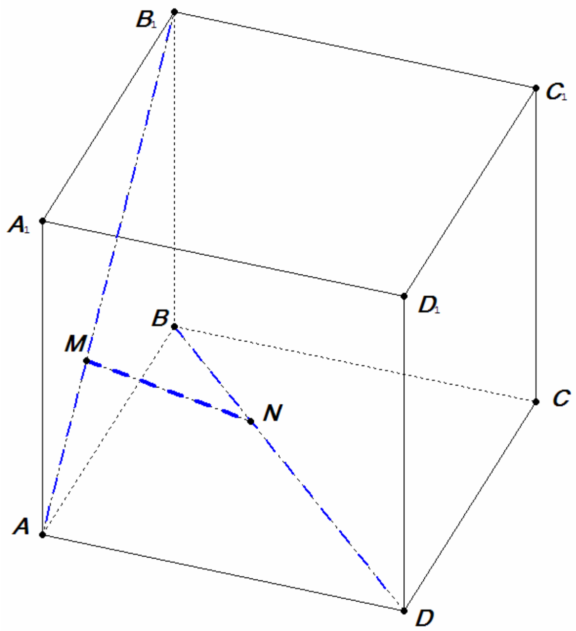


Рис. 15

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 19. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми EF и PQ, где E, F, P, Q – середины ребер DD_1, BC, AA_1 и B_1C_1 соответственно.

Решение. Пусть $\overline{AD}=\bar{a}$, $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{AA_1}=\bar{c}$ (рис. 16), где $|\bar{a}|=|\bar{b}|=|\bar{c}|=1$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}=0$. Тогда $\overline{EF}=\overline{ED}+\overline{DC}+\overline{CF}=-\frac{1}{2}\bar{c}+\bar{b}-\frac{1}{2}\bar{a}$,

$\overline{PQ}=\overline{PA_1}+\overline{A_1B_1}+\overline{B_1Q}=\frac{1}{2}\bar{c}+\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{a}$, откуда находим

$$\overline{PQ}\cdot\overline{EF}=\left(\frac{1}{2}\bar{c}+\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{a}\right)\left(-\frac{1}{2}\bar{c}+\bar{b}-\frac{1}{2}\bar{a}\right)=$$

$$=\bar{b}^2-\frac{1}{4}\bar{c}^2-\frac{1}{4}\bar{a}^2=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$|\overline{PQ}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\bar{c}+\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\bar{c}^2+\bar{b}^2+\frac{1}{4}\bar{a}^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$|\overline{EF}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\bar{c}+\bar{b}-\frac{1}{2}\bar{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\bar{c}^2+\bar{b}^2+\frac{1}{4}\bar{a}^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$\cos\varphi=\dfrac{|\overline{PQ}\cdot\overline{EF}|}{|\overline{PQ}|\cdot|\overline{EF}|}=\frac{1}{2}:\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$, $\varphi=\arccos\frac{1}{3}$, где φ - искомый угол.

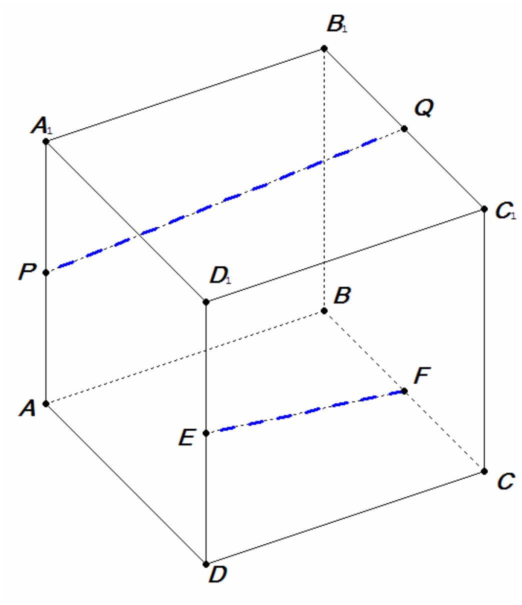


Рис. 16

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Пример 20. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой *DE*, где *E* – середина апофемы *SF* грани *ASB*, и плоскостью *ASC*.

Решение. Так как прямая *OD* перпендикулярна плоскости *ASC*, то вектор $\overline{OD}$ является вектором нормали плоскости *ASC*.

Пусть $\overline{AD}=\bar{a}$, $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{AS}=\bar{c}$ (рис. 17), где $|\bar{a}|=|\bar{b}|=|\bar{c}|=1$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$,

$\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}=|\bar{a}|^2\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$. Тогда

$$\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{AD}=-\frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b})+\bar{a}=\frac{1}{2}(\bar{a}-\bar{b}),$$

$$\overline{DE}=\overline{DA}+\overline{AF}+\overline{FE}=-\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}+\frac{1}{2}\left(\bar{c}-\frac{1}{2}\bar{b}\right)=$$

$$=-\bar{a}+\frac{1}{4}\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c},$$

$$\overline{DE}\cdot\overline{OD}=\left(-\bar{a}+\frac{1}{4}\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}\right)\left(\frac{1}{2}\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{b}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\bar{a}^2-\frac{1}{8}\bar{b}^2+\frac{1}{4}\bar{a}\cdot\bar{c}-\frac{1}{4}\bar{b}\cdot\bar{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8},$$

$$|\overline{DE}|=\sqrt{\left(-\bar{a}+\frac{1}{4}\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\bar{a}^2+\frac{1}{16}\bar{b}^2+\frac{1}{4}\bar{c}^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{15}{16}},$$

$$|\overline{OD}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{|\overline{DE}\cdot\overline{OD}|}{|\overline{DE}|\cdot|\overline{OD}|}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot\sqrt{2}=\frac{3}{\sqrt{30}},$$

$\varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{30}}$, где φ - искомый угол.

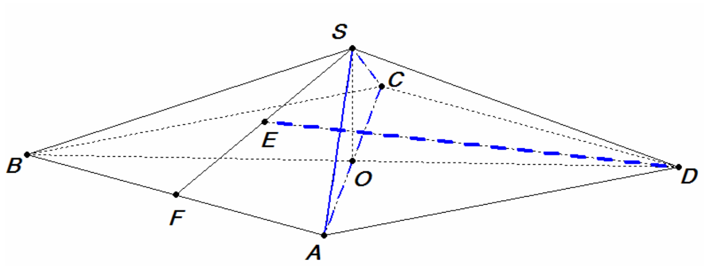


Рис. 17

Ответ: $\arcsin\frac{3}{\sqrt{30}}$.

Пример 21. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C и BC_1D.

Решение. Пусть $\overline{AD} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AA_1} = \overline{c}$ (рис. 18), где $|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = 1$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{b} \cdot \overline{c} = 0$.

Векторы $\overline{BD_1}$ и $\overline{CA_1}$ являются векторами нормали плоскостей AB_1C и BC_1D соответственно, так как $BD_1 \perp AB_1C$ и $CA_1 \perp BC_1D$. Тогда

$\overline{BD_1} = \overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{CA_1} = -\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$,

$$\overline{BD_1} \cdot \overline{CA_1} = (\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})(-\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}) = -\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2 = 1$$

$$\left|\overline{BD_1}\right| = \sqrt{(\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})^2} = \sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2} = \sqrt{3},$$

$$\left|\overline{CA_1}\right| = \sqrt{(-\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})^2} = \sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2} = \sqrt{3},$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{BD_1} \cdot \overline{CA_1}\right|}{\left|\overline{BD_1}\right| \cdot \left|\overline{CA_1}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}, \ \varphi = \arccos\frac{1}{3},$$

где φ - искомый угол.

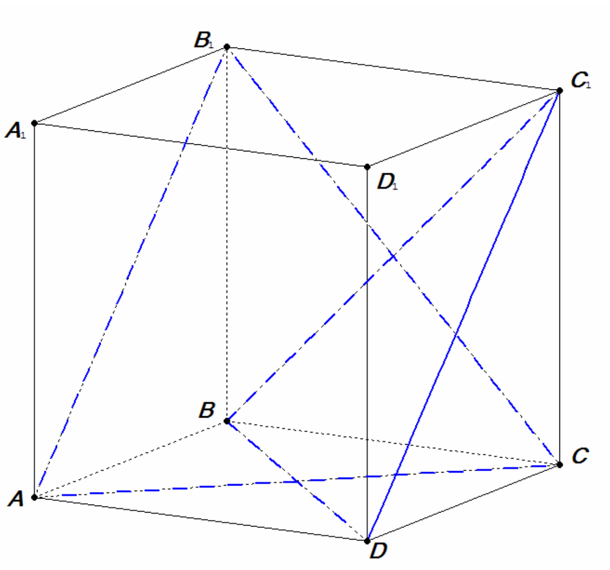


Рис. 18

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

12. Метод объемов

• При составлении уравнения используется объем фигуры, выраженный двумя независимыми способами.

Пример 22. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите расстояние от точки C до плоскости BDC_1.

Решение. Искомое расстояние x равно высоте CQ (рис. 19), опущенной в пирамиде $BCDC_1$ из вершины C на основание BDC_1.

Объем этой пирамиды равен $\frac{1}{3}S_{BCD} \cdot CC_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot CC_1 = \frac{a^3}{6}$. С другой стороны, так как треугольник BDC_1 равносторонний со стороной $a\sqrt{2}$, объем пирамиды равен $\frac{1}{3}S_{BC_1D} \cdot CQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \cdot x$. Отсюда получаем уравнение $\frac{a^3}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \cdot x$, из которого находим $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

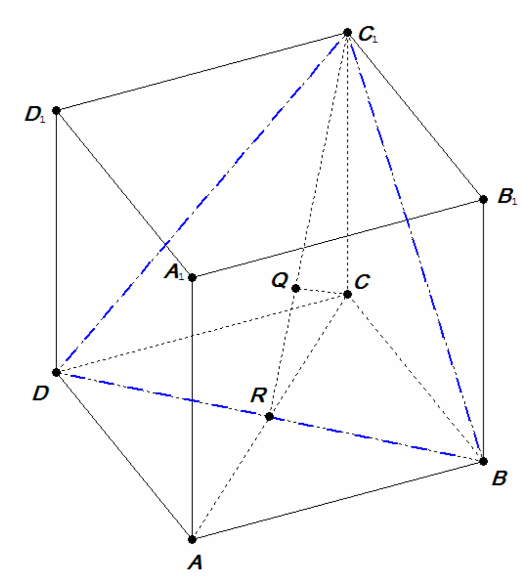


Рис. 19

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

13. Метод ключевых задач

Ключевая задача № 1

• Если S – площадь фигуры Φ, расположенной в плоскости α, S' - площадь проекции фигуры Φ на плоскость β, то справедлива формула $\cos\angle(\alpha;\beta) = \frac{S'}{S}$.

Пример 23. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C и ABC.

Решение. Пусть α - искомый угол. Используем соотношение $S_{ABC} = S_{AB_1C} \cdot \cos\alpha$ (рис. 20), где $S_{ABC} = \frac{1}{2}$, $S_{AB_1C} = \frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (треугольник AB_1C равносторонний). Отсюда имеем $\cos\alpha = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

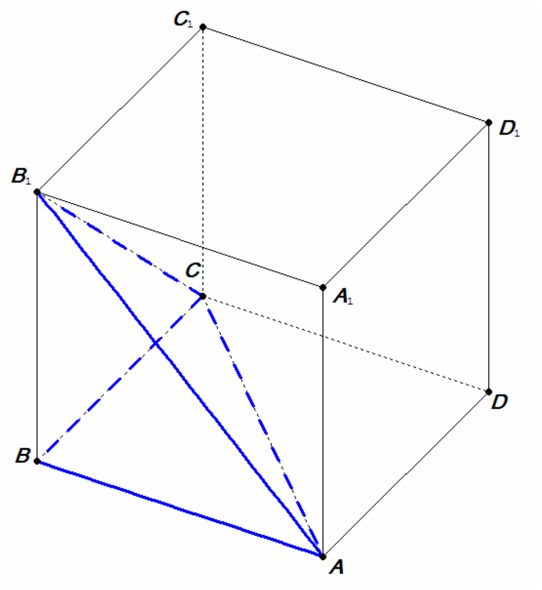


Рис. 20

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

<u>Ключевая задача № 2 (теорема о трех синусах)</u>

• Пусть в одной из граней двугранного угла, величина которого равна α, проведена прямая, составляющая с ребром двугранного угла угол β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$), γ - величина угла между этой прямой и другой гранью. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta.$$

Пример 24. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C и ABC.

Решение. Пусть α - искомый угол (рис. 20). Так как $\beta = \angle B_1AC = 60^\circ$, $\gamma = \angle B_1AB = 45^\circ$, то имеем $\sin 45^\circ = \sin\alpha \sin 60^\circ$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

<u>Ключевая задача № 3 (теорема о трех косинусах)</u>

• Пусть α - величина угла между наклонной l и ее проекцией на некоторую плоскость, β - величина угла между проекцией наклонной l и прямой, проведенной через основание той же наклонной в плоскости проекции, и γ - величина угла между наклонной l и прямой, проведенной через ее основание в плоскости проекции. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta.$$

Пример 25. Угол между боковыми ребрами правильной четырехугольной пирамиды, не лежащими в одной грани, равен 120°. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

Решение. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ проведем диагональное сечение ASC (рис. 21); SD – наклонная к плоскости сечения, SO - высота пирамиды и проекция SD на эту плоскость, SC – прямая, проведенная в плоскости ASC через основание наклонной. По условию $\angle ASC = 120^\circ$.

На основании теоремы о трех косинусах имеем:

$$\cos\angle DSC = \cos\angle DSO \cdot \cos\angle CSO.$$

Отсюда

$$\cos\angle DSC = \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4},$$

$$\angle DSC = \arccos\frac{1}{4}.$$

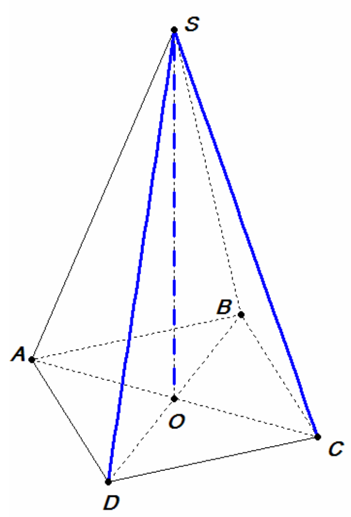


Рис. 21

Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$.

Ключевая задача № 4 (теорема косинусов для трехгранного угла)

• Пусть для трехгранного угла плоские углы равны α, β и γ и двугранный угол при ребре, противолежащий плоскому углу γ, равен φ. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

Пример 26. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и DM, где M – середина ребра D_1C_1.

Решение. Пусть ребро куба равно 1, N – середина ребра A_1B_1, тогда искомый угол γ равен углу между AD_1 и AN (рис. 22). Используем теорему косинусов для трехгранного угла с вершиной A, в котором $\angle A_1AD_1 = \alpha$, $\angle A_1AN = \beta$, $\angle NAD_1 = \gamma$. Так как $\varphi = 90^\circ$, то имеем $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

Из треугольника A_1AD_1 находим $\cos\alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, из треугольника A_1AN получаем $\cos\beta = \frac{AA_1}{AN} = 1 : \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Отсюда $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $\gamma = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$.

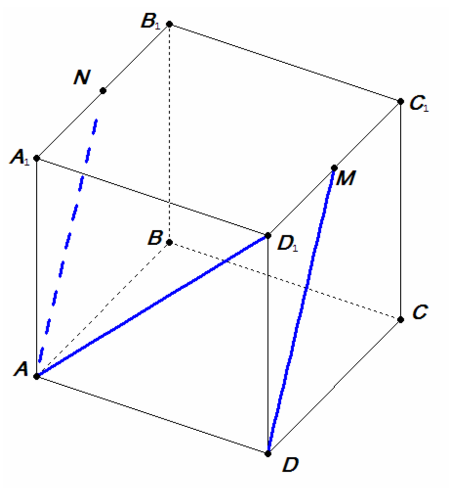


Рис. 22

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Ключевая задача № 5

• Если некоторая прямая образует углы α, β и γ с тремя попарно перпендикулярными прямыми, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Пример 27. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его диагональ B_1D составляет с ребром AD угол 45°, а с ребром DC угол 60°, Найдите угол между прямыми B_1D и DD_1.

Решение. Используем соотношение $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, где $\angle ADB_1 = \alpha$, $\angle CDB_1 = \beta$, $\angle D_1DB_1 = \gamma$ (рис. 23). Получаем $\cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2\gamma = 1$,

$\cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, $\gamma = 60^\circ$.

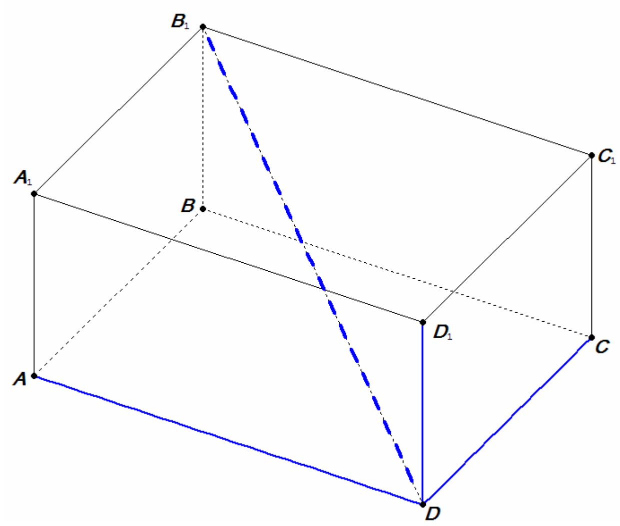


Рис. 23

Ответ: 60°.

Ключевая задача № 6

• Если AB и CD – скрещивающиеся ребра треугольной пирамиды $ABCD$, r – расстояние между ними, $AB = a$, $CD = b$, φ - угол между AB и CD, V – объем пирамиды $ABCD$, то

$$r = \frac{6V}{ab\sin\varphi}.$$

Пример 28. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1.

Решение. Найдем искомое расстояние по формуле $r = \frac{6V}{AB_1 \cdot BD_1 \sin\varphi}$, где V – объем пирамиды ABB_1D_1 (рис. 24), $AB_1=\sqrt{2}$, $BD_1=\sqrt{3}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ - угол между прямыми BD_1 и AB_1. Так как площадь основания ABB_1 пирамиды ABB_1D_1 равна $\frac{1}{2}$, а высота A_1D_1 равна 1, то $V=\frac{1}{6}$. Следовательно, $r=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

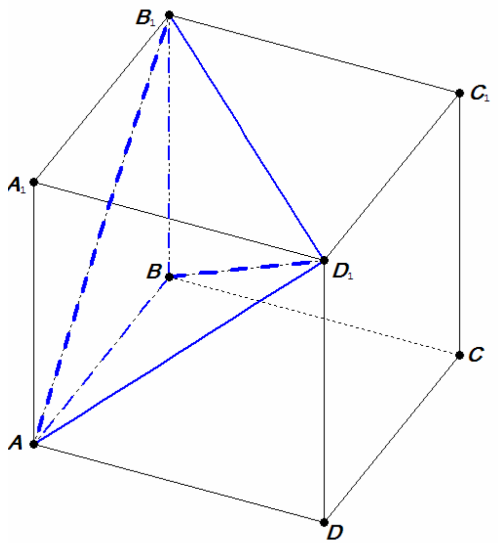


Рис. 24

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Литература

1. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).

2. ЕГЭ. Математика. Тематическая тетрадь. 11 класс / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров. – М.: МЦНМО, Издательство «Экзамен», 2010.

3. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

4. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.

5. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.

6. Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.

7. www.mathege.ru - Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк заданий)

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2010

Задания С3

Корянов А.Г. *г.Брянск*

Методы решения

1. Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем
   а) иррациональные неравенства;
   б) показательные неравенства;
   в) логарифмические неравенства;
   г) неравенства, содержащие знак модуля
2. Расщепление неравенств
3. Метод перебора
4. Метод интервалов
5. Введение новой переменной
6. Метод рационализации
7. Использование свойств функции
   а) область определения функции;
   б) ограниченность функции;
   в) монотонность функции;

Метод сведения неравенства к равносильной системе или совокупности систем

Некоторые стандартные схемы для решения иррациональных неравенств:

- $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)} \ge \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x) \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g^2(x) \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$
- $\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^2(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x) \Leftrightarrow f(x) \vee g^{2n+1}(x)$,

где символ $\vee$ заменяет один из знаков: $>, <, \ge, \le$.

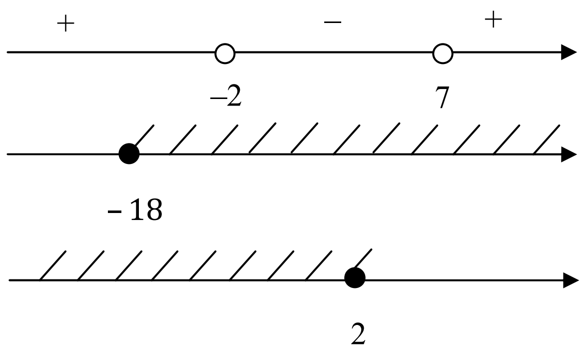
Пример 1. Решите неравенство

$$\sqrt{x+18} < 2 - x$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x+18 < (2-x)^2 \\ x+18 \ge 0 \\ 2-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+2) > 0 \\ x \ge -18 \\ x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -18 \le x < -2$$



Ответ: $-18 \le x < -2$.

Пример 2. (2010) Решите неравенство

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение.

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7} \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7-x)(x-1) < x^3 - 6x^2 + 14x - 7 \\ 1 < x \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0 \\ 1 < x \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3) > 0 \\ 1 < x \le 7 \end{cases}$$

Ответ: $1 < x < 2$, $3 < x \le 7$.

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены (отброшены) значения переменной, при которых подкоренные выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Некоторые стандартные схемы для решения показательных неравенств:

- $(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$

- $(\varphi(x))^{f(x)} \ge (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \\ \varphi(x) = 1 \end{array}\right.$

В частности:
- Если число $a > 1$, то
$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$
- Если число $0 < a < 1$, то
$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

Пример 3. (2010) Решите неравенство
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > 1.$$

Решение. Так как функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ убывает на $\mathbb{R}$, а функция $y = \log_2 t$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$, то имеем:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > 1 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 < 1, \\ x^2 - 1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} < x < -1 \\ 1 < x < \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right)$.

Некоторые стандартные схемы для решения логарифмических неравенств:

- $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

В частности:
- Если число $a > 1$, то
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$$
- Если число $0 < a < 1$, то
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x) > 0$$

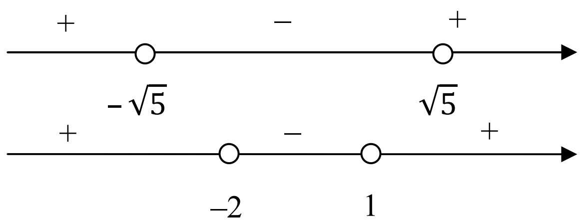
- $\log_{\varphi(x)} f(x) \ge \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

В частности:
- Если число $a > 1$, то
$$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \ge g(x) > 0$$
- Если число $0 < a < 1$, то
$$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) \ge f(x) > 0$$

Пример 4. (2010) Решите неравенство
$$\log_{0,1}\left(x^2 + x - 2\right) > \log_{0,1}(x+3).$$

Решение. Так как функция $y=\log_{0,1} t$ убывает на промежутке $(0;+\infty)$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+x-2<x+3 \\ x^2+x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})<0 \\ (x-1)(x+2)>0 \end{cases}$$



Ответ: $\left(-\sqrt{5};-2\right)$; $\left(1;\sqrt{5}\right)$.

Некоторые стандартные схемы для решения неравенств, содержащих знак модуля:

- $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>-g(x), \end{cases}$
- $|f(x)|\le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\le g(x), \\ f(x)\ge -g(x), \end{cases}$
- $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x) \\ f(x)<-g(x) \end{array}\right.$
- $|f(x)|\ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)\ge g(x) \\ f(x)\le -g(x) \end{array}\right.$
- $|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))>0$
- $|f(x)|\ge|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)\ge g^2(x) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))\ge 0$

Пример 5. Решите неравенство

$$\left|x^7+4x^5+x^2+2x-3\right|<x^7+4x^5-x^2-2x+3$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^7+4x^5+x^2+2x-3<x^7+4x^5-x^2-2x+3 \\ x^7+4x^5+x^2+2x-3>-(x^7+4x^5-x^2-2x+3) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2+2x-3<0 \\ x^5\left(x^2+4\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1$$

Ответ: $0<x<1$.

Метод расщепления неравенств

- $f(x)\cdot g(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\le 0, \\ g(x)\le 0. \end{cases} \end{array}\right.$
- $f(x)\cdot g(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)\le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\le 0, \\ g(x)\ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)>0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\le 0, \\ g(x)<0. \end{cases} \end{array}\right.$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)<0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\le 0, \\ g(x)>0. \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 6. (2010) Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \ge 4\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2.$$

Решение. Приведем данное неравенство к следующему виду:

$$\left(x+\frac{3}{x}-4\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \ge 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности систем:

$$1)\ \begin{cases} x+\frac{3}{x}-4\ge 0 \\ \left(\frac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)(x-3)}{x}\ge 0 \\ x\ne 4 \\ x\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\le 1 \\ 3\le x<4 \\ 4<x\le 5 \end{array}\right.$$

$$2)\ \begin{cases} x+\frac{3}{x}-4\le 0 \\ \left(\frac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)(x-3)}{x}\ge 0 \\ |x-3|=1 \\ x\ne 4 \\ x\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ x = 2.$

Ответ: $0 < x \le 1$, $x = 2$, $3 \le x < 4$, $4 < x \le 5$.

Перебор случаев

Пример 7. (2010) Решите неравенство

$$2^x + 2^{|x|} \ge 2\sqrt{2}.$$

Решение. Данное неравенство определено при всех значениях x. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \ge 0$, тогда неравенство примет следующий вид:

$2^x + 2^x \ge 2\sqrt{2} \ \Leftrightarrow\ 2^x \ge \sqrt{2} \ \Leftrightarrow\ x \ge \dfrac{1}{2}$ (в силу возрастания функции $y = 2^t$).

2. Если $x < 0$, то имеем:

$$2^x + \frac{1}{2^x} \ge 2\sqrt{2} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} t^2 - 2\sqrt{2}\cdot t + 1 \ge 0 \\ 2^x = t \\ t > 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \ge \sqrt{2}+1 \\ t \le \sqrt{2}-1 \end{array}\right. \\ 2^x = t \\ t > 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 2^x \ge \sqrt{2}+1 \\ 2^x \le \sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \log_2(\sqrt{2}+1) \\ x \le \log_2(\sqrt{2}-1) \end{array}\right.$$

Сравним два числа $\log_2(\sqrt{2}+1)$ и $\frac{1}{2}$.

Так как $\sqrt{2}+1 > \sqrt{2}$, то $\log_2(\sqrt{2}+1) > \log_2\sqrt{2}$ или $\log_2(\sqrt{2}+1) > \dfrac{1}{2}$.

Объединим решения, полученные в первом и втором случаях.

Ответ: $\left(-\infty; \log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Пример 8. (2010) Решите неравенство

$$\log_2\left(x^2-4\right) - 3\log_2\frac{x+2}{x-2} > 2.$$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условием:

$(x-2)(x+2) > 0$. Отсюда получаем два промежутка: $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x > 2$.

Тогда неравенство принимает следующий вид:

$\log_2(x-2) + \log_2(x+2) - 3\log_2(x+2) + 3\log_2(x-2) > 2;$

или $2\log_2(x-2) - \log_2(x+2) > 1$.

Отсюда $(x-2)^2 > 2(x+2)$, $x(x-6) > 0$. С учетом $x > 2$ получаем $x > 6$.

2. Пусть $x < -2$.

В этом случае неравенство принимает следующий вид:

$\log_2(2-x) + \log_2(-x-2) - 3\log_2(-x-2) + 3\log_2(2-x) > 2;$

или $2\log_2(2-x) - \log_2(-x-2) > 1$.

Отсюда $(2-x)^2 > 2(-x-2)$,

$x^2 - 2x + 8 > 0$. Так как уравнение $x^2 - 2x + 8 = 0$ не имеет корней и старший коэффициент больше нуля, то последнее неравенство выполняется при всех значениях x.

С учетом второго случая имеем $x < -2$.

Ответ: $x < -2$ или $x > 6$.

Метод интервалов

Пример 9. (2010) Решите неравенство

$$\left(3^{\frac{x-2}{2}} - 1\right)\sqrt{3^x - 10\sqrt{3^x} + 9} \ge 0.$$

Решение. Используем метод интервалов.

1). Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left(3^{\frac{x-2}{2}} - 1\right)\sqrt{3^x - 10\sqrt{3^x} + 9}.$$

2) Найдем область определения функции $f(x)$.

Для этого решим неравенство $3^x - 10\sqrt{3^x} + 9 \ge 0$ (*), используя метод интервалов.

а) Пусть $g(x) = 3^x - 10\sqrt{3^x} + 9$.

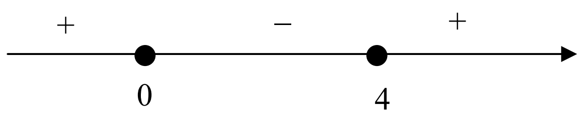
б) $D(g) = R$

в) $g(x) = 0$ $3^x - 10\sqrt{3^x} + 9 = 0$,

$t^2 - 10t + 9 = 0$, где $\sqrt{3^x} = t$. Имеем $t_1 = 1$ и $t_2 = 9$, тогда $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

г) Промежутки знакопостоянства функции $g(x)$.

$g(1) < 0$. Используя свойство знакочередования значений функции $g(x)$, находим решения неравенства (*): $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.



Следовательно, $D(f) = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

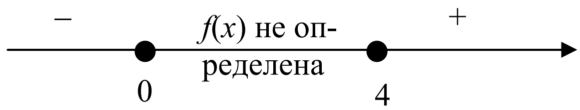
3) Нули функции $f(x)$.

$$\left(3^{\frac{x-2}{2}} - 1\right)\sqrt{3^x - 10\sqrt{3^x} + 9} = 0.$$

Получаем $x = 2$, $2 \notin D(f)$, $x = 0$ или $x = 4$.

4) Промежутки знакопостоянства функции $f(x)$.

$f(-1) < 0$, $f(5) > 0$. Отсюда $f(x) \ge 0$ при всех значениях $x \in \{0\} \cup [4; +\infty)$.



Ответ: $\{0\}\cup[4;+\infty)$.

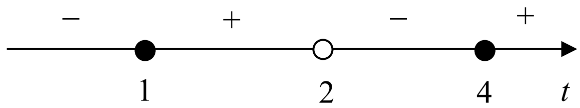
Метод введения новой переменной

Пример 10. (2010) Решите неравенство

$$\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}-2}\le 3.$$

Решение. Пусть $\sqrt{x}=t$, тогда получаем рациональное неравенство

$$t-\frac{2}{t-2}\le 3, \frac{(t-1)(t-4)}{t-2}\le 0.$$



Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} t\le 1 \\ 2<t\le 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}\le 1 \\ 2<\sqrt{x}\le 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x\le 1 \\ 4<x\le 16 \end{array}\right.$$

Ответ: $[0;1]\cup(4;16]$.

Пример 11. (2010) Решите неравенство

$$\log_{x+3}\left(9-x^2\right)-\frac{1}{16}\log_{x+3}^2(x-3)^2\ge 2.$$

Решение. Преобразуем неравенство

$$\log_{x+3}\left((3-x)(3+x)\right)-\frac{1}{4}\log_{x+3}^2|x-3|\ge 2$$

Найдем, при каких значениях x левая часть неравенства имеет смысл:

$$\begin{cases} 9-x^2>0 \\ x+3>0 \\ x+3\ne 1 \\ x-3\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x>0 \\ x+3>0 \\ x+3\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x>-3 \\ x\ne -2 \end{cases}$$

Получаем: $-3<x<-2$ или $-2<x<3$.
Значит, $|x-3|=3-x$ при всех допустимых значениях x. Поэтому

$$\log_{x+3}(3-x)+\log_{x+3}(3+x)-\frac{1}{4}\log_{x+3}^2(3-x)\ge 2$$

Сделаем замену $\log_{x+3}(3-x)=y$. Получаем $y-\frac{1}{4}y^2\ge 1;\ (y-2)^2\le 0; y=2.$
Таким образом, $\log_{x+3}(3-x)=2$, откуда $(x+3)^2=3-x;\ x^2+7x+6=0$. Корни уравнения: –6 и –1.
Условию $-3<x<-2$ или $-2<x<3$ удовлетворяет только $x=-1$.
Ответ: –1.

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
При верном решении допущена вычислительная ошибка, не влияющая на правильность последовательности рассуждений, и, возможно, приведшая к неверному ответу.	2
Получен ответ, содержащий наряду с правильным постороннее решение.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Метод рационализации (метод декомпозиции, метод замены множителей, метод замены функции, правило знаков)

● Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой неравенство $G(x)\vee 0$ равносильно неравенству $F(x)\vee 0$ в области определения выражения $F(x)$.

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где f,g,h,p,q - выражения с переменной x $(h>0; h\ne 1; f>0; g>0)$, a – фиксированное число ($a>0; a\ne 1$).

№	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$\log_a f-\log_a g$ $\log_a f-1$ $\log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$\log_h f-\log_h g$ $\log_h f-1$ $\log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h-\log_g h$ $(g\ne 1,\ f\ne 1)$	$(f-1)(g-1)\times$ $\times(h-1)(g-f)$
4 4а	$h^f-h^g\quad(h>0)$ h^f-1	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	f^h-g^h $(f>0; g>0)$	$(f-g)h$
6	$\|f\|-\|g\|$	$(f-g)(f+g)$

<u>Некоторые следствия</u> (с учетом области определения неравенства):

- $\log_h f \cdot \log_p q \vee 0 \iff$
$\iff (h-1)(f-1)(p-1)(q-1) \vee 0$

- $\log_h f + \log_h g \vee 0 \iff (fg-1)(h-1) \vee 0$

- $\sqrt{f} - \sqrt{g} \vee 0 \iff f - g \vee 0$

- $\frac{h^f - h^g}{h^p - h^q} \vee 0 \iff \frac{f-g}{p-q} \vee 0$

Пример 12. (2010) Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (2x+2)(x^2-2x-3) < 0 \\ 2x+3 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x+1)(x+1)(x-3) < 0 \\ x > -1{,}5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-1{,}5;-1) \cup (-1;0) \cup (0;3)$.

Пример 13. (2010) Решите неравенство

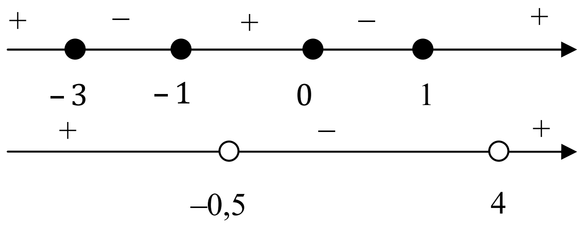
$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right) \le 2.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right) - \log_{|x+2|}(x+2)^2 \le 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (|x+2|-1)(4+7x-2x^2-x^2-4x-4) \le 0 \\ 4+7x-2x^2 > 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ((x+2)^2-1)(-3x^2+3x) \le 0 \\ (x+0{,}5)(x-4) < 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(x+1)(x+3)(x-1) \ge 0 \\ (x+0{,}5)(x-4) < 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$$



Ответ: $(-0{,}5;0] \cup [1;4)$.

Пример 14. (2010) Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x \sqrt{3-x}\right) \ge 0.$$

Решение. Заменим данное неравенство равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\log_x \sqrt{3-x}-1\right) \ge 0 \\ \log_x \sqrt{3-x} > 0 \\ 3-x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x-3)(x-1)\left(\sqrt{3-x}-x\right) \ge 0 \\ (x-1)\left(\sqrt{3-x}-1\right) > 0 \\ x < 3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x-1)(3-x-x^2) \le 0 \\ (x-1)(3-x-1) > 0 \\ x < 3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \left(x+\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) \ge 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \frac{\sqrt{13}-1}{2} \le x < 2.$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$.

Пример 15. (2010) Решите неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \ge \log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)-\log_{2x^2-5x+3}(3-x)\geq 0$
и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases}(12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)(2-x)(-10x^2+36x-32)\geq 0\\ 12x^2-41x+35>0\\ 2x^2-5x+3>0\\ 12x^2-41x+34\neq 0\\ 2x^2-5x+2\neq 0\\ 3-x>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-2)^4\left(x-\frac{8}{5}\right)\left(x-\frac{17}{12}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq 0\\ \left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{7}{4}\right)>0\\ (x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)>0\\ \left(x-\frac{17}{12}\right)(x-2)\neq 0\\ (x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\neq 0\\ x<3\end{cases}$$

Для решения первых трех неравенств системы используем метод интервалов.
Самостоятельно рассмотрите рисунки и выберите общую часть для решения системы.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{4};2\right)\cup(2;3)$.

Использование свойств функции

а) <u>область определения функции</u>

Пример 16. Решите неравенство

$$(\sqrt{x^2-6x+5}+1)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}(\sqrt{12x-2x^2-10}+1)>0$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases}x^2-6x+5\geq 0,\\ 12x-2x^2-10\geq 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5\end{array}\right.$$

При $x=1$ получаем, что исходное неравенство обращается в неверное неравенство $0>0$.

При $x=5$ имеем верное неравенство $\frac{1}{5}>0$.

Ответ: 5.

б) <u>ограниченность функции</u>

Пример 17. Решите неравенство

$$\log_5 x\leq\sqrt{1-x^4}$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases}x>0,\\ 1-x^4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\leq 1.$$

Для всех x из полученного множества имеем $\log_5 x\leq 0$, а $\sqrt{1-x^4}\geq 0$. Следовательно, решением этого неравенства является промежуток $(0;1]$.

Ответ: $(0;1]$.

в) <u>монотонность функции</u>

Пример 18. Решите неравенство

$$\sqrt[6]{x}+2x^3+\log_3(x+2)-\sqrt{1-x}<4$$

Решение. Область определения данного неравенства есть промежуток $[0;1]$. Функция

$$y=\sqrt[6]{x}+2x^3+\log_3(x+2)-\sqrt{1-x}$$

возрастает на этом промежутке как сумма возрастающих функций. Так как $f(1)=4$, то все значения x из множества $[0;1)$ удовлетворяют исходному неравенству.

Ответ: $[0;1)$.

Упражнения

1. (2010) Решите неравенство

$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)\leq 2.$$

Ответ: $(-0{,}5;0]\cup[1;4)$.

2. (2010) Решите неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\leq\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right).$$

Ответ: $\{1\}\cup(1{,}5;3)$.

3. (2010) Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\leq 0.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

4. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_{0,2}\frac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\frac{1}{3-2x}}\ge 0.$$

Ответ: $(0,5;1)$.

5. (2010) Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

Ответ: $(-1{,}5;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)$.

6. (2010) Решите неравенство

$$\log_x\left(\log_9\left(3^x-9\right)\right)<1.$$

Ответ: $(\log_3 10;+\infty)$.

7. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)}{x}\ge 1.$$

Ответ: $\left(\log_2\frac{2}{3};0\right)$; $[1;+\infty)$.

8. (2010) Решите неравенство

$$\log_5(x+2)+\log_5(1-x)\le\log_5\left((1-x)\left(x^2-8x-8\right)\right).$$

Ответ: $-2<x\le -1$.

9. (2010) Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\ge 0.$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$.

10. (2010) Решите неравенство

$$\log_{x+1}\left(19+18x-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+1}(x-19)^2\ge 2.$$

Ответ: 3.

11. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log^2_{2x-3}\frac{1}{3x-5}+\log_{2x-3}\left(9x^2-30x+25\right)+7}{2\log_{2x-3}\left(6x^2-19x+15\right)-1}\le 3.$$

Ответ: $\frac{7}{4}$.

12. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)}\le 0.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right]$.

13. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3(x+7)}\le 0.$$

Ответ: $(-7;6)\cup[2;2{,}5)\cup(4;4{,}5]$.

14. (2010) Решите неравенство

$$\log_{0,1}\left(x^2+x-2\right)>\log_{0,1}(x+3).$$

Ответ: $\left(-\sqrt{5};-2\right)$; $\left(1;\sqrt{5}\right)$.

15. (2010) Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)}>1.$$

Ответ: $\left(-\sqrt{2};-1\right)$; $\left(1;\sqrt{2}\right)$.

16. (2010) Решите неравенство

$$\frac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}<0.$$

Ответ: $(-\infty;-2)$; $\left(-\sqrt{2};-1\right)$; $\left(1;\sqrt{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

17. (2010) Решите неравенство

$$\log_3\left((x+2)(x+4)\right)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7.$$

Ответ: $-2<x<3$.

18. (2010) Решите неравенство

$$\log_2\frac{3x-2}{x-1}+3\log_8\frac{(x-1)^3}{3x-2}<1.$$

Ответ: $1-\sqrt{2}<x<\frac{2}{3}$, $1<x<1+\sqrt{2}$.

19. (2010) Решите неравенство

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0.$$

Ответ: $(-2;-1]\cup(1;2)$.

20. (2010) Решите неравенство

$$\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+2}(x-18)^2\ge 2.$$

Ответ: 2.

21. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x}{\log_3(3x+2)}<1.$$

Ответ: $(0;\infty)$.

22. (2010) Решите неравенство

$$\frac{\left(\log_3(10x+3)\right)\cdot\left(\log_3(3x+10)\right)}{\left(\log_3 10x\right)\cdot\log_3 x}\ge 0.$$

Ответ: $(0;0{,}1)\cup(1;\infty)$.

23. (2010) Решите неравенство

$$\log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right).$$

Ответ: 2.

24. (2010) Решите неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)\ge\log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{4};2\right)\cup(2;3)$.

25. (2010) Решите неравенство

$$\log_{x+3}\left(9-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2\ge 2.$$

Ответ: –1.

26. (2010) Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right)>0.$$

Ответ: $1 < x < \frac{3}{2},\ 2 < x < \frac{5}{2},\ x > 3.$

27. (2010) Решите неравенство
$$x^{\lg x} > 10x^{-\lg x} + 3.$$
Ответ: $0 < x < 10^{-\sqrt{\lg 5}},\ 10^{\sqrt{\lg 5}} < x.$

28. (2010) Решите неравенство
$$(0{,}3)^{2x^2-3x+6} < 0{,}00243.$$
Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$

29. (2010) Решите неравенство
$$8^{\sqrt{8^x}} > 4096.$$
Ответ: $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right).$

30. (2010) Решите неравенство
$$\log_{0,5}\left(x^2 - 5x + 6\right) > -1.$$
Ответ: $(1; 2) \cup (3; 4).$

31. (2010) Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \geq -1.$$
Ответ: $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$

32. (2010) Решите неравенство
$$2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}.$$
Ответ: $\left(-\infty; \log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$

33. (2010) Решите неравенство
$$8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$
Ответ: $\left(0; \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)\right).$

34. (2010) Решите неравенство
$$3^{72} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$$
Ответ: $[0; 64).$

35. (2010) Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(x-2).$$
Ответ: $\left(2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right).$

36. (2010) Решите неравенство
$$\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} < 100.$$
Ответ: $(1; 1000).$

37. (2010) Решите неравенство
$$\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2} - x - 1\right) \geq 1.$$
Ответ: $\left[-\sqrt{8}; -1\right) \cup \left[\frac{-2+\sqrt{44}}{5}; +\infty\right).$

38. (2010) Решите неравенство
$$\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}-2} \leq 3.$$
Ответ: $[0;1] \cup (4; 16].$

39. (2010) Решите неравенство
$$\frac{2}{\sqrt{x}-3} + 2 \geq \sqrt{x}.$$
Ответ: $[0;1] \cup (9; 16].$

40. (2010) Решите неравенство
$$\sqrt{4-x^2} + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \geq 0.$$
Ответ: $\left[-\sqrt{3}; 0\right) \cup (0; 2].$

41. (2010) Решите неравенство
$$\sqrt{4-x^2} \geq \frac{\sqrt{x^2}}{x}.$$
Ответ: $[-2; 0) \cup \left(0; \sqrt{3}\right].$

42. (2010) Решите уравнение
$$\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} = 4.$$
Ответ: $[4; 8].$

43. (2010) Решите уравнение
$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2.$$
Ответ: $x \geq 2.$

44. (2010) Решите неравенство
$$\log_2\left(x^2 - 4\right) - 3\log_2 \frac{x+2}{x-2} > 2.$$
Ответ: $x < -2$ или $x > 6.$

45. (2010) Решите неравенство
$$\frac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \geq 2\log_2 x.$$
Ответ: $0 < x \leq \frac{1}{2},\ \sqrt{2} < x \leq 2\sqrt[4]{2}.$

46. (2010) Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{1-x^3} - 1}{x+1} \leq x.$$
Ответ: $[-2; -1),\ [0; 1].$

47. (2010) Решите неравенство
$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$
Ответ: $1 < x < 2,\ 3 < x \leq 7.$

48. (2010) Решите неравенство
$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}.$$
Ответ: $1 < x < 2,\ 4 < x \leq 5.$

49. (2010) Решите неравенство

$$\log_x(7-x)<\log_x\left(x^3-6x^2+14x-7\right)-\log_x(x-1).$$

Ответ: $1<x<2,\ 3<x<7.$

50. (2010) Решите неравенство

$$\log_x(5-x)<\log_x\left(x^3-7x^2+14x-5\right)-\log_x(x-1).$$

Ответ: $1<x<2,\ 4<x<5.$

51. (2010) Решите неравенство

$$\left(3^{\frac{x-2}{2}}-1\right)\sqrt{3^x-10\sqrt{3^x}+9}\ge 0.$$

Ответ: $\{0\}\cup[4;+\infty).$

52. (2010) Решите неравенство

$$\left(2^{\frac{x-4}{2}}-1\right)\sqrt{2^x-10\sqrt{2^x}+16}\ge 0.$$

Ответ: $\{2\}\cup[6;+\infty).$

53. (2010) Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\ge 4\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2.$$

Ответ: $0<x\le 1,\ x=2,\ 3\le x<4,\ 4<x\le 5.$

54. (2010) Решите неравенство

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2\ge 5\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2$$

Ответ: $0<x\le 1,\ x=3,\ 4\le x<5,\ 5<x\le 6.$

55. (2010) Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2\ge$$
$$\ge 4\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2.$$

Ответ: $0<x\le 1,\ x=2,\ 3<x<4,\ 4<x<5.$

56. (2010) Решите неравенство

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\log_{(6-x)}\left(x^2-8x+16\right)\right)^2\ge$$
$$\ge 5\cdot\left(\log_{(6-x)}\left(x^2-8x+16\right)\right)^2.$$

Ответ: $0<x\le 1,\ x=3,\ 4<x<5,\ 5<x<6.$

57. Решите неравенство

$$\log_{6x^2-5x+1}2>\log_{\sqrt{6x^2-5x+1}}2$$

Ответ: $0<x<\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{6}$.

58. Решите неравенство

$$\frac{1}{6x^2-5x}\ge\frac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}$$

Ответ: $0<x\le\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}\le x<\frac{5}{6}$.

59. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_3 x>1$$

Ответ: $\left(0;10^{\frac{lg0,5\cdot lg3}{lg1,5}}\right)$ или $\left(0;\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}3}\right)$.

60. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{5}{2}x-1\right)\ge -2$$

Ответ: $\left[\frac{1}{2};1\right),\ [2;+\infty).$

61. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x\sqrt{6-x}\right)>0.$$

Ответ: $(2;5)$

62. Решите неравенство

$$\log_{x+4}(5x+20)\le\log_{x+4}(x+4)^2$$

Ответ: $(-4;-3)\cup[1;+\infty).$

Источники

1. Дорофеев Г.В. Обобщение метода интервалов // Математика в школе, 1969, №3.

2. ЕГЭ. Математика. Тематическая тетрадь. 11 класс / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров. – М.: МЦНМО, Издательство «Экзамен», 2010.

3. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

4. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.

5. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.

6. Панферов В. С., Сергеев И. Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Ителлект-Центр, 2010.

7. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).

8. Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.

9. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 классы: Учебно-метод. пособие / С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко. – М.: Дрофа, 2001.

10. www.mathege.ru - Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк заданий)

11. www.alexlarin.narod.ru - сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

Замеченные опечатки в С1

- В задании № 15 вместо ответа $(-4;4)$ должно быть $(-4;-4)$.

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2010

Задания С4

Корянов А. Г. *г. Брянск*

Замечания и пожелания направляйте по адресу:
akoryanov@mail.ru

Многовариантные задачи по планиметрии

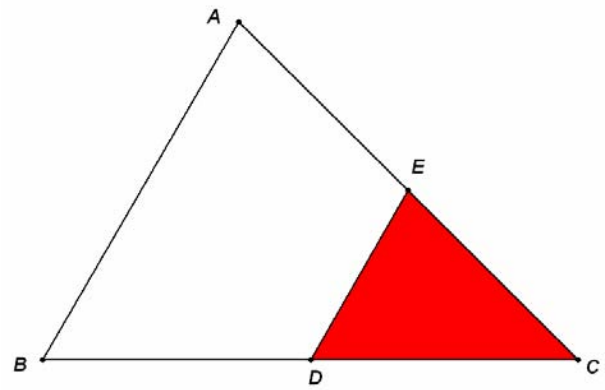
1. Взаимное расположение элементов фигуры:
   а) выбор линейного элемента;
   б) выбор углового элемента;
   в) выбор отношения отрезков, площадей фигур.
2. Взаимное расположение двух фигур:
   а) точки и прямой (расположение точки на прямой или в одной из полуплоскостей);
   б) точки и двух параллельных прямых;
   в) точки и отрезка, лежащих на одной прямой (или трех точек, лежащих на одной прямой);
   г) точки и окружности;
   д) точки и многоугольника;
   е) вписанный угол, опирающийся на хорду (вид угла – острый, прямой или тупой);
   ж) треугольник, вписанный в окружность (расположение центра окружности относительно треугольника);
   з) трапеция, вписанная в окружность (расположение центра окружности относительно трапеции);
   и) касающиеся окружности (внутреннее или внешнее касание);
   к) непересекающиеся окружности и касательные (внутренние или внешние);
   л) пересекающиеся окружности (расположение центров окружностей относительно их общей хорды)

Выбор средней линии треугольника

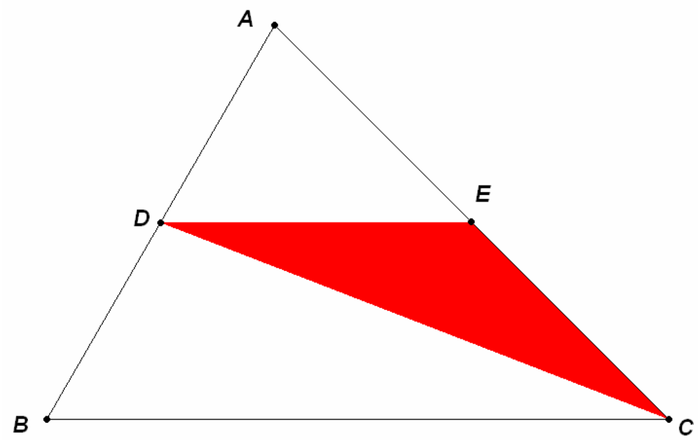
Пример 1. Площадь треугольника ABC равна 4. DE — средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE.

● *Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.*
● *Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.*

Решение. 1) Отрезок DE параллелен отрезку AB. Треугольники EDC и ABC подобны. Тогда $S_{EDC} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$



2) Отрезок DE параллелен отрезку BC. Так как CD – медиана треугольника ABC, то $S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$ DE – медиана треугольника ADC, поэтому $S_{CDE} = \frac{1}{2} S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$



3) Отрезок DE параллелен отрезку AC (рассмотрите самостоятельно).
Ответ: 1.

Выбор оснований трапеции

Пример 2. (2010) Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении 1:3.

● *Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям).* (докажите)

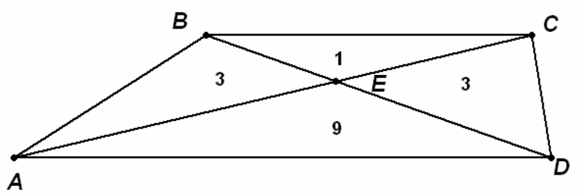
● *Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.* (докажите)

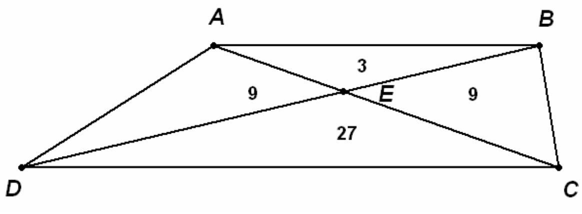
Решение. Пусть точка E делит диагональ в отношении 1:3, считая от вершины верхнего основания.

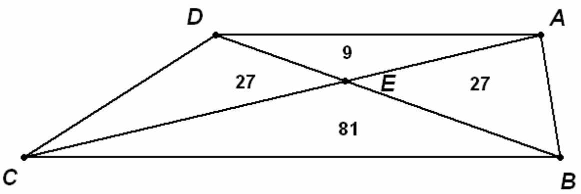
1) Рассмотрим трапецию с основаниями BC и AD. Треугольники AED и CEB подобны (по двум углам), причем коэффициент подобия равен $k = \dfrac{AE}{EC} = 3$.

Значит, $S_{AED} = 3^2 \cdot S_{BEC} = 9 \cdot 1 = 9$. Треугольники ABE и BEC имеют общую высоту, поэтому $\dfrac{S_{ABE}}{S_{BEC}} = \dfrac{AE}{EC} = 3$ и $S_{ABE} = 3 \cdot 1 = 3$. Аналогично $S_{DEC} = 3 \cdot 1 = 3$. Искомая площадь равна $S_{ABCD} = 1 + 3 + 3 + 9 = 16$.

Остальные случаи выбора оснований трапеции рассмотрите самостоятельно.







Замечание. В задаче кроме неопределенности в выборе оснований трапеции имеется неопределенность в выборе отношения. Рассмотрите самостоятельно случаи, когда точка E делит диагональ в отношении 1:3, считая от вершины нижнего основания. Как это отразится на рисунке?

***Ответ*:** 16; 48; 144.

Выбор отношения отрезков, площадей

Пример 3. (2010) Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

Первое решение. Обозначим искомый отрезок EF через x.

1) Пусть площади трапеций $DCFE$ и $ABFE$ относятся как 2:3.

$$\frac{S_{DCFE}}{S_{ABFE}} = \frac{\dfrac{b+x}{2} \cdot h_1}{\dfrac{a+x}{2} \cdot h_2} = \frac{2}{3}.$$ Отсюда

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{2(a+x)}{3(b+x)}. \quad (*)$$

h_1 и h_2 - высоты этих трапеций.

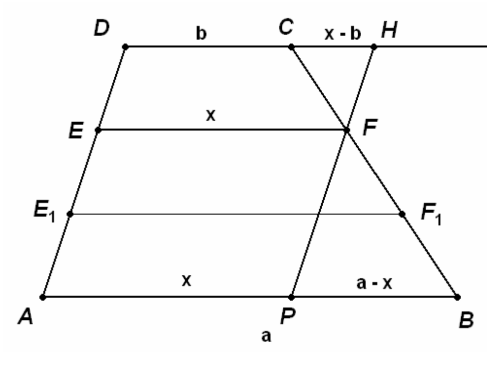
Через точку F проведем отрезок PH параллельно AD. Тогда треугольники PBF и HCF подобны (докажите) и $\dfrac{CH}{BP} = \dfrac{h_1}{h_2}$, $\dfrac{x-b}{a-x} = \dfrac{h_1}{h_2}$.

Используем соотношение (*):

$$\frac{x-b}{a-x} = \frac{2(a+x)}{3(b+x)}.$$

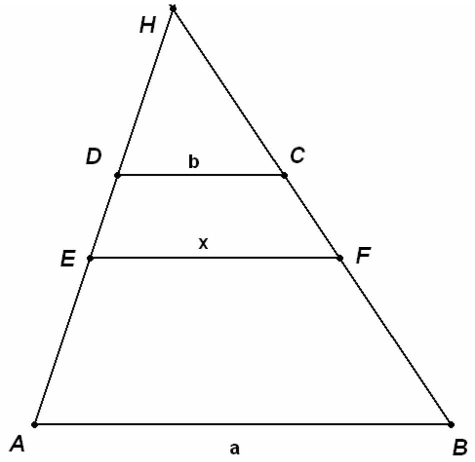
Решая полученное уравнение относительно переменной x, получаем $3\left(x^2 - b^2\right) = 2\left(a^2 - x^2\right)$,

$5x^2 = 2a^2 + 3b^2$, $x = \sqrt{\dfrac{2a^2 + 3b^2}{5}}$.



Второе решение. Обозначим $S_{DCFE} = S_1$, $S_{ABFE} = S_2$, тогда $S_2 = 1{,}5 S_1$.

Достроим трапецию $ABCD$ до треугольника ABH и обозначим $S_{DCH} = S$.



Так как треугольники ABH и DCH подобны (докажите), то имеем $\dfrac{S_{ABH}}{S_{DCH}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$,

или $\dfrac{S+S_1+S_2}{S} = \dfrac{a^2}{b^2}$. (*)

Так как треугольники EFH и DCH подобны (докажите), то имеем $\dfrac{S_{EFH}}{S_{DCH}} = \left(\dfrac{x}{b}\right)^2$,

или $\dfrac{S+S_1}{S} = \dfrac{x^2}{b^2}$. (**)

Из соотношений (*) и (**) имеем

$$1+\frac{S_1+S_2}{S} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{и} \quad 1+\frac{S_1}{S} = \frac{x^2}{b^2}.$$

Далее $\dfrac{S_1+S_2}{S} = \dfrac{a^2-b^2}{b^2}$ и $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{x^2-b^2}{b^2}$.

Теперь разделим одно равенство на другое

$$\frac{S_1+S_2}{S_1} = \frac{a^2-b^2}{x^2-b^2}.$$

С учетом соотношения $S_2 = 1{,}5S_1$ получаем уравнение относительно переменной x:

$$\frac{a^2-b^2}{x^2-b^2} = \frac{5}{2}, \text{ откуда } x = \sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}.$$

2) Случай, когда площади трапеций $ABFE$ и $DCFE$ относятся как 2:3, рассмотрите самостоятельно. В этом случае площади трапеций $DCFE$ и $ABFE$ относятся как 3:2.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2a^2+3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\dfrac{3a^2+2b^2}{5}}$.

Выбор угла треугольника

Пример 4. Площадь треугольника равна 12. Две его стороны равны 6 и 8. Найдите угол между этими сторонами.

Решение. Используя формулу $S_\Delta = 0{,}5ab\sin\gamma$, получаем $\sin\gamma = 0{,}5$. Значит $\gamma = 30^\circ$ или $\gamma = 150^\circ$.

Ответ: 30° или 150°.

Пример 5. (2010) Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Известно, что $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите AC.

Первое решение. Используя обобщенную теорему синусов, найдем $\sin A = \dfrac{BC}{2R} = \dfrac{4}{2\cdot 12} = \dfrac{1}{6}$,

$$\sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{6}{2\cdot 12} = \frac{1}{4}.$$

Так как $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$,

то $\sin\angle B = \sin(180^\circ - \angle A - \angle C) = \sin(\angle A + \angle C)$.

1) Если треугольник ABC – остроугольный, то

$$\cos\angle A = \frac{\sqrt{35}}{6}, \ \cos\angle C = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Воспользуемся формулой сложения

$$\sin(\angle A + \angle C) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24}.$$

Далее находим искомую величину

$$AC = 2R\sin B = 24\cdot\frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24} = \sqrt{35}+\sqrt{15}.$$

2) Пусть угол C – тупой, тогда

$$\sin(\angle A + \angle C) = \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{24}.$$

$$AC = \sqrt{35}-\sqrt{15}.$$

3) Случай, когда угол A – тупой, невозможен (почему?).

Второе решение. Используем теорему косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos B$ и следствие из теоремы синусов $AC = 2R\sin B$. Отсюда получаем тригонометрическое уравнение $576\sin^2 B = 36 + 16 - 48\cos B$. Решая последнее уравнение, находим $\cos B = \dfrac{1\pm 5\sqrt{21}}{24}$. Положительное значение косинуса соответствует острому углу B, отрицательное – тупому углу B. Зная значение $\sin B = \dfrac{\sqrt{50\pm 10\sqrt{21}}}{24} = \dfrac{\sqrt{35}\pm\sqrt{15}}{24}$, находим $AC = \sqrt{35}\pm\sqrt{15}$.

Ответ: $\sqrt{35}\pm\sqrt{15}$.

Выбор угла параллелограмма

Пример 6. (2010) В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$, и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

Решение. Диагональ BD разбивает параллелограмм на два равных треугольника BCD и DAB. Поэтому по разные стороны от прямой BD расположены центры O и Q описанных около них окружностей, лежащие на серединном перпендикуляре OQ к их общей стороне BD. Следовательно, $OQ = 2OM$, где M – середина BD.

1) Пусть $\alpha < 90^\circ$, тогда центр O лежит внутри треугольника DAB. Получаем $\angle BOD = 2\alpha$,

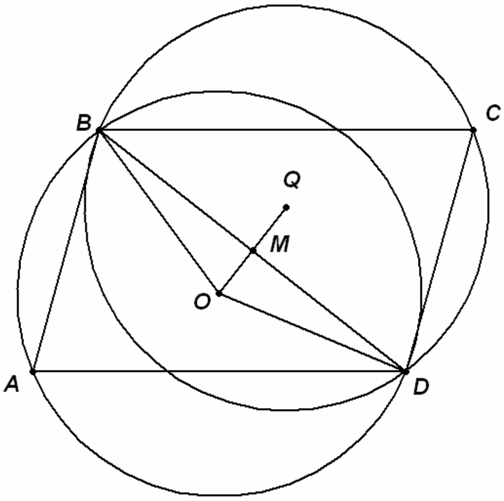
$\angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOD = \alpha$. Из треугольника BOM находим $OM = BM \cdot ctg\alpha$. Тогда

$OQ = 2OM = 2BM \cdot ctg\alpha = BD \cdot ctg\alpha.$

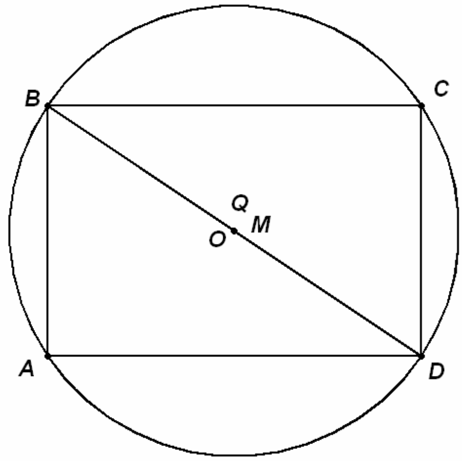
BD находим из треугольника DAB:

$BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

Следовательно, $OQ = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot ctg\alpha$.



2) Пусть $\alpha = 90^\circ$, тогда точки O и Q совпадают и $OQ = 0$.



3) Пусть $\alpha > 90^\circ$, тогда центр O лежит вне треугольника DAB. Получаем угол, опирающийся на большую дугу $\angle BOD = 2\alpha$, а в треугольнике BOD $\angle BOD = 360^\circ - 2\alpha$,

$\angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOD = 180^\circ - \alpha$. Из треугольника BOM находим

$OM = BM \cdot ctg(180^\circ - \alpha) = BM \cdot (-ctg\alpha).$

Тогда

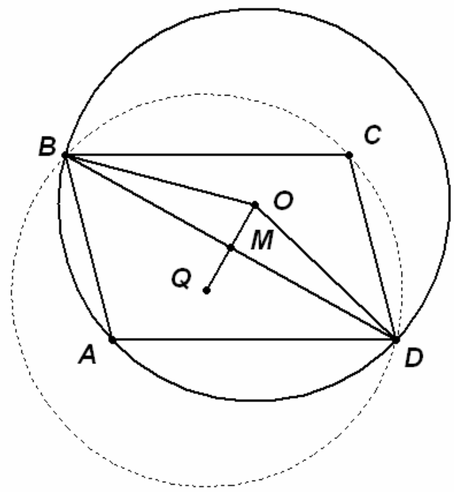
$OQ = 2OM = 2BM \cdot (-ctg\alpha) = BD \cdot (-ctg\alpha).$

BD находим из треугольника DAB:

$BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

Следовательно,

$OQ = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot (-ctg\alpha).$



Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot ctg\alpha$, если $0 < \alpha < 90^\circ$; 0, если $\alpha = 90^\circ$;

$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot (-ctg\alpha)$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

в общем виде $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot |ctg\alpha|$.

Выбор угла трапеции

Пример 7. (2010) Дана трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 36$, $CD = 34$ и верхним основанием $BC = 10$. Известно, что $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD.

Решение. 1) Проведем CE параллельно AB. Тогда $ABCE$ – параллелограмм. $\angle AEC = \angle ABC$, $\angle DEC = 180^\circ - \angle AEC$, $\cos\angle DEC = \frac{1}{3}$ и $\cos\angle DAB = \frac{1}{3}$.

2) Обозначим ED через x. В треугольнике DEC используем теорему косинусов.

$34^2 = 36^2 + x^2 - 2\cdot 36\cdot x\cdot\frac{1}{3}$, $x^2 - 24x + 140 = 0$.

Отсюда $x = 14$ или $x = 10$.

3) В треугольнике ABD используем теорему косинусов.

Если $x = 14$, то $AD = 24$.

$BD^2 = 36^2 + 24^2 - 2\cdot 36\cdot 24\cdot\frac{1}{3} = 1296$; $BD = 36$.

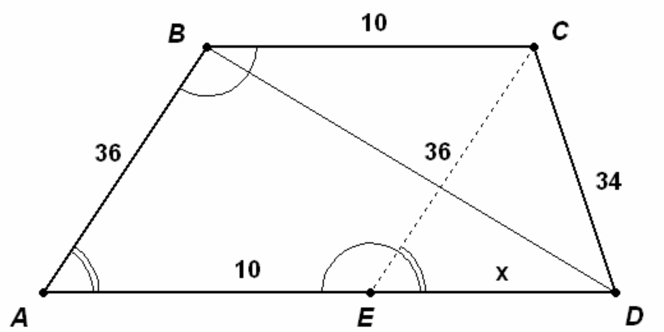
В этом случае угол D – острый. (докажите)

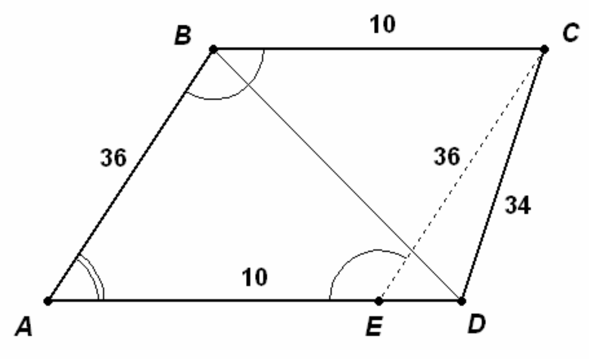
Если $x = 10$, то $AD = 20$.

$BD^2 = 36^2 + 20^2 - 2\cdot 36\cdot 20\cdot\frac{1}{3} = 1216$;

$BD = 8\sqrt{19}$.

В этом случае угол D – тупой. (докажите)





***Ответ*:** 36 или $8\sqrt{19}$.

Вид угла (острый, прямой, тупой)

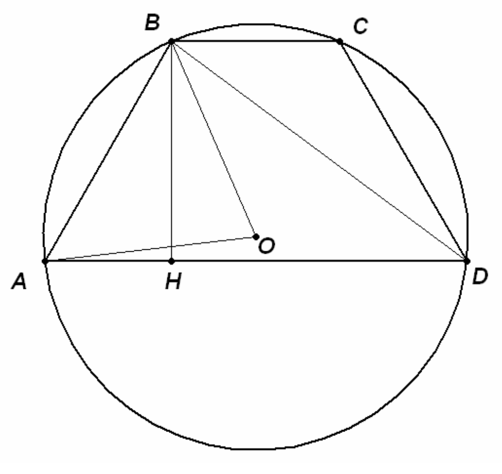
Пример 8. (2010) Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = \frac{3}{5}$.

● *Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований (средней линии).* (докажите)

● *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

Решение. Пусть $\angle AOB = \alpha$. Проведем высоту BH и диагональ BD. Отрезок HD равен средней линии. Так как вписанный угол BDA в два раза меньше центрального угла AOB, то $\angle ADB = \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника BHD найдем высоту $BH = HD\cdot tg\frac{\alpha}{2}$. Используем формулу тангенса половинного угла $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Тогда $BH = \frac{3\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

1) Рассмотрим случай, когда $\angle AOB = \alpha$ – острый. Находим $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $BH = \frac{3\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} = 1$.



2) Второй случай, когда $\angle AOB = \alpha$ – тупой, рассмотрите самостоятельно.

3) Почему не рассматривается случай, когда $\angle AOB = 90^\circ$?

***Ответ*:** 9 или 1.

Взаимное расположение точки и отрезка, лежащие на одной прямой

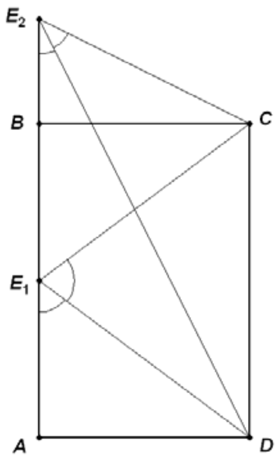
Пример 9. (2010) В прямоугольнике $ABCD$ $AB=2$, $BC=\sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED=\angle DEC$. Найдите AE.

Решение. По свойству параллельных прямых $\angle AED=\angle EDC$. Следовательно, треугольник DEC равнобедренный, и $EC=CD=2$. Получим прямоугольный треугольник BEC с гипотенузой $EC=2$ и катетом $BC=\sqrt{3}$. По теореме Пифагора $BE=1$.

1) Если точка E лежит между A и B (точка E_1 на рисунке), то $AE=1$.

2) Если точка B лежит между A и E (точка E_2 на рисунке), то $AE=3$.

3) Случай, когда точка A лежит между B и E, невозможен (почему?).

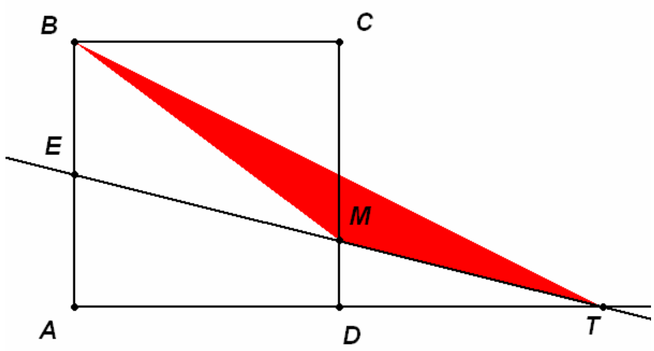


Ответ: 1 или 3.

Пример 10. (2010) Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $tg\alpha=3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

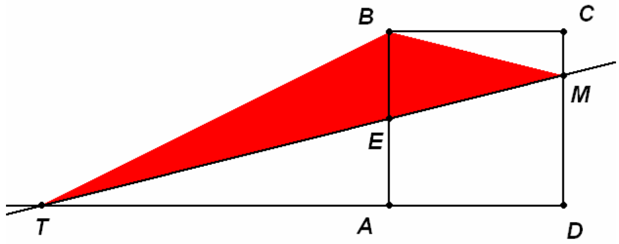
Решение. 1) Прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает *отрезок* CD и продолжение отрезка AD за точку D.

$$S_{BMT}=S_{BTE}-S_{BME}=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT-\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot(AE\cdot tg\alpha-AD)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2\cdot 3-4)=2.$$



2) Прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает *отрезок* CD и продолжение отрезка AD за точку A.

$$S_{BMT}=S_{BTE}+S_{BME}=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT+\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot(AE\cdot tg\alpha+AD)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2\cdot 3+4)=10.$$



Почему следующие случаи невозможны?

3) Прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает продолжение отрезка CD за точку D и *отрезок* AD.

4) Прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает продолжение отрезка CD за точку C и *отрезок* BC.

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Ответ: 2 или 10.

Взаимное расположение точки и окружности

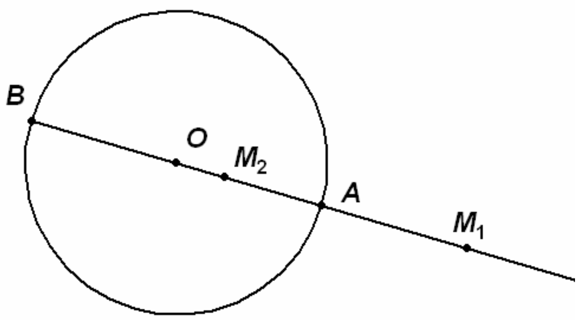
Пример 11. (2010) Дана окружность и точка M. Точки A и B лежат на окружности, причем A – ближайшая к M точка окружности, а B – наиболее удаленная от M точка окружности. Найдите радиус окружности, если $MA = a$ и $MB = b$.

Решение. Точку можно рассматривать в качестве центра окружности нулевого радиуса. Поэтому ближайшая и удаленная точки лежат на линии центров.

1) Пусть точка M расположена внутри круга, ограниченного окружностью. Тогда радиус окружности равен $\frac{MA+MB}{2}=\frac{a+b}{2}$.

2) Если точка M расположена вне круга, то радиус окружности равен $\frac{MB-MA}{2}=\frac{b-a}{2}$.

3) Рассмотрите самостоятельно случай, когда точка M расположена на окружности. Будут ли выполняться полученные формулы?



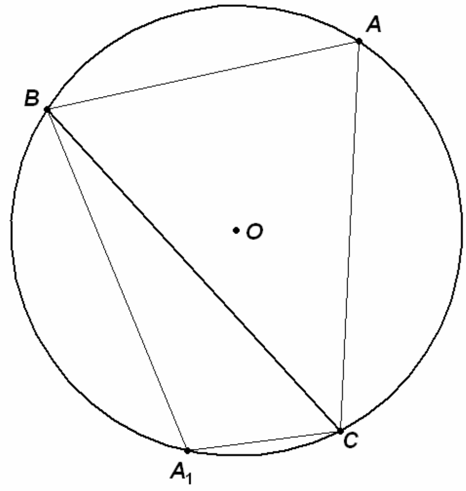
Ответ: $\frac{b-a}{2}$ или $\frac{b+a}{2}$.

Расположение вершины вписанного угла относительно хорды

Пример 12. Радиус окружности равен 1. Найдите величину вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.

Решение. Воспользуемся формулой $\sin A=\frac{a}{2R}$.

Тогда $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\angle A=45^\circ$ или $\angle A=135^\circ$.



Ответ: 45° или 135°.

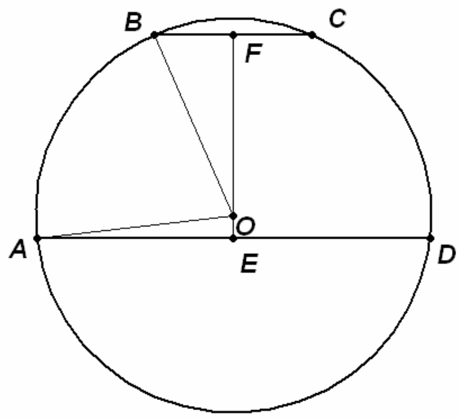
Расположение центра окружности относительно параллельных хорд

Пример 13. Две параллельные хорды окружности, радиус которой 25, имеют длину 14 и 40. Найдите расстояние между этими хордами.

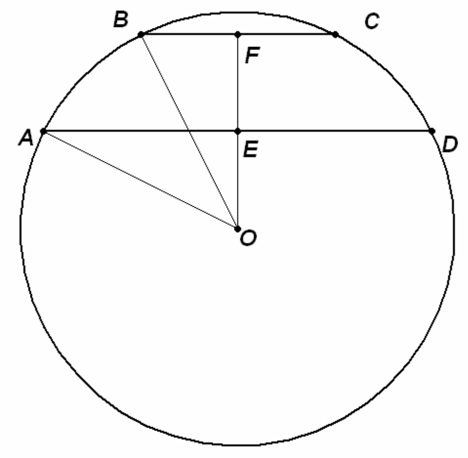
Решение. 1) Хорды расположены по разные стороны от центра окружности. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, то $BF=FC=7$, $AE=ED=20$.

Из прямоугольных треугольников BOF и AOE находим $OF=\sqrt{25^2-7^2}=24$,

$OE=\sqrt{25^2-20^2}=15$. Длина искомого отрезка равна $EF=OE+OF=24+15=39$.



2) Хорды расположены по одну сторону от центра окружности (рассмотрите самостоятельно).



Ответ: 9 или 39.

Расположение центра описанной окружности относительно треугольника

Пример 14. (2010) Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60°. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

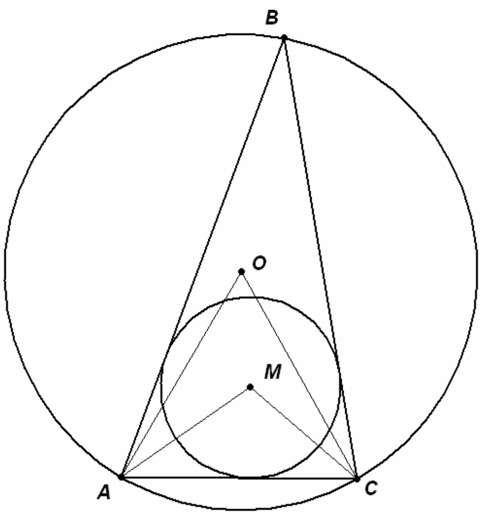
Решение. В равнобедренном треугольнике ABC (OC = OA =R) угол при вершине равен 60°. Следовательно, треугольник ABC - равносторонний и $AC = R$.

Используя следствие обобщенной теоремы синусов, получаем $AC = 2R\sin B$, $R = 2R\sin B$, $\sin B = \frac{1}{2}$. Отсюда $\angle B = 30^\circ$, или $\angle B = 150^\circ$.

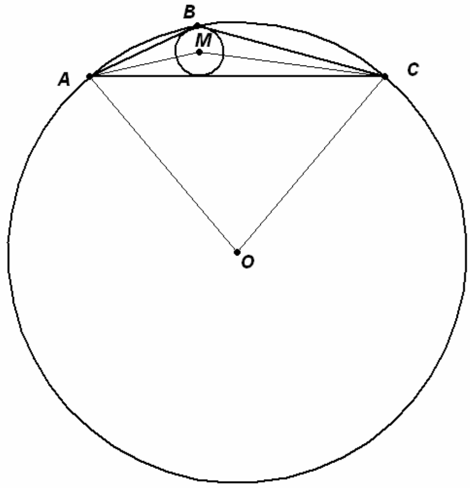
1) Пусть $\angle B = 30^\circ$, тогда $\angle A + \angle C = 150^\circ$.

Центр вписанной окружности М, лежит на пересечении биссектрис, значит $\angle MAC + \angle MCA = 150^\circ : 2 = 75^\circ$.

Тогда $\angle AMC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.



2) Случай, когда $\angle B = 150^\circ$, рассмотрите самостоятельно.



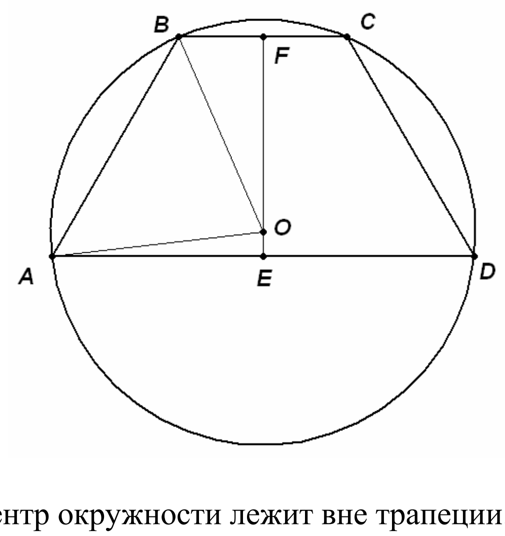
Ответ: 165° или 105°.

Расположение центра описанной окружности относительно трапеции

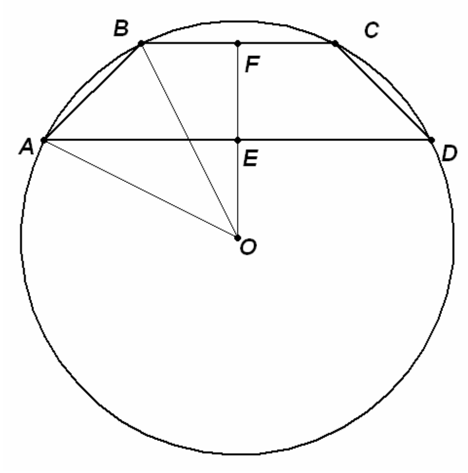
Пример 15. (2010) Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

● *Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.*

Решение. Трапеция вписана в окружность, поэтому она равнобедренная. Центр O описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.
1). Пусть центр окружности лежит внутри трапеции. Далее см. пример 13.



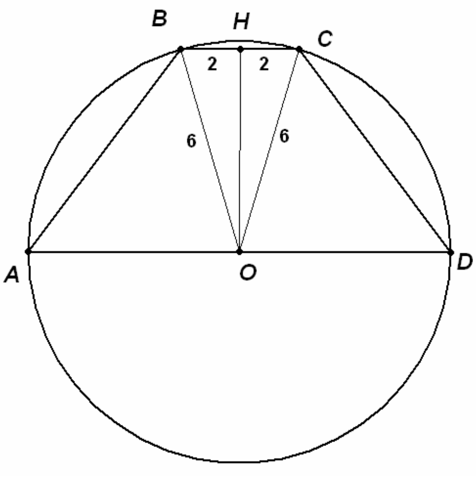
2). Центр окружности лежит вне трапеции.



Ответ: 39 или 9.

Пример 16. (2010) Около трапеции $ABCD$ описана окружность радиуса 6 с центром на основании AD. Найдите площадь трапеции, если основание BC равно 4.

Решение. Центр O описанной окружности лежит на основании AD, значит,
$AD = 2R = 2\cdot 6 = 12$. OH – высота и медиана в равнобедренном треугольнике BOC. Получаем $CH = 4 : 2 = 2$ и из прямоугольного треугольника OHC высоту трапеции
$OH = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$.
Площадь трапеции равна
$S = \frac{4+12}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$.



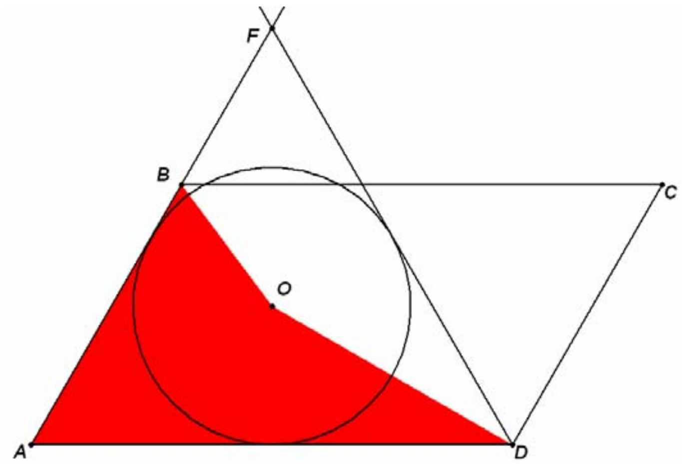
Ответ: $32\sqrt{2}$.

Расположение центра окружности относительно касательной

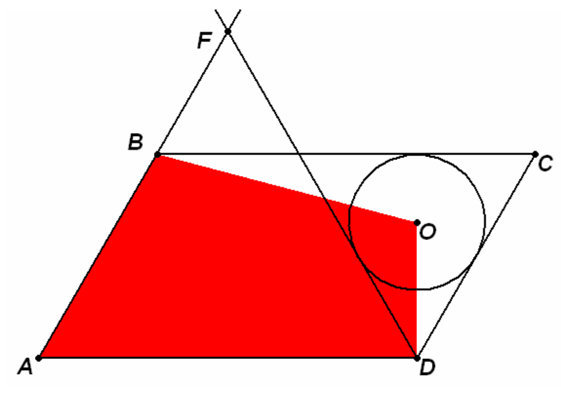
Пример 17. (2010) Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

• *При проведении биссектрисы угла параллелограмма образуется равнобедренный треугольник.* (докажите)

Решение. 1) Окружность вписана в угол с вершиной A.
Треугольник ADF – равнобедренный. Так как $\angle A = 60^\circ$, то треугольник ADF – равносторонний со стороной 3. Радиус вписанной окружности равен $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Находим площадь $S_{ABOD} = S_{AOB} + S_{AOD} =$
$= \frac{1}{2}AB\cdot r + \frac{1}{2}AD\cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{4}$.



2) Окружность вписана в угол с вершиной C (рассмотрите самостоятельно).



Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, $\frac{13\sqrt{3}}{6}$.

Вписанная или вневписанная окружность

Пример 18. (2010) Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

● *Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен*

$$r=\frac{a+b-c}{2}=p-c \quad \left(\angle C=90^\circ\right)$$

● *Радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы прямоугольного треугольника, равен полупериметру этого треугольника.* (докажите)

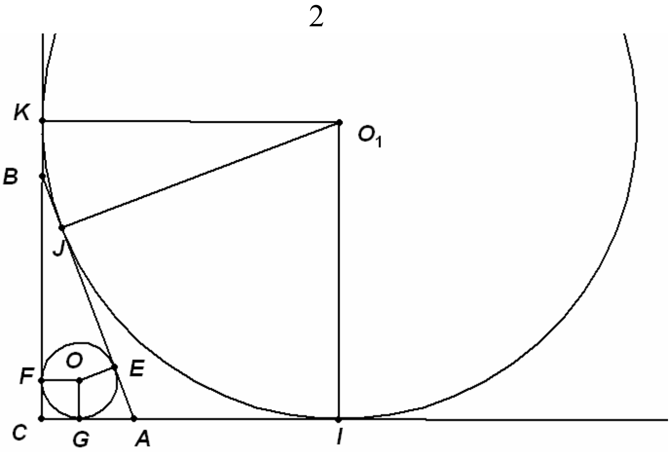
Решение. 1) Окружность вписана в треугольник. Пусть r – радиус вписанной окружности. Так как $FOGC$ – квадрат и отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, то $AG=AE=b-r$, $BF=BE=a-r$. Тогда $c=AB=AE+BE=b-r+a-r$.

Отсюда $r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{3+4-5}{2}=1.$

Второе решение. Используем метод площадей.

$$S_{ABC}=S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}=$$
$$=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}AC\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r.$$

Отсюда $r=\dfrac{S_{ABC}}{p}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4}{\frac{3+4+5}{2}}=1.$



2) Случай (окружность является вневписанной для треугольника ABC) рассмотрите самостоятельно (два способа).

***Ответ*:** 1 или 6.

Пример 19. (2010) Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC=44$, $AD=100$, $AB=CD=35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

● *Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований (средней линии).* (докажите)

● *Пусть окружность вписана в треугольник ABC. Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности со стороной AB равно*

$$x=p-a=\frac{b+c-a}{2} \quad \text{(докажите)}$$

● *Пусть окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC. Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.* (докажите)

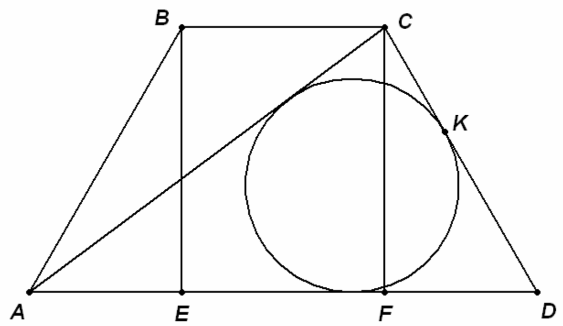
Решение. Опустим из вершин B и C трапеции на сторону AD перпендикуляры BE и CF соответственно. Тогда $AE=\dfrac{100-44}{2}=28$,

$AF=\dfrac{100+44}{2}=72$. Далее вычисляем

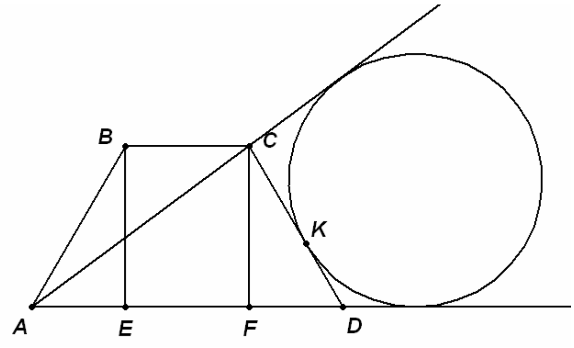
$$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{35^2-28^2}=21,$$
$$AC=\sqrt{AF^2+CF^2}=\sqrt{72^2+21^2}=75.$$

1) Окружность вписана в треугольник ACD. Получаем

$$CK=\frac{AC+CD-AD}{2}=\frac{75+35-100}{2}=5.$$



2) Случай (окружность является вневписанной для треугольника ACD) рассмотрите самостоятельно.



Ответ: 5 или 30.

Расположение точки касания на прямой

Пример 20. (2010) На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

Решение. Центр искомой окружности лежит на пересечении серединного перпендикуляра к отрезку AD с перпендикуляром к прямой BC, проходящим через точку касания. Для точки касания X искомой окружности с прямой BC по теореме о касательной и секущей имеем

$$BX^2 = BD \cdot AB = 1 \cdot 3,$$

откуда $BX = \sqrt{3}$.

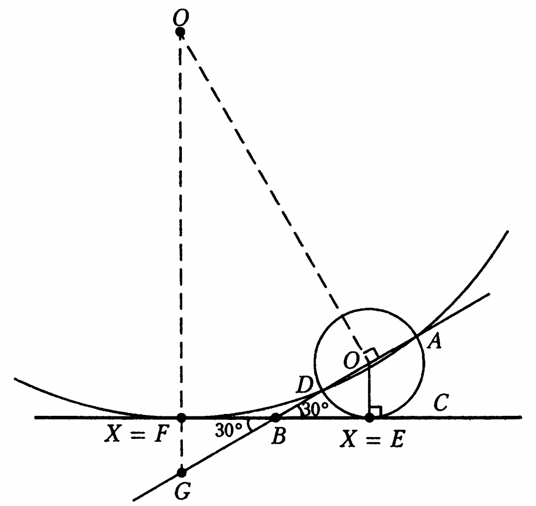
1) Точка касания лежит на луче BC.

В прямоугольном треугольнике OBE

$\angle OBE = 30^\circ$, $OB = 2$, $BE = \sqrt{3}$.

$OE = OA = OD = 1$.

Тогда центр окружности совпадает с серединой O отрезка AD и точка X совпадает с точкой E. Искомый радиус окружности равен 1.



2) Точка касания лежит на продолжении луча BC за точку B (рассмотрите самостоятельно).

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
В представленном решении верно найдены радиусы обеих окружностей.	3
Рассмотрены оба случая расположения окружности, но верно найден радиус только в одном из них.	2
Рассмотрен только один случай расположения окружности и верно найден ее радиус.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Ответ: 1 или 7.

Внешняя или внутренняя касательная непересекающихся окружностей

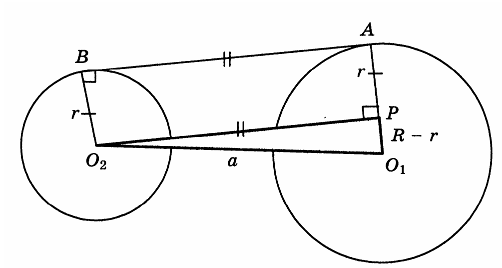
Пример 21. (2010) Прямая касается окружностей радиусов R и r в точках A и B. Известно, что расстояние между центрами равно a, причем $r < R$ и $r + R < a$. Найдите AB.

Решение. Пусть O_1 – центр окружности радиуса R, O_2 – центр окружности радиуса r, A и B соответственно – точки касания окружностей с их общей внешней касательной, P – основание перпендикуляра, опущенного из O_2 на O_1A.

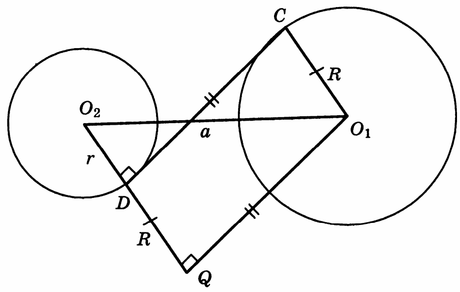
Из прямоугольного треугольника O_1O_2P находим, что

$$O_2P = \sqrt{O_1O_2^{\,2} - O_1P^2} = \sqrt{a^2 - (R-r)^2},$$

а так как APO_2B - прямоугольник, то $AB = O_2P = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$.



Второй случай (внутренняя касательная) рассмотрите самостоятельно.



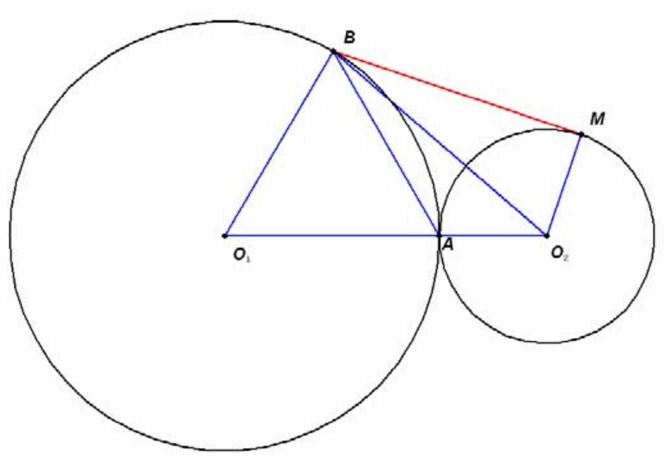
Ответ: $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

Касающиеся окружности (внешнее или внутреннее касание)

Пример 22. (2010) Окружности S_1 и S_2 радиусов R и r $(R>r)$ соответственно касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M. Найдите BM, если известно, что $AB=a$.

Первое решение. 1) Окружности касаются внешним образом. Пусть O_1 и O_2 - центры окружностей S_1 и S_2 соответственно, а $\angle O_1AB=\varphi$.

Применим теорему косинусов для треугольника O_1AB: $O_1B^2=O_1A^2+AB^2-2O_1A\cdot AB\cos\varphi$ или $R^2=R^2+a^2-2Ra\cos\varphi$. Отсюда получим $\cos\varphi=\dfrac{a}{2R}$.



Теперь используем теорему косинусов для треугольника O_2AB:

$O_2B^2=O_2A^2+AB^2+2O_2A\cdot AB\cos\varphi$ или

$O_2B^2=r^2+a^2+2r\cdot a\cos\varphi$. Подставим

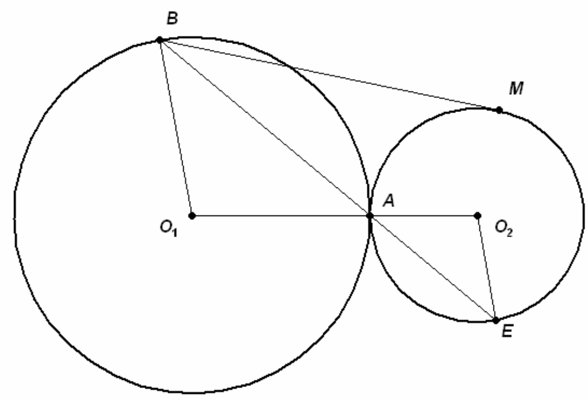
$\cos\varphi=\dfrac{a}{2R}$ и получим $O_2B^2=r^2+a^2+\dfrac{a^2r}{R}$.

Из прямоугольного треугольника O_2BM $(\angle O_2BM=90^\circ)$, используя теорему Пифагора, находим

$$BM^2=O_2B^2-r^2=r^2+a^2+\frac{a^2r}{R}-r^2=$$

$$=a^2\left(1+\frac{r}{R}\right).$$ Отсюда $BM=a\cdot\sqrt{1+\dfrac{r}{R}}$.

Второе решение.



Продолжим AB до пересечения с окружностью S_2 в точке E. Треугольники AO_1B и AO_2E равнобедренные и подобные, так как $\angle O_1AB=\angle OA_2E$.

Следовательно, $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{r}{R}$ и $AE=\dfrac{ar}{R}$.

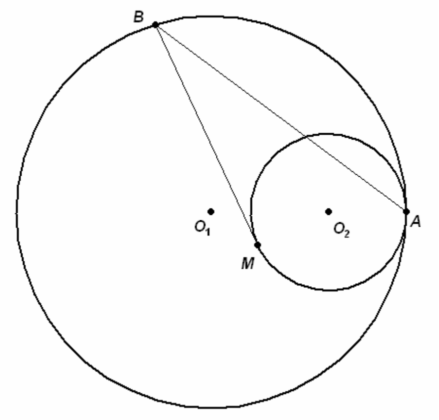
По теореме о секущей и касательной имеем

$BM^2=BA\cdot BE$, $BM^2=BA\cdot(BA+AE)$,

$$BM^2=a\cdot\left(a+\frac{ar}{R}\right),$$

$$BM=\sqrt{a\cdot\left(a+\frac{ar}{R}\right)}=a\cdot\sqrt{1+\frac{r}{R}}.$$

2) Окружности касаются внутренним образом (рассмотрите самостоятельно).



Ответ: $a\cdot\sqrt{1\pm\frac{r}{R}}$

Пример 23. (2010) Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Решение. Пусть D – середина основания AC данного треугольника ABC. Обозначим через E и F точки пересечения прямой BD и окружности с центром в точке B и радиусом 2. Тогда $AD=4$, $BD=3$, $ED=1$, $FD=5$.

Из треугольников ADE и ADF найдем $AE=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$, $AF=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$ соответственно. Площади $S_{AEC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 1=4$,

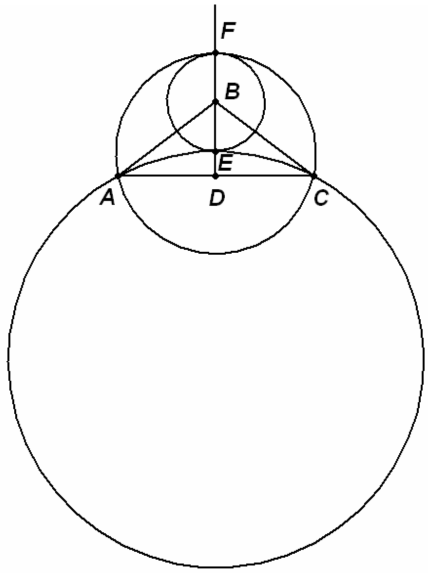
$S_{AFC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5=20$.

1) Искомая окружность описана вокруг треугольника AEC. Найдем ее радиус

$$R=\frac{AE\cdot EC\cdot AC}{4S_{AEC}}=\frac{17\cdot 8}{4\cdot 4}=\frac{17}{2}.$$

2) Искомая окружность описана вокруг треугольника AFC. Найдем ее радиус

$$R=\frac{AF\cdot FC\cdot AC}{4S_{AFC}}=\frac{41\cdot 8}{4\cdot 20}=\frac{41}{10}.$$



Ответ: $\frac{17}{2}$ или $\frac{41}{10}$.

Пример 24. (2010) Дана окружность радиуса 2 с центром O. Хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем $\angle CDA=120^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если $OD=\sqrt{3}$.

Решение. 1) Рассмотрим внутреннее касание окружностей. Пусть радиус искомой окружности с центром O_1 равен r. E – точка касания этой окружности с радиусом OC. В прямоугольном треугольнике EDO_1 $\angle EDO_1=60^\circ$ (O_1D - биссектриса угла ADC).

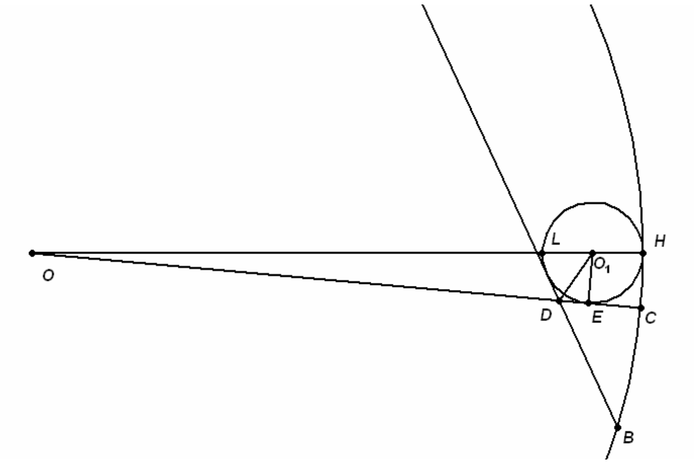
$$DE=r\cdot ctg60^\circ=\frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Используем теорему о секущей и касательной.

$$OL\cdot OH=OE^2,\ (2-2r)\cdot 2=\left(\sqrt{3}+\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$r^2+18r-3=0.$$

Откуда один положительный корень $r=2\sqrt{21}-9$.



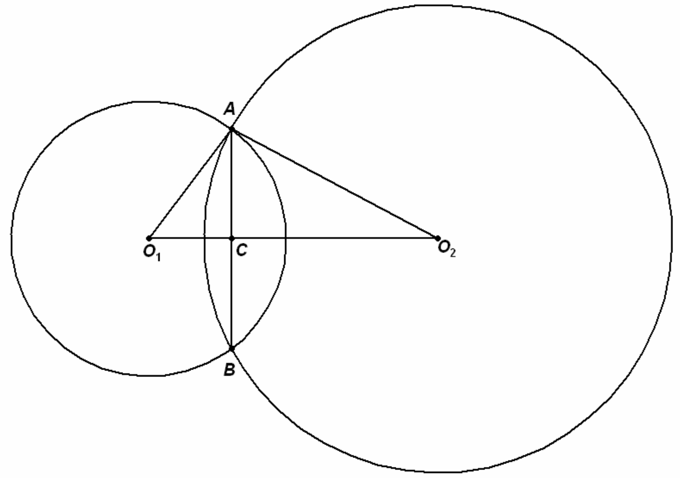
2) Случай внешнего касания окружностей рассмотрите самостоятельно. Искомая окружность касается продолжений сторон DC и DA и данной окружности.

Ответ: $2\sqrt{21}-9$ или $3+2\sqrt{3}$.

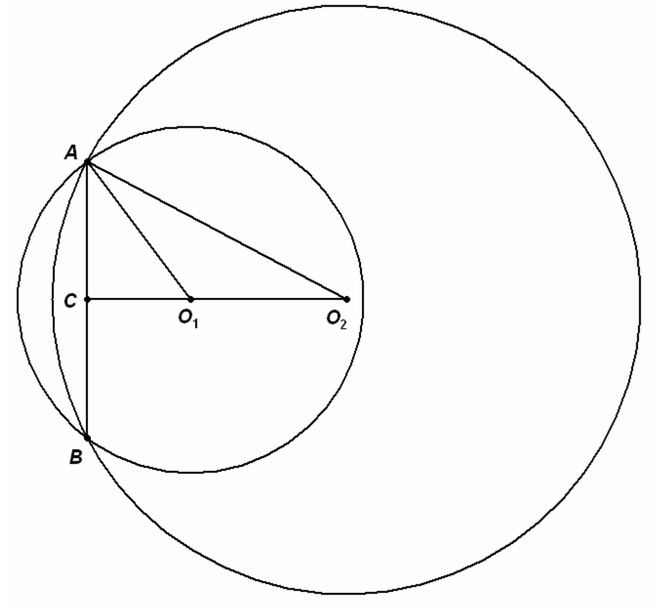
Расположение центров пересекающихся окружностей относительно их общей хорды

Пример 25. (2010) Окружности радиусов 10 и 17 пересекаются в точках A и B. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AB = 16$.

Решение. 1) Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB.
Линия центров O_1O_2 перпендикулярна хорде AB и делит ее в точке пересечения C пополам.
Из прямоугольных треугольников O_1AC и O_2AC соответственно получаем $O_1C=\sqrt{10^2-8^2}=6$ и $O_2C=\sqrt{17^2-8^2}=15$.
Искомое расстояние между центрами равно $O_1O_2=O_1C+O_2C=6+15=21$.



2) Центры окружностей лежат по одну сторону от хорды AB (рассмотрите самостоятельно).



Ответ: 21 или 9.

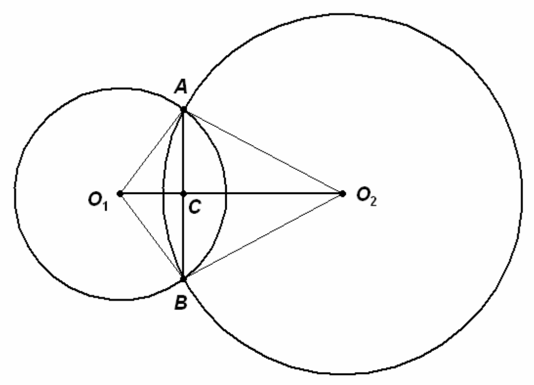
Пример 26. (2010) Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90^\circ$, $\angle AO_2B = 60^\circ$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

• *Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит ее пополам.* (докажите)

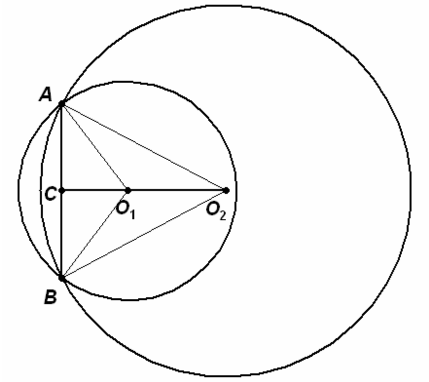
Решение. 1) Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB.
Так как треугольники AO_1B и AO_2B равнобедренные, то линия центров является биссектрисой углов AO_1B и AO_2B. Имеем $\angle AO_1C = 45^\circ$, $\angle AO_2C = 30^\circ$.
Пусть $AC = x$. Из треугольника AO_1C получаем $\angle AO_1C = \angle CAO_1 = 45^\circ$, $O_1C = AC = x$. Для треугольника AO_2C имеем
$O_2C = AC \cdot ctg30^\circ = x\sqrt{3}$.
Далее имеем $O_1O_2 = O_1C + O_2C$ или
$a = x + x\sqrt{3}$. Отсюда находим $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}+1}$.

Тогда $O_1A = x\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$,

$O_2A = 2AC = 2x = \dfrac{2a}{\sqrt{3}+1}$.



2) Центры окружностей лежат по одну сторону от хорды AB (рассмотрите самостоятельно).

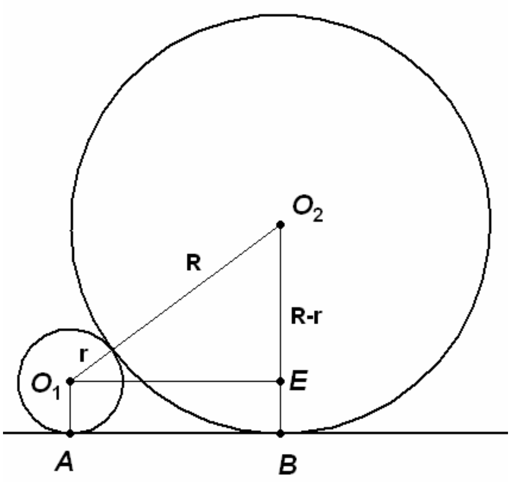


Ответ: $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, $\dfrac{2a}{\sqrt{3}+1}$ или $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$, $\dfrac{2a}{\sqrt{3}-1}$.

Окружность, касающаяся одной из двух дуг другой окружности

Пример 27. (2010) Точка O – центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что $\angle OAK = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.

• *Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен* $2\sqrt{Rr}$. (докажите)



Решение. Центр O_1 искомой окружности лежит на биссектрисе угла A, поэтому $\angle O_1AK_1 = 30^\circ$. K_1 - точка касания этой окружности с прямой AK. Из треугольника O_1AK_1 находим $AK_1 = r\cdot ctg30^\circ = r\sqrt{3}$, где r – радиус искомой окружности.

Из треугольника OAK находим $AK = OK\cdot ctg60^\circ = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Отрезок внешней касательной окружностей с центрами O и O_1 равен $2\sqrt{OK\cdot O_1K_1} = 2\sqrt{2r}$.

Получаем $AK = AK_1 + K_1K$,

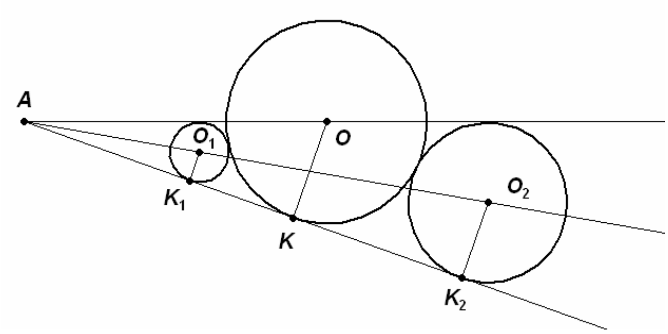
$$\frac{2}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3} + 2\sqrt{2r}.$$

Решаем квадратное уравнение

$3t^2 + 2\sqrt{6}\,t - 2 = 0$, где $t = \sqrt{r}$.

Получаем единственный положительный корень $t = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$. Тогда

$$r = \left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{6-4\sqrt{2}}{3}.$$



Еще один случай расположения окружностей рассмотрите самостоятельно.

Ответ: $2 \pm \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Тематические задачи

Медианы треугольника

Пример 28. (2010) Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3$, $BC = 4$, а медианы, проведенные из вершин A и B, перпендикулярны.

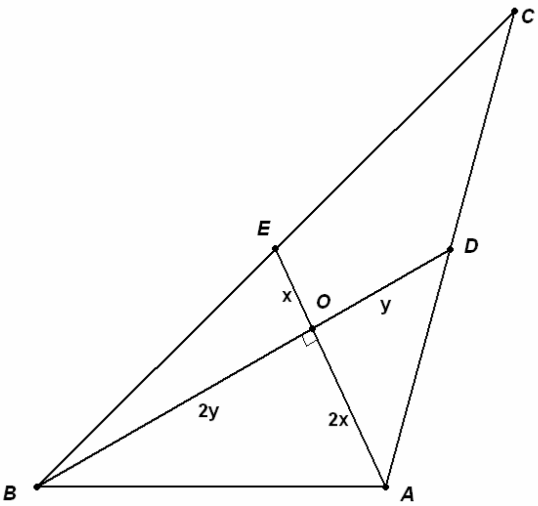
• *Каждая медиана делится точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.*
• *Три медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников.* (докажите)

Решение. Пусть медианы BD и AE пересекаются в точке O. Обозначим $OE = x$, $OD = y$. Тогда по свойству медиан треугольника $AO = 2x$, $BO = 2y$ и из прямоугольных треугольников BOE и AOD получим уравнения $4y^2 + x^2 = 4$ и $y^2 + 4x^2 = 2{,}25$. Решая полученную систему, получаем $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $y = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.

Далее находим

$$S_{AOB} = 0{,}5 \cdot 2x \cdot 2y = 2xy = \frac{\sqrt{11}}{3}.$$

$$S_{ABC} = 3S_{AOB} = \sqrt{11}.$$



Ответ: $\sqrt{11}$.

Биссектрисы треугольника

Пример 29. (2010) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

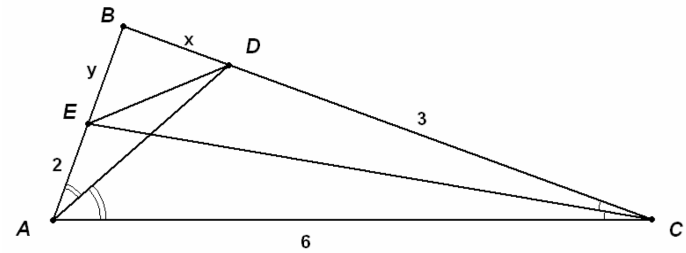
• *Биссектриса делит сторону треугольника на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон.*

Решение. Обозначим $BD = x$, $BE = y$. По свойству биссектрисы получаем $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ и $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}$ или $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{6}$ и $\frac{2}{y} = \frac{6}{x+3}$.

Из решения системы

$$\begin{cases} 6x = 3y + 6 \\ 2x + 6 = 6y \end{cases}$$

находим $x = 1{,}8$ и $y = 1{,}6$. Тогда $BC = 4{,}8$ и $AB = 3{,}6$.



Так как $3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 6^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, имеем $\angle B = 90^\circ$.

Тогда $ED^2 = x^2 + y^2 = 1{,}6^2 + 1{,}8^2 = 5{,}8$.

Ответ: $\sqrt{5{,}8}$.

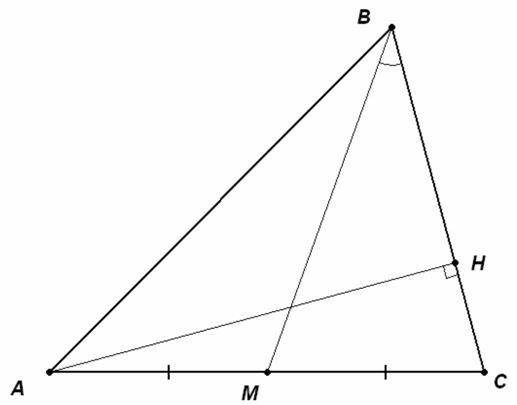
Метод площадей

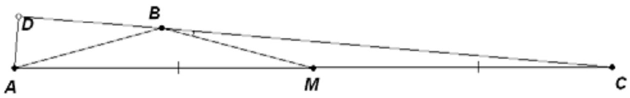
Пример 30. (2010) Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AH. Найдите угол MBC.

Решение. Пусть $\angle MBC = \alpha$. Найдем площадь треугольника ABC двумя способами. Так как медиана BM треугольника ABC разбивает его на два равновеликих треугольника, то

$$S_{ABC} = 2S_{CBM} = 2 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot BM \sin\alpha = BC \cdot BM \sin\alpha.$$

С другой стороны, $S_{ABC} = 0{,}5BC \cdot AH$. Учитывая, что $AH = BM$, приравняем площади $BC \cdot BM \sin\alpha = 0{,}5BC \cdot AH$. Получаем, что $\sin\alpha = 0{,}5$. Отсюда $\alpha = 30^\circ$ или $\alpha = 150^\circ$.





Ответ: 30° или 150°.

Отношение отрезков и площадей

Пример 31. (2010) В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC=1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF?

• *Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.* (докажите)

• *Параллельные прямые отсекают на сторонах угла (на двух прямых) пропорциональные отрезки (обобщенная теорема Фалеса).*

Решение. Возьмем точку G на AB так, что $DG \parallel EC$. Пусть $BG=x$.

В треугольнике BCE используем теорему Фалеса:

$\dfrac{EG}{BG}=\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{2}{1}$. Тогда $EG=2x$, и $AE=EB=3x$.

В треугольнике ADG используем теорему Фалеса:

$$\frac{AF}{AD}=\frac{AE}{AG}=\frac{3}{5}.$$

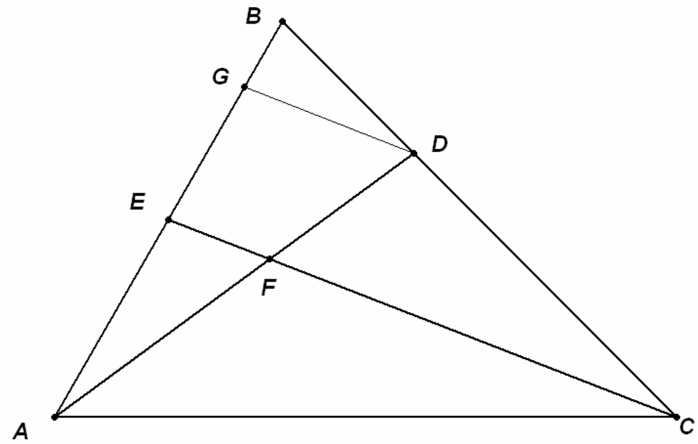
Для треугольников ABD и ACD, имеющих общую высоту, получаем $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{3}$

и $S_{ABD}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}$.

Для треугольников AFE и ADG, имеющих общий угол, получаем

$$\frac{S_{AFE}}{S_{ADG}}=\frac{AE\cdot AF}{AB\cdot AD}=\frac{AE}{AB}\cdot\frac{AF}{AD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}.$$

$$S_{AFE}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{1}{10}S_{ABC}.$$



Ответ: 0,1.

Пример 32. (2010) На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна единице, взяты точки $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$ и $N \in DA$ **N ∈ DA**. При этом $\dfrac{AK}{KB}=2$, $\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CM}{MD}=1$, $\dfrac{DN}{NA}=\dfrac{1}{3}$. Найдите площадь шестиугольника $AKLCMN$.

• *Отношение площадей треугольников, имеющих общий угол, равно отношению произведению сторон этого угла.* (докажите)

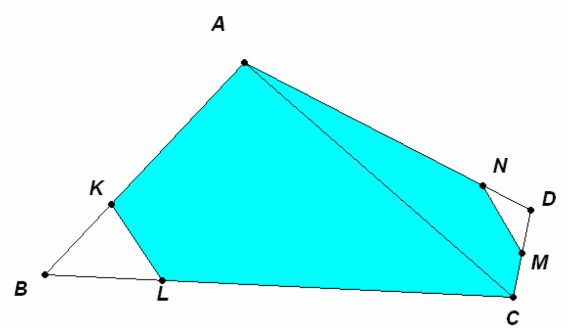
Решение. Отношение площадей треугольников KBL и ABC

равно $\dfrac{BK\cdot BL}{AB\cdot BC}=\dfrac{BK}{AB}\cdot\dfrac{BL}{BC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$.

Отношение площадей треугольников MND и ADC

равно $\dfrac{DN\cdot DM}{AD\cdot CD}=\dfrac{DN}{AD}\cdot\dfrac{DM}{DC}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$.

Значит, сумма площадей треугольников KBL и MND составляет $\dfrac{1}{12}$ от площади данного четырехугольника, а площадь шестиугольника составляет $\dfrac{11}{12}$ т.е. равна $\dfrac{11}{12}\cdot 1=\dfrac{11}{12}$.



Ответ: $\frac{11}{12}$.

Пример 33. (2010) В треугольнике ABC, площадь которого равна S, биссектриса CE и медиана BD пересекаются в точке F. Найдите площадь четырехугольника $ADFE$, если $BC = a$, $AC = b$.

• *Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.* (докажите)

• *Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.* (докажите)

Решение. 1) По свойству биссектрисы CE имеем $\frac{AE}{BE} = \frac{CA}{CB} = \frac{b}{a}$. Тогда для треугольников ACE и ABC с общей высотой (можно провести из вершины C) получаем $\frac{S_{AEC}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AB} = \frac{b}{a+b}$. Отсюда $S_{AEC} = \frac{bS}{a+b}$.

2) Так как BD – медиана, то $S_{BDC} = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{S}{2}$.

3) CF – биссектриса в треугольнике BDC, поэтому $\frac{DF}{FB} = \frac{CD}{DB} = \frac{b}{2a}$.

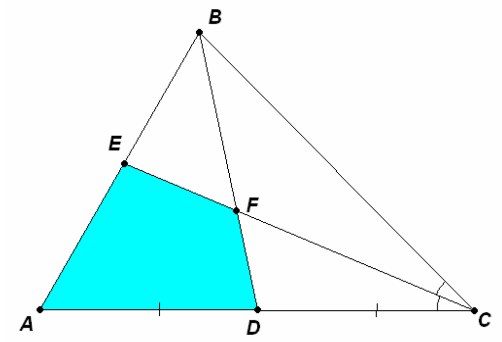
Для треугольников CDF и BCD с общей высотой (можно провести из вершины C) получаем $\frac{S_{CDF}}{S_{BDC}} = \frac{DF}{DB} = \frac{b}{2a+b}$.

Отсюда $S_{CDF} = \frac{b}{2a+b} \cdot S_{BDC} = \frac{bS}{2(2a+b)}$.

4) Теперь $S_{ADFE} = S_{AEC} - S_{CDF} =$

$$= \frac{bS}{a+b} - \frac{bS}{2(2a+b)} = bS\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{2(2a+b)}\right) = .$$

$$= \frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}.$$



Ответ: $\frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}$.

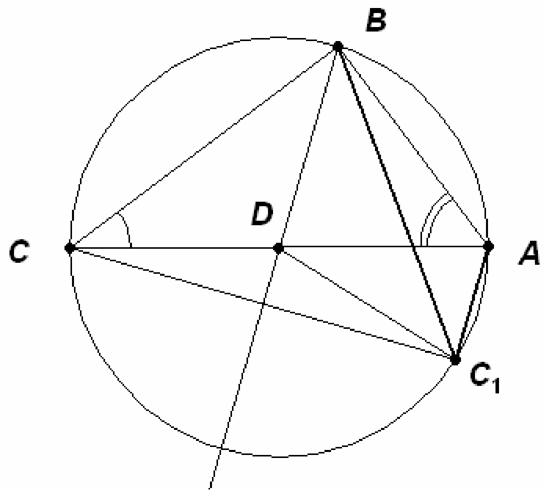
Метод вспомогательной окружности

Пример 34. (2010) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и углом α при вершине A. Точка D - середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите угол AC_1B .

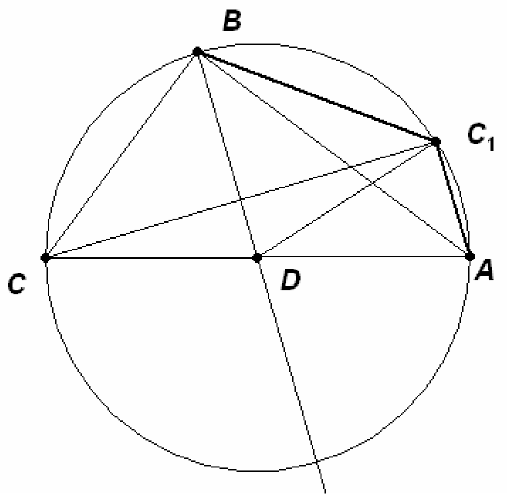
• *Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.*

Решение. Так как прямая BD является серединным перпендикуляром к отрезку CC_1, то $DC = DC_1$. С другой стороны, точка D – центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника. Поэтому $DC = DB = DA$. Отсюда следует, что точка C_1 принадлежит описанной окружности.

1) Если $\alpha = 45^\circ$, то центральный угол $\angle BDC = 2 \cdot \angle BAC = 90^\circ$. В этом случае ось BD перпендикулярна гипотенузе AC. Точка C отобразится в точку A, и угол AC_1B не будет определен.



2) Пусть $\alpha > 45^\circ$, тогда центральный угол $\angle BDC = 2\alpha > 90^\circ$. В этом случае точки C и C_1 расположены по одну сторону от хорды AB. В прямоугольном треугольнике $\angle BCA = 90^\circ - \alpha$. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. Поэтому
$\angle AC_1B = \angle BCA = 90^\circ - \alpha$.



3) Пусть $\alpha < 45^\circ$, тогда центральный угол $\angle BDC < 90^\circ$. В этом случае точки C и C_1 расположены по разные стороны от хорды AB. Четырехугольник AC_1BC вписан в окружность, поэтому
$\angle AC_1B = 180^\circ - \angle BCA = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$.

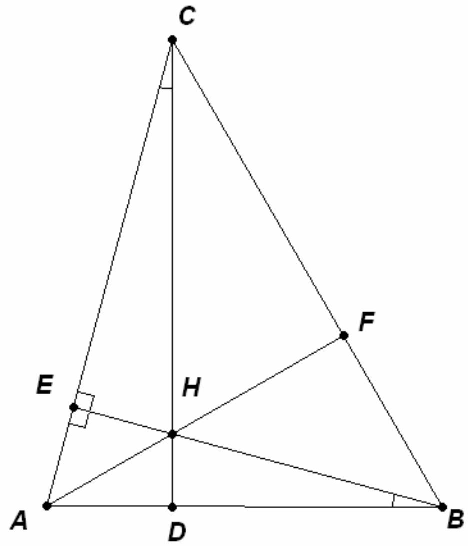
Ответ: $90^\circ + \alpha$, если $0^\circ < \alpha < 45^\circ$; $90^\circ + \alpha$, если $45^\circ < \alpha < 90^\circ$; при $\alpha = 45^\circ$ точка C_1 совпадает с точкой A и угол не определен.

Высоты треугольника

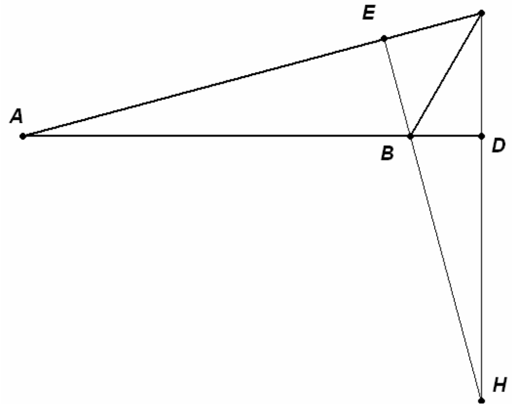
Пример 35. (2010) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB.

• *(Признак равенства прямоугольных треугольников) Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.*

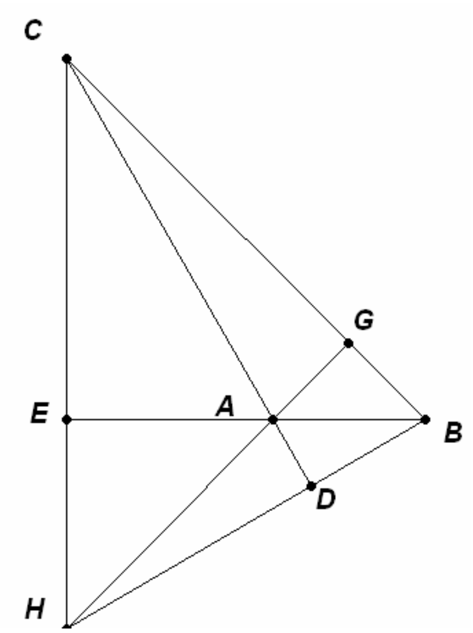
Решение. 1) Треугольник ABC - остроугольный. Пусть BE и CD – высоты треугольника. Углы ABE и HCE равны, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Треугольники ABE и HCE равны по гипотенузе ($CH = AB$) и острому углу. Отсюда $AE = EH$, и значит, $\angle EAH = \angle AHE = 45^\circ$. В прямоугольном треугольнике ACF имеем $\angle CAF = 45^\circ$, поэтому $\angle ACF = 45^\circ$.



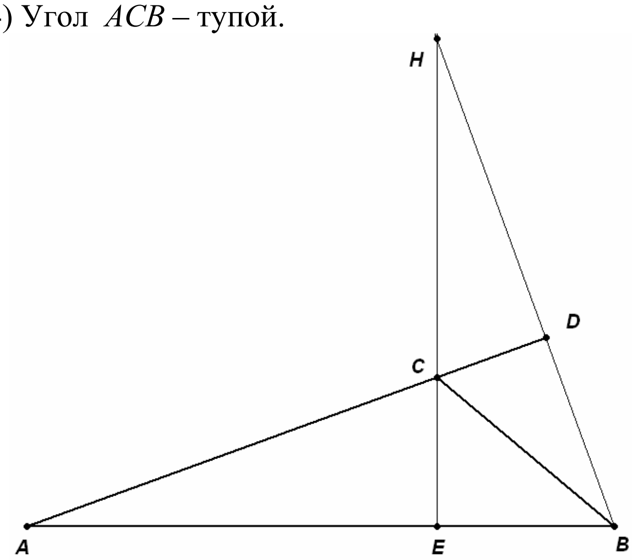
Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.
2) Угол ABC – тупой.



3) Угол BAC – тупой.



4) Угол ACB – тупой.



5) Угол ABC – прямой.
6) Угол BAC – прямой.
7) Случай, когда угол ACB – прямой, невозможен (почему?).
***Ответ*:** 45° или 135°.

Пример 36. (2010) Точки A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60° и 30°. Найдите углы треугольника ABC.

● *Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Тогда треугольник A_1BC_1 подобен данному с коэффициентом подобия, равным $|\cos B|$.*

Рассмотрим остроугольный треугольник (см. ниже рисунок). Для прямоугольных треугольников BA_1A и BC_1C имеем

$\dfrac{BA_1}{AB} = \cos B$ и $\dfrac{BC_1}{BC} = \cos B$ соответственно.

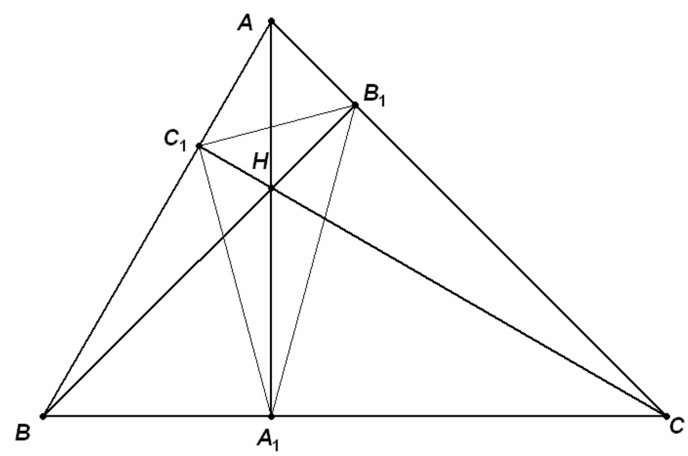
Следовательно треугольники BA_1C_1 и BAC подобны (второй признак), так как имеют общий угол B и $\dfrac{BA_1}{AB} = \dfrac{BC_1}{BC} = \cos B$.

Случай тупого угла B рассмотрите самостоятельно.

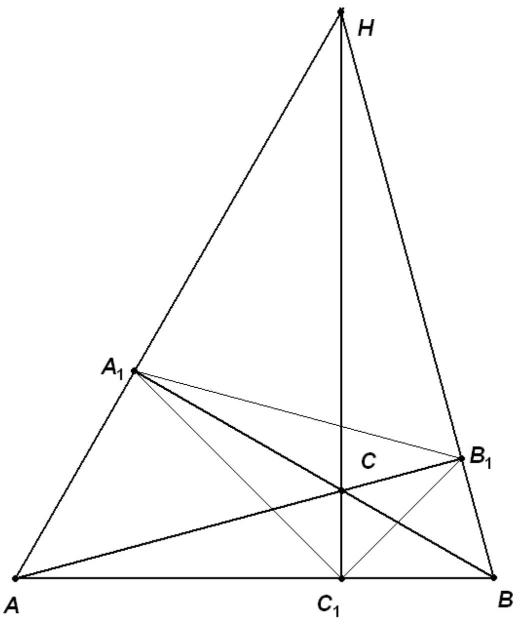
Решение. 1) Треугольник ABC – остроугольный. Так как треугольник BC_1A_1 подобен треугольнику ABC, то $\angle BC_1A_1 = \angle BCA$. Аналогично из подобия треугольников AB_1C_1 и ABC имеем $\angle AC_1B_1 = \angle BCA$. Далее развернутый угол при вершине C_1 составлен из суммы углов BC_1A_1, AC_1B_1 и $B_1C_1A_1$. Отсюда получаем соотношение $2\angle C + \angle B_1C_1A_1 = 180^\circ$ или $\angle C = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle B_1C_1A_1$. Такие же равенства можно получить для других острых углов. Используем данные углы:

$90^\circ - \dfrac{1}{2}\cdot 90^\circ = 45^\circ$, $90^\circ - \dfrac{1}{2}\cdot 60^\circ = 60^\circ$,

$90^\circ - \dfrac{1}{2}\cdot 30^\circ = 75^\circ$.



Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.
2) Угол ACB – тупой.



3) Угол ABC – тупой.
4) Угол BAC – тупой.
Случаи, когда один из углов ABC, BAC, ACB – прямой, невозможны (почему?).

Замечание. Другое решение может быть основано на следующей ключевой (базовой, опорной) задаче:

• *Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника (треугольник, образованный основаниями высот).* (докажите)

Ответ: $45^\circ, 75^\circ, 60^\circ$ или $135^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ или $120^\circ, 15^\circ, 45^\circ$ или $105^\circ, 30^\circ, 45^\circ$.

Пример 37. (2010) Точки D и E – основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведенных из вершин A и C соответственно. Известно, что $\frac{DE}{AC} = k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите сторону AC.

• *Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Тогда треугольник A_1BC_1 подобен данному с коэффициентом подобия, равным* $|\cos B|$. (докажите)

Решение. Из точек D и E сторона AC видна под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром AC. Обозначим $\angle ABC = \alpha$.

1) Если треугольник ABC остроугольный, то основания высот AD и CE лежат на сторонах треугольника. Тогда четырехугольник $AEDC$ - вписанный, поэтому

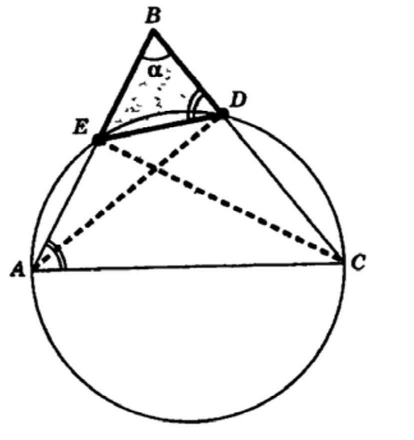
$$\angle BDE = 180^\circ - \angle CDE = \angle CAE = \angle CAB.$$

Треугольники EDB и CAB подобны (по двум углам) с коэффициентом

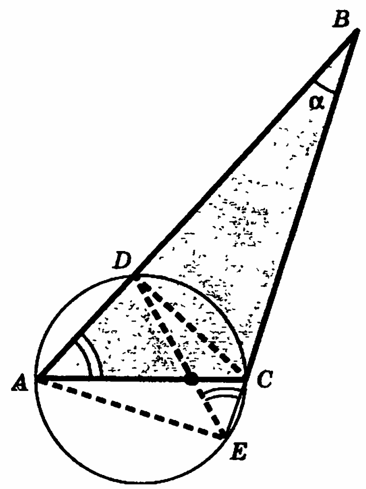
$$\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \cos\alpha,$$

т.е. $\cos\alpha = k$. Тогда по теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\alpha =$$
$$= b^2 + a^2 - 2abk.$$



2) Пусть ACB – тупой угол.
Тогда четырехугольник $AECD$ вписанный, и аналогично предыдущему получаем: $\cos\alpha = k$ и $AC^2 = b^2 + a^2 - 2abk$.



3) Пусть CAB – тупой угол. Аналогичные рассуждения.

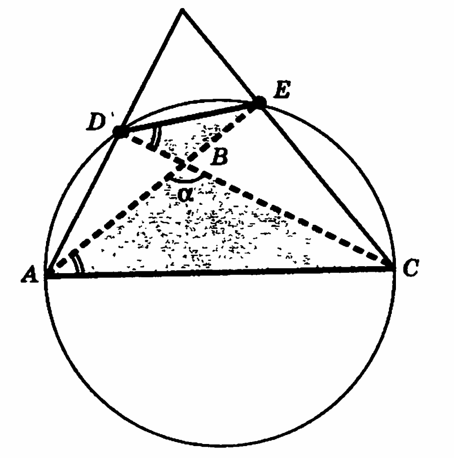
4) Пусть ABC – тупой угол. Тогда основания высот AD и CE лежат на продолжениях сторон BC и AB. Вписанные углы CDE и CAE опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle BDE = \angle CDE = \angle CAE = \angle CAB$.

Треугольники EDB и CAB подобны (по двум углам) с коэффициентом

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha,$$

т.е. $\cos\alpha = k$.

Тогда $AC^2 = a^2 + b^2 + 2abk$.



Ответ: $\sqrt{a^2+b^2-2abk}$, $\sqrt{a^2+b^2+2abk}$.

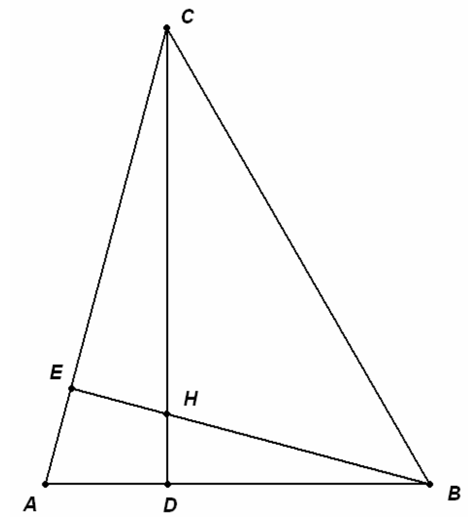
Пример 38. (2010) В треугольнике ABC угол A равен α, сторона BC равна a, H — точка пересечения высот. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BHC.

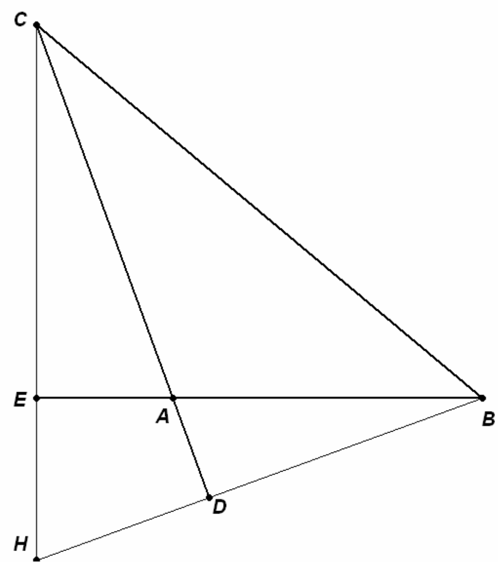
• *Если H – ортоцентр треугольника, то радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, ABH, BCH, ACH, равны между собой.* (докажите)

Решение. Так как в четырехугольнике $ADHE$ углы E и D прямые, то $\angle A+\angle DHE=180^\circ$. Отсюда получаем $\angle BHC=\angle DHE=180^\circ-\angle A$. Радиус окружности, описанной около треугольника BHC, равен

$$\frac{BC}{2\sin(180^\circ-\angle A)}=\frac{BC}{2\sin\angle A}=\frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Замечание. Отсюда следует, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCH равны между собой.





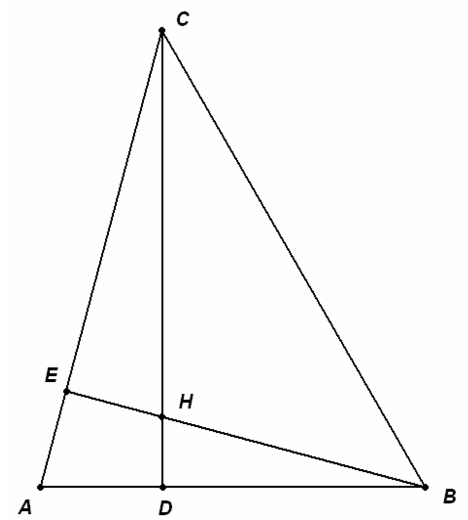
Ответ: $\dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

Пример 39. (2010) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.

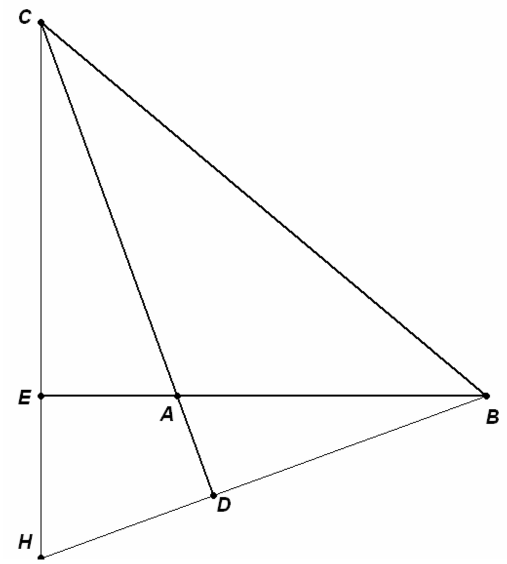
Решение. Пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Так как радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCH равны между собой, то для треугольника BCH имеем $CH=2R\sin\angle HBC$ или $R=2R\sin\angle HBC$. Отсюда $\sin\angle HBC=\dfrac{1}{2}$.

Значит, $\angle HBC=30^\circ$ или $\angle HBC=150^\circ$.

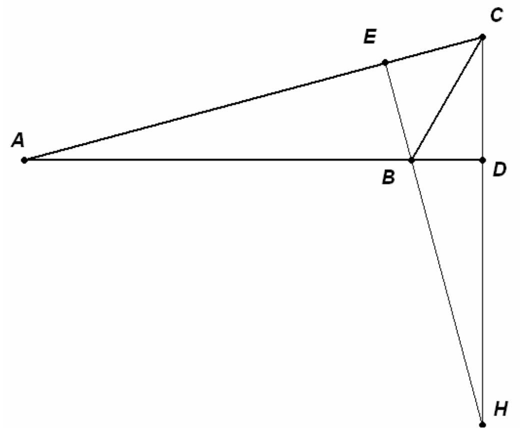
1) Если треугольник ABC – остроугольный, то из треугольника BEC находим $\angle C=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.



2) Если в треугольнике ABC угол A – тупой, то $\angle HBC = 30^\circ$ (в треугольнике DBC угол D прямой, а угол DBC может быть только острым). Из треугольника DBC находим $\angle C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

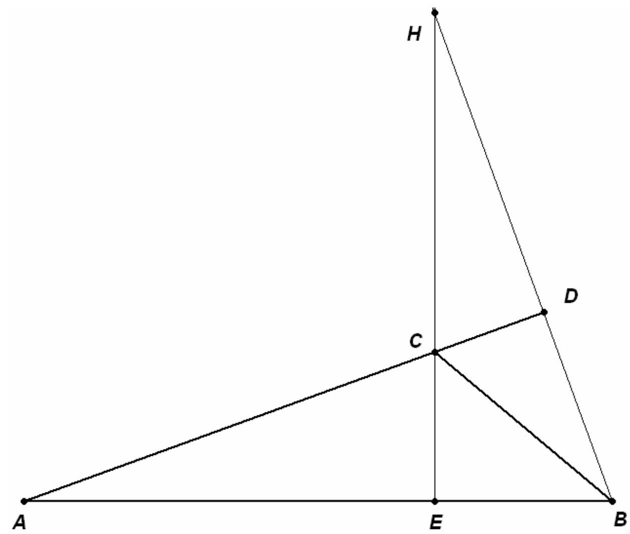


3) Если в треугольнике ABC угол B – тупой, то $\angle HBC = 150^\circ$ (почему этот угол тупой?) и $\angle CBE = 30^\circ$. Из треугольника CBE находим $\angle C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.



4) Если в треугольнике ABC угол C – тупой, то $\angle HBC = 30^\circ$ (почему этот угол острый?). Из треугольника CBD находим $\angle BCD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Тогда $\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



Ответ: 60° или 120°.

Окружность и треугольник

Пример 40. (2010) В треугольнике ABC угол A равен α, сторона BC равна a, J — точка пересечения биссектрис. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BJC.

• *Если O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, то выполняются равенства:*

$$\angle AOB = \frac{\angle C}{2} + 90^\circ; \qquad \angle AOC = \frac{\angle B}{2} + 90^\circ;$$

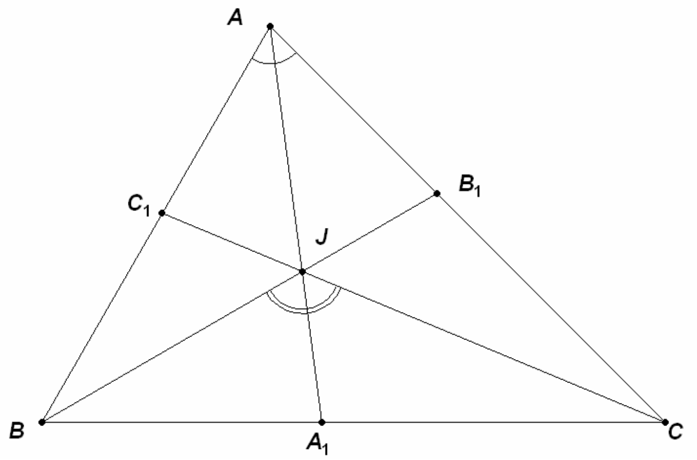
$$\angle COB = \frac{\angle A}{2} + 90^\circ.$$

Решение. Так как $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A$,

то $\angle BJC = 180^\circ - \dfrac{\angle B + \angle C}{2} = \dfrac{\angle A}{2} + 90^\circ$.

Тогда радиус окружности, описанной около треугольника BJC, равен

$$R = \frac{BC}{2\sin \angle BJC} = \frac{a}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 90^\circ\right)} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$



Ответ: $\dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

Пример 41. (2010) В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр вписанной окружности. Известно, что BC = 24, MN = 12. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

Решение. 1) Треугольник AMN подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2} = |\cos A|$.

Отсюда $\angle A = 60^\circ$ или $\angle A = 120^\circ$.

В примере 40 имеется соотношение $\angle COB = \dfrac{\angle A}{2} + 90^\circ$.

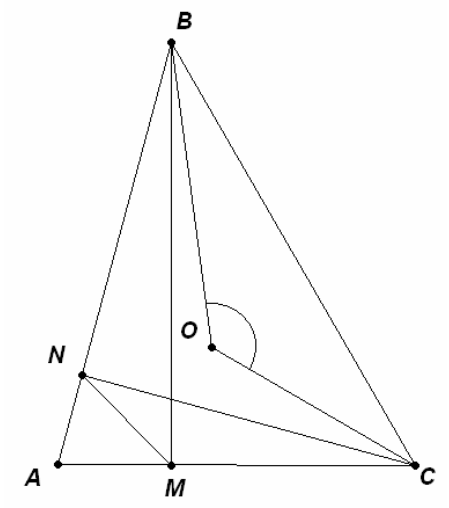
Значит $\sin\angle COB = \sin\left(\dfrac{60^\circ}{2} + 90^\circ\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

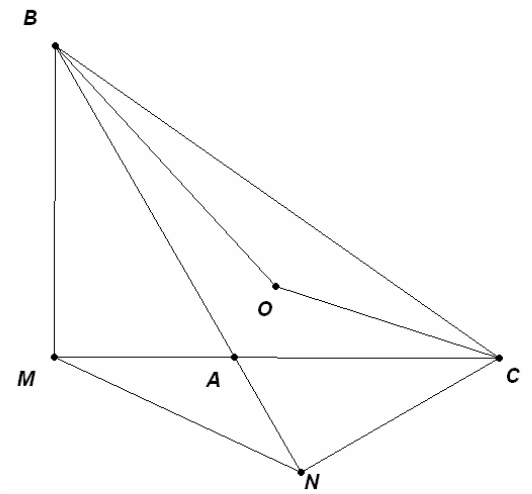
или $\sin\angle COB = \sin\left(\dfrac{120^\circ}{2} + 90^\circ\right) = \dfrac{1}{2}$.

Используем следствие из обобщенной теоремы синусов: $R = \dfrac{BC}{2\sin\angle COB}$.

Отсюда получаем $R = \dfrac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$

или $R = \dfrac{24}{1} = 24$.





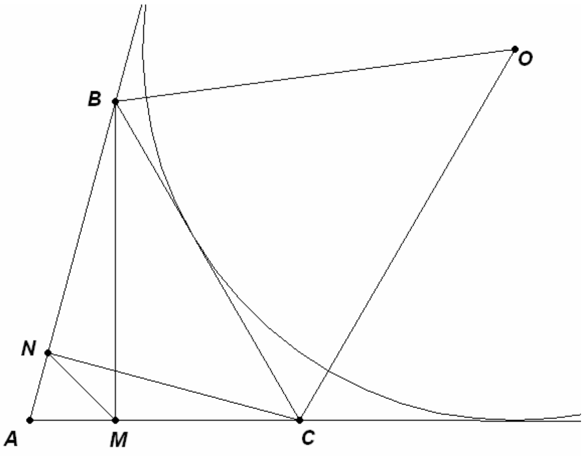
Ответ: $8\sqrt{3}$ или 24.

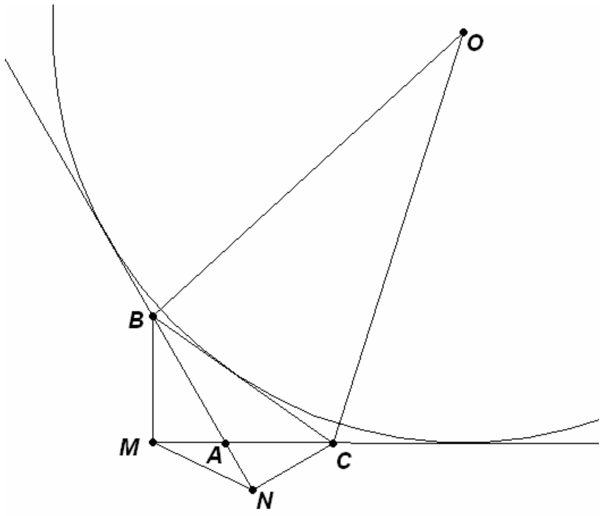
Пример 42. (2010) В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O - центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Известно, что BC = 12, MN = 6. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

• *Если O – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC треугольника ABC, то выполняются равенство:* $\angle COB = 90^\circ - \dfrac{\angle A}{2}$.

(докажите, см. пример 40)

Решение проведите самостоятельно (аналогично решению примера 41).





Ответ: $4\sqrt{3}$ или 12.

Параллелограмм

• *При проведении биссектрисы угла параллелограмма образуется равнобедренный треугольник.*

• *Биссектрисы смежных углов параллелограмма перпендикулярны, а биссектрисы противоположных углов параллельны или лежат на одной прямой.*

Пример 43. (2010) В параллелограмме со сторонами a и b и острым углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного этими биссектрисами.

Решение. Пусть проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 в параллелограмме $ABCD$.

Так как противоположные углы параллелограмма $ABCD$ с соответственно параллельными сторонами, то биссектрисы этих углов параллельны, а потому четырехугольник $PQRS$ - параллелограмм. Далее,

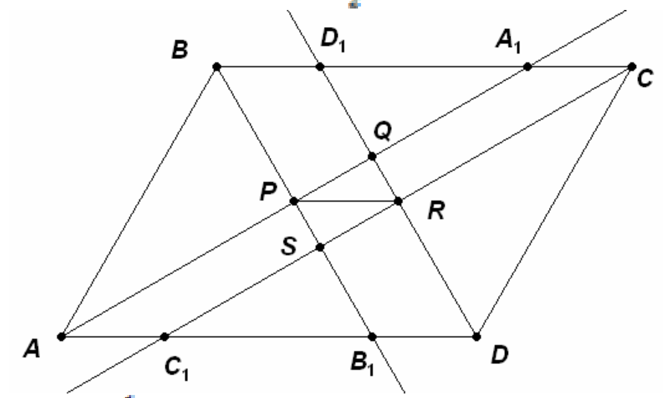
$$\angle APB = 180^\circ - (\angle BAP + \angle ABP) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = 180^\circ - 90^\circ.$$

Таким образом, $PQRS$ – прямоугольник. Треугольники BAB_1 и CDC_1 равнобедренные, так как у них биссектрисы перпендикулярны основаниям. Поэтому $BP = B_1P$, $D_1R = DR$, а следовательно, $PR \parallel AD$. Итак, четырехугольник $PRDB_1$ - параллелограмм, а поэтому $PR = B_1D = AD - AB_1 = AD - AB$.

В прямоугольнике $PQRS$ диагонали равны $a - b$ или $b - a$, и образуют угол α (так как они попарно параллельны сторонам исходного параллелограмма).

Искомая площадь равна $\frac{1}{2}(a-b)^2 \sin\alpha$.



Ответ: $\frac{1}{2}(a-b)^2 \sin\alpha$.

Ромб

Пример 44. (2010) Найдите площадь общей части двух ромбов, диагонали которых равны 2 и 3, а один из ромбов получен из другого поворотом на 90° вокруг его центра.

Решение. Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ имеющиеся ромбы, причем $BD = 3$, $AC = 2$.

Тогда $OB = OB' = 1{,}5$, $AO = C'O = 1$, $BC' = AB' = 0{,}5$.

$\angle AKB' = \angle BKC'$ и $\angle AB'K = \angle KBC'$.

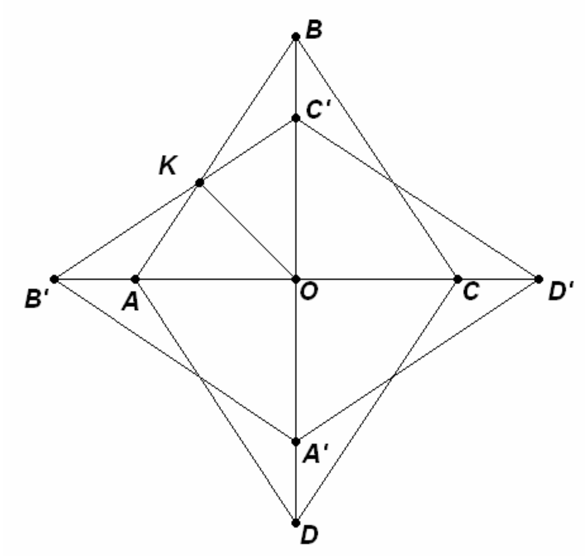
Тогда $\angle B'AK = \angle BC'K$ и $\Delta B'AK = \Delta BC'K$ по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, $AK = C'K$ и $\Delta AKO = \Delta C'KO$ по трем сторонам. Тогда искомая площадь $S = 4S_{OAKC'} = 8S_{OKC'}$.

Так как $OC' = 2BC'$ и треугольники $C'KO$ и $BC'K$ имеют равные высоты, то $S_{OKC'} = 2S_{BKC'}$.

Пусть $S_{BKC'} = x$, тогда $S_{AOB} = 5x$.

Но $S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB=\frac{1,5}{2}=5x$. Отсюда $x=\frac{1,5}{10}$.

$S=8S_{OKC'}=16x=16\cdot\frac{1,5}{10}=\frac{12}{5}$.



Ответ: $\frac{12}{5}$.

Прямоугольник

Пример 45. (2010) Сторона AD прямоугольника $ABCD$ в три раза больше стороны AB; точки M и N делят AD на три равные части. Найдите $\sin(\angle AMB+\angle ANB+\angle ADB)$.

Решение. Обозначим $\angle AMB=\alpha$, $\angle ANB=\beta$, $\angle ADB=\gamma$.

Тогда $tg\alpha=\frac{AB}{AM}=1$, $tg\beta=\frac{AB}{AN}=\frac{1}{2}$,

$tg\gamma=\frac{AB}{AD}=\frac{1}{3}$.

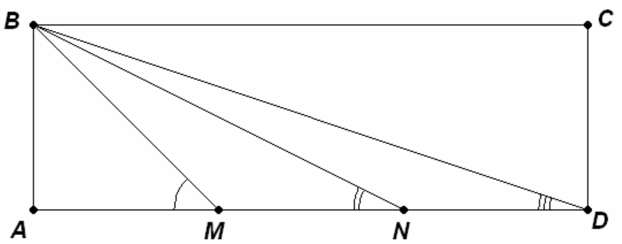
Далее $tg(\beta+\gamma)=\frac{tg\beta+tg\gamma}{1-tg\beta\cdot tg\gamma}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$,

т.е. $\beta+\gamma=45^\circ$.

Из прямоугольного равнобедренного треугольника ABM имеем $\alpha=45^\circ$.

Значит, $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$,

$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin 90^\circ=1$.



Ответ: 1.

Трапеция

Пример 46. (2010) В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A пересекает боковую сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ABE, если площадь трапеции равна S, $AB=a$, $AD=b$, $CD=c$ ($c<a$).

Решение. 1) Из формулы $S=\frac{a+c}{2}\cdot h$

находим высоту трапеции $h=\frac{2S}{a+c}$.

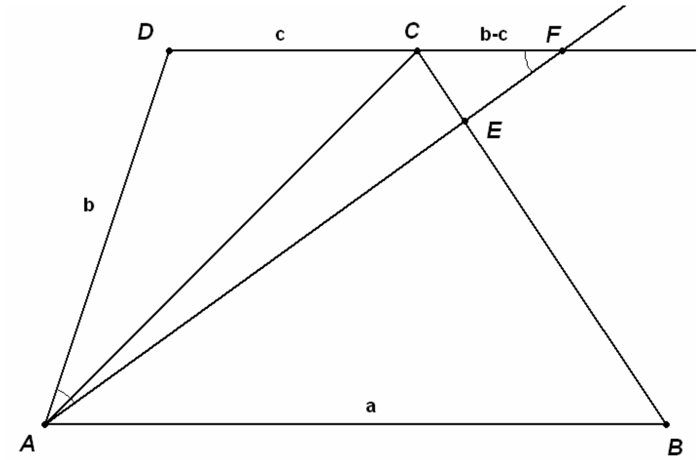
Тогда $S_{ABC}=\frac{1}{2}ah=\frac{aS}{a+c}$.

2) Пусть AF – биссектриса угла A. Треугольник ADF – равнобедренный (докажите). Тогда $CF=b-c$.

3) Треугольники ABE и FCE подобны (докажите). Тогда $\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{CF}=\frac{a}{b-c}$, $\frac{BE}{BC}=\frac{a}{a+b-c}$.

4) Треугольники ABE и ABC имеют общую высоту, поэтому $\frac{S_{ABE}}{S_{ABC}}=\frac{BE}{BC}=\frac{a}{a+b-c}$

и $S_{ABE}=\frac{a}{a+b-c}\cdot\frac{aS}{a+c}=\frac{a^2S}{(a+c)(a+b-c)}$.

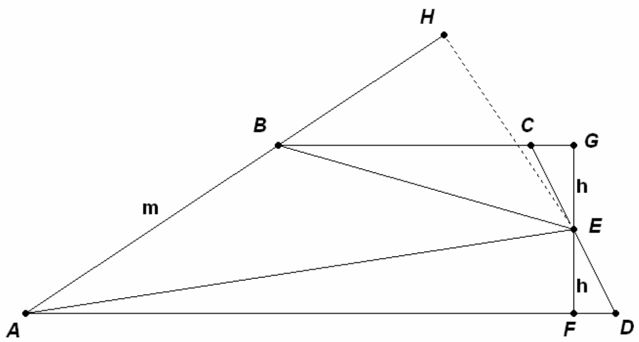


Ответ: $\frac{a^2S}{(a+c)(a+b-c)}$.

Пример 47. (2010) Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ равна l, а расстояние от середины CD до прямой AB равно m. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ высота равна $2h$, тогда $EG=EF=h$ (это следует из равенства прямоугольных треугольников EGC и

EFD). Обозначим $BC = a$, $AD = b$, тогда площадь трапеции $ABCD$ равна $S = (a+b)h$. Сумма площадей треугольников BCE и AED равна $\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{S}{2}$. Следовательно, $S_{ABE} = \frac{S}{2}$. С другой стороны $S_{ABE} = \frac{ml}{2} = \frac{S}{2}$. Отсюда $S = ml$.



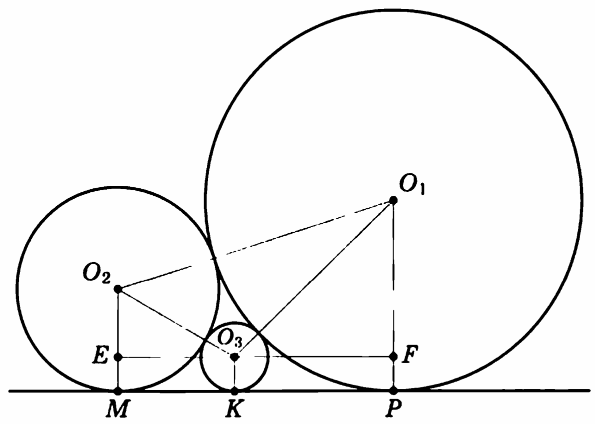
Ответ: *lm*.

Касающиеся окружности

Пример 48. (2010) Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найдите радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.

- *Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов* r *и* R *равен* $2\sqrt{Rr}$.

Решение. Рассмотрим первый случай касания искомой окружности с центром O_3 и двух данных окружностей.

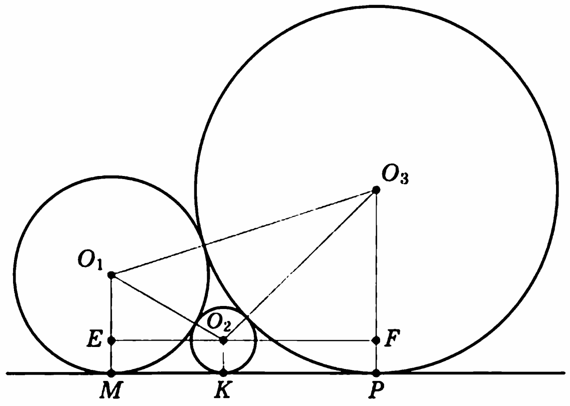


Тогда $MP = MK + KP$, или

$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_3 r_2} + 2\sqrt{r_1 r_3}$, откуда

$\sqrt{r_3} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} = 1{,}2$. Отсюда $r_3 = 1{,}44$.

Второй случай рассмотрите самостоятельно.



Ответ: 1,44 или 36.

Пример 49. (2010) Окружности с центрами O и B радиуса OB пересекаются в точке C. Радиус OA окружности с центром O перпендикулярен OB, причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой OB. Окружность S_1 касается меньших дуг AB и OC этих окружностей, а также прямой OA, а окружность S_2 касается окружности с центром B, прямой OA и окружности S_1. Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

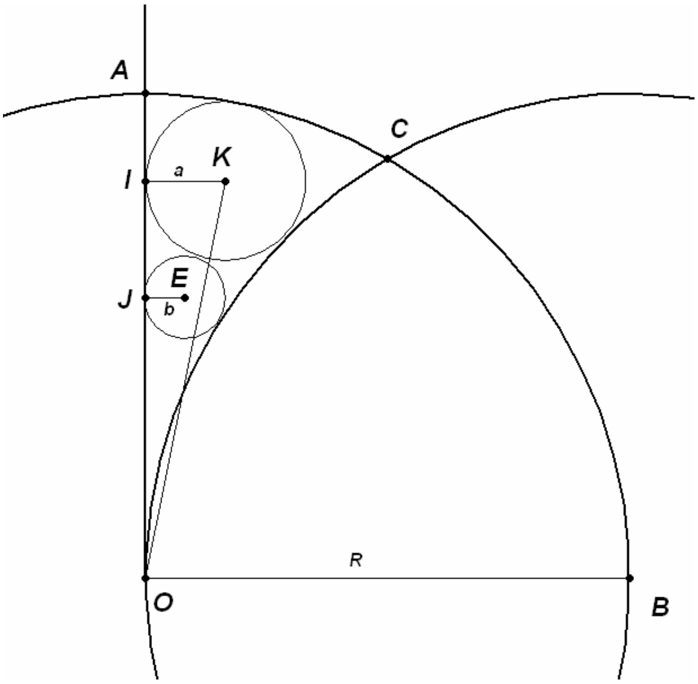
Решение. Так как окружность S_1 радиуса a и окружность с центром B и радиуса R касаются друг друга и общей прямой OA, то имеем

$OI = 2\sqrt{Ra}$, $OK = R - a$.

Далее используем теорему Пифагора в треугольнике OKI: $(R-a)^2 = a^2 + \left(2\sqrt{Ra}\right)^2$.

Отсюда получаем $R = 6a$.

Рассмотрим первый случай касания окружности S_2 радиуса b.



Тогда $OI = OJ + JI$, или

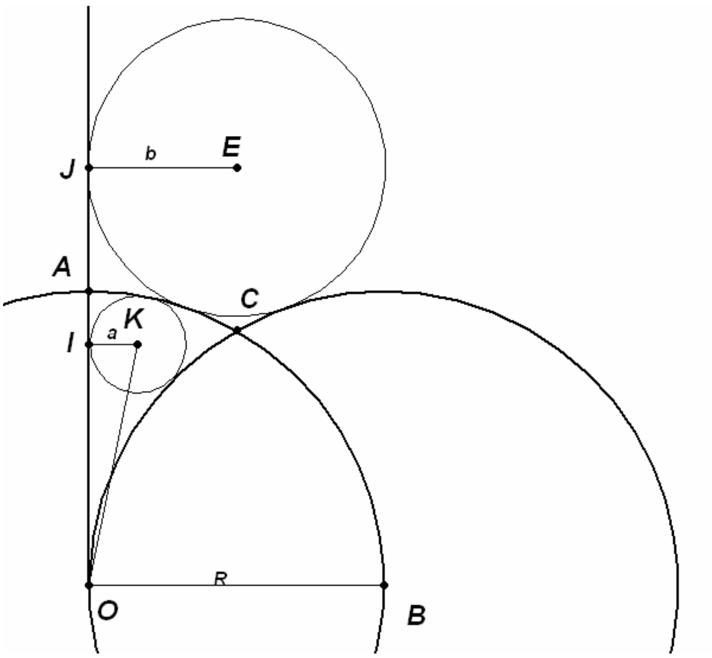
$2\sqrt{aR} = 2\sqrt{bR} + 2\sqrt{ab}$, откуда

$\sqrt{6a^2} = \sqrt{6ab} + \sqrt{ab}$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}}$,

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{7+2\sqrt{6}}{6}$.

Для второго случая имеем $OI = OJ + JI$,

$2\sqrt{bR} = 2\sqrt{aR} + 2\sqrt{ab}$. (вычисления проведите самостоятельно)



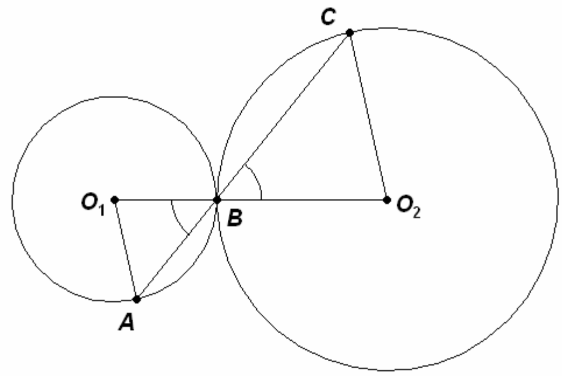
Ответ: $\dfrac{7 \pm 2\sqrt{6}}{6}$.

Пример 50. (2010) Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке C. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите BC.

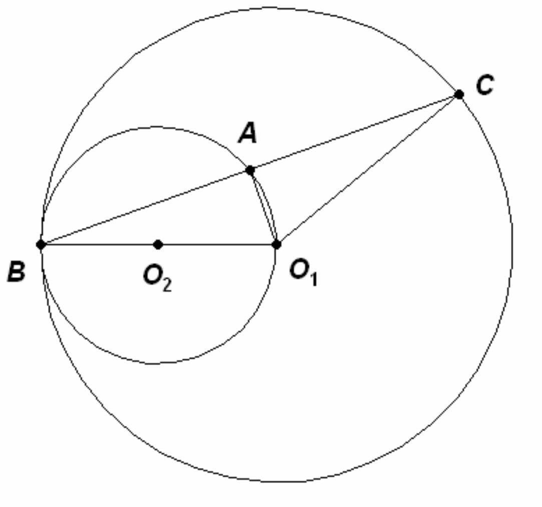
Решение. 1) Окружности касаются внешним образом.

Так как треугольники ABO_1 и CBO_2 подобны (докажите), то $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BO_1}{BO_2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Отсюда $BC = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2}{3} \cdot 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.



2) Окружности касаются внутренним образом. Рассмотрите этот случай самостоятельно и докажите, что он невозможен при исходных числовых данных.



Ответ: $2\sqrt{2}$.

Упражнения

(одним списком)

Медианы треугольника

1. (2010) Найдите площадь треугольника *ABC*, если $AC = 3$, $BC = 4$, а медианы, проведенные из вершин *A* и *B*, перпендикулярны.
Ответ: $\sqrt{11}$.

2. (2010) Медиана *BM* треугольника *ABC* равна его высоте *AH*. Найдите угол *MBC*.
Ответ: 30° или 150°.

Биссектрисы треугольника

3. (2010) В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AD* и *CE*. Найдите длину отрезка *DE*, если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.(01.10.09)
Ответ: $\sqrt{5{,}8}$.

Высоты треугольника

4. (2010) Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол *ACB*.
Ответ: 45° или 135°.

5. (2010) Точки A_1, A_2, A_3, — основания высот треугольника *ABC*. Углы треугольника $A_1A_2A_3$ равны 90°, 60° и 30°. Найдите углы треугольника *ABC*.
Ответ: $45^\circ, 75^\circ, 60^\circ$ или $135^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ или $120^\circ, 15^\circ, 45^\circ$ или $105^\circ, 30^\circ, 45^\circ$.

6. (2010) Точки *D* и *E* – основания высот непрямоугольного треугольника *ABC*, проведенных из вершин *A* и *C* соответственно. Известно, что $\frac{DE}{AC} = k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите сторону *AC*.
Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2abk}$
$\sqrt{a^2 + b^2 + 2abk}$.

Отношение отрезков и площадей

7. (2010) В треугольнике *ABC* на стороне *BC* выбрана точка *D* так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиана *CE* пересекает отрезок *AD* в точке *F*. Какую часть площади треугольника *ABC* составляет площадь треугольника *AEF*?
Ответ: 0,1.

8. (2010) На сторонах выпуклого четырехугольника *ABCD*, площадь которого равна единице, взяты точки $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$ и $N \in DA$. При этом $\frac{AK}{KB} = 2$, $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}$, $\frac{CM}{MD} = 1$, $\frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}$. Найдите площадь шестиугольника *AKLCMN*.
Ответ: $\frac{11}{12}$.

9. (2010) В треугольнике *ABC*, площадь которого равна *S*, биссектриса *CE* и медиана *BD* пересекаются в точке *F*. Найдите площадь четырехугольника *ADEF*, если $BC = a$, $AC = b$.
Ответ: $\frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}$

Угол и окружность

10. (2010) На стороне *AC* угла *ACB*, равного 45°, взята такая точка *D*, что $CD = AD = 2$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки *A* и *D* и касающейся прямой *BC*.
Ответ: $\sqrt{2}$ или $5\sqrt{2}$.

11. (2010) На стороне *BA* угла *ABC*, равного 30°, взята такая точка *D*, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки *A*, *D* и касающейся прямой *BC*.
Ответ: 1 или 7.

12. (2010) Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.
Ответ: 1 или 6.

13. (2010) Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 5 и 12. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.
Ответ: 2 или 15.

Треугольник и окружность

14. (2010) Около треугольника *ABC* описана окружность с центром *O*, угол *AOC* равен 60°. В треугольник *ABC* вписана окружность с центром *M*. Найдите угол *AMC*.
Ответ: 165° или 105°.

15. (2010) Треугольник *ABC* вписан в окружность радиуса 12. Известно, что $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите *AC*.
Ответ: $\sqrt{35} \pm \sqrt{15}$.

16. (2010) В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, *O* — центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 24$, $MN = 12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BOC*.
Ответ: $8\sqrt{3}$ или 24.

17. (2010) Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. Известно, что отрезок *CH* равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол *ACB*.
Ответ: 60° или 120°.

18. (2010) В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, *O* - центр окружности, касающейся стороны *BC* и продолжений сторон

AB и AC. Известно, что $BC = 12$, $MN = 6$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

Ответ: $4\sqrt{3}$ или 12.

19. (2010) В треугольнике ABC угол A равен α, сторона BC равна a, H — точка пересечения высот. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BHC.

Ответ: $\dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

20. (2010) В треугольнике ABC угол A равен α, сторона BC равна a, J — точка пересечения биссектрис. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BJC.

Ответ: $\dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

21. (2010) Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 6 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Ответ: $\dfrac{13}{4}$ или $\dfrac{15}{4}$.

22. (2010) Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Ответ: $\dfrac{17}{2}$ или $\dfrac{41}{10}$.

Параллелограмм

23. (2010) В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}\,|ctg\alpha|$.

24. (2010) Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, $\frac{13\sqrt{3}}{6}$.

25. (2010) Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$, $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

26. (2010) В параллелограмме со сторонами a и b и острым углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного этими биссектрисами.

Ответ: $\frac{1}{2}(a-b)^2\sin\alpha$.

Ромб

27. (2010) Найдите площадь общей части двух ромбов, диагонали которых равны 2 и 3, а один из ромбов получен из другого поворотом на 90° вокруг его центра.

Ответ: $\frac{12}{5}$.

Прямоугольник

28. (2010) Сторона AD прямоугольника $ABCD$ в три раза больше стороны AB; точки M и N делят AD на три равные части. Найдите

$$\sin(\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB).$$

Ответ: 1.

29. (2010) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE.

Ответ: 1 или 3.

Квадрат

30. (2010) Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $tg\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Ответ: 2 или 10.

Трапеция

31. (2010) В трапеции $ABCD$ известны боковые стороны $AB = 27$, $CD = 28$ и верхнее основание $BC = 5$. Известно, что $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите AC.

Ответ: 28 или $2\sqrt{181}$.

32. (2010) Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2a^2+3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\dfrac{3a^2+2b^2}{5}}$.

33. (2010) На боковых сторонах AB и CD трапеции с основаниями AD и BC отмечены точки P и Q соответственно, причем $PQ \parallel AD$. Прямая PQ разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 1:2. Найдите PQ, если $AD = a$ и $BC = b$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2a^2+b^2}{3}}$ или $\sqrt{\dfrac{a^2+2b^2}{3}}$.

34. (2010) Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ равна l, а расстояние от середины CD до прямой AB равно m. Найдите площадь трапеции.

Ответ: lm.

35. (2010) Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении 1:3.

Ответ: 16; 48; 144.

36. (2010) Дана трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 36$, $CD = 34$ и верхним основанием $BC = 10$. Известно, что $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD.

Ответ: 36 или $8\sqrt{19}$.

37. (2010) В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A пересекает боковую сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ABE, если площадь трапеции равна S, $AB = a$, $AD = b$, $CD = c$ $(c < a)$.

Ответ: $\dfrac{a^2S}{(a+c)(a+b-c)}$.

Трапеция и окружность

38. (2010) Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту

Ответ: 39 или 9.

39. (2010) Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = \frac{3}{5}$.

Ответ: 9 или 1.

40. (2010) Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

Ответ: 5 или 30.

41. (2010) Около трапеции $ABCD$ описана окружность радиуса 6 с центром на основании AD. Найдите площадь трапеции, если основание BC равно 4.

Ответ: $32\sqrt{2}$.

Непересекающиеся окружности

42. (2010) Прямая касается окружностей радиусов R и r в точках A и B. Известно, что расстояние между центрами равно a, причем $r < R$ и $r + R < a$. Найдите AB.

Ответ: $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

43. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

Ответ: 30 или 16.

44. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 31 и 17, а расстояние между центрами окружностей равно 50.

Ответ: 48 или 14.

Касающиеся окружности

45. (2010) Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке C. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите BC.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

46. (2010) Точка O – центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что $\angle OAK = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.

Ответ: $2 \pm \frac{4}{3}\sqrt{2}$

47. (2010) Дана окружность радиуса 2 с центром O. Хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем $\angle CDA = 120^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если $OD = \sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{21}-9$ или $3+2\sqrt{3}$.

48. (2010) Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найдите радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.
Ответ: 1,44 или 36.

49. (2010) Окружности S_1 и S_2 радиусов R и r $(R > r)$ соответственно касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M. Найдите BM, если известно, что $AB = a$.
Ответ: $a\sqrt{1 \pm \frac{r}{R}}$

Пересекающиеся окружности

50. (2010) Окружности радиусов 10 и 17 пересекаются в точках A и B. Найдите расстояние между центрами окружностей, если
$AB = 16$.
Ответ: 21 или 9.

51. (2010) Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90^\circ$, $\angle AO_2B = 60^\circ$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.
Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}, \frac{2a}{\sqrt{3}+1}$ или $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}, \frac{2a}{\sqrt{3}-1}$.

52. (2010) Окружности с центрами O и B радиуса OB пересекаются в точке C. Радиус OA окружности с центром O перпендикулярен OB, причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой OB. Окружность S_1 касается меньших дуг AB и OC этих окружностей, а также прямой OA, а окружность S_2 касается окружности с центром B, прямой OA и окружности S_1. Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.
Ответ: $\frac{7 \pm 2\sqrt{6}}{6}$

Источники

1. ЕГЭ. Математика. Тематическая тетрадь. 11 класс / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров. – М.: МЦНМО, Издательство «Экзамен», 2010.
2. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.
3. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.
4. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.
5. Панферов В. С., Сергеев И. Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Ителлект-Центр, 2010.
6. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).
7. Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.
8. www.mathege.ru - Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк заданий)
9. www.alexlarin.narod.ru - сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.
10. www.egetrener.ru - видеоуроки Ольги Себедеш.
11. www.diary.ru

Замеченные опечатки в С3

● В задании № 2 вместо знака ≤ должен быть знак ≥.

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2010

Задания С5

Корянов А. Г. *г. Брянск*

Замечания и пожелания направляйте по адресу:
akoryanov@mail.ru

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Содержание

Аналитические методы

1. Линейные уравнения

1.1. При каких значениях параметра b уравнение
$$9x + b^2 - \left(2-\sqrt{3}\right)b - 2\sqrt{3} = b^4 x - b^2\left(b+\sqrt{3}\right)$$
не имеет корней? (МГУ, 2002)
Ответ: $b = \sqrt{3}$.

1.2. При каких значениях параметра b уравнение
$$b^4 x + b^2 + \left(2+\sqrt{2}\right)b + 2\sqrt{2} = b^2\left(b+\sqrt{2}\right) + 4x$$
имеет бесконечно много корней? (МГУ, 2002)
Ответ: $b = -\sqrt{2}$.

1.3. Для каких значений a решение уравнения
$$10x - 15a = 13 - 5ax + 2a$$
больше 2? (МГУ, 1982)
Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

2. Квадратные уравнения

2.1. (2010) Найдите все такие целые a и b, для которых один из корней уравнения
$$3x^2 + ax^2 + bx + 12 = 0$$
равен $1+\sqrt{3}$.
Ответ: $a = -9,\ b = 12$.

2.2. При каких значениях параметра a уравнение
$$(3a-1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$$
имеет два действительных различных корня? (МГУ, 1980)
Ответ: $\left(\dfrac{9-\sqrt{17}}{16}; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$.

2.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$$
имеет единственное решение. (МГУ, 2003)
Ответ: 0; 1.

2.4. При каких значениях параметра a уравнение
$$x^2 + x + \frac{2a-1}{a+5} = 0$$

не имеет решений? (МГУ, 2004)

Ответ: $(-\infty; -5) \cup \left(\frac{9}{7}; +\infty\right)$.

2.5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2 + (a+4)x + a + 1 = 0$$

имеется ровно один отрицательный. (МГУ, 2007)

Ответ: $(-1; 0] \cup \left\{\frac{2+2\sqrt{13}}{3}\right\}$.

2.6. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - (|a+5| - |a-5|)x + (a-12)(a+12) = 0$$

имеет два различных отрицательных корня.

Ответ: (–13; –12).

2.7. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)x + a = 5$$

имеет два различных положительных корня. (МГУ, 1990)

Ответ: $5 < a < 7$.

2.8. При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма? (МГУ, 1992)

Ответ: $a = -3,\ S = 18$.

2.9. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$ax^2 + (4a-7)x + 4a - 5 = 0$$

имеет в точности один корень на отрезке $[-4; 0]$. (МФТИ, 2003)

Ответ: $\left(-\frac{23}{4}; \frac{5}{4}\right]$.

2.10. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все корни уравнения

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$$

удовлетворяют неравенству $|x| \le 1$.

Ответ: $\{0\} \cup \left[2+\sqrt{3}; 2+\sqrt{5}\right]$.

2.11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых расстояние между корнями уравнения $ax^2 + (2a+2)x + a + 3 = 0$ больше 1. (МГУ, 2001)

Ответ: $\left(-2-2\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(0; -2+2\sqrt{2}\right)$.

2.12. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнения $(2a-1)x^2 + 6ax + 1 = 0$ и $ax^2 - x + 1 = 0$ имеют общий корень. (МГУ, 2000)

Ответ: $-\frac{3}{4}; 0; \frac{2}{9}$.

2.13. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y - x^2 = a \\ x - y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $-\frac{3}{4} \le a < \frac{1}{4}$.

2.14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0 \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 1988)

Ответ: $-1; -\frac{1}{2}; \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$.

3. Уравнения высшей степени

3.1. Число $x = 3$ - один из корней уравнения $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$. Найдите действительные корни уравнения $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$. (МГУ, 1993)

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

3.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a\right)^2 +$$
$$+ (a+5)\left(x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a\right) - a^2 + 8a + 2 = 0$$

имеет а) единственное решение; б) ровно два различных решения. (МГУ, 2002)

Ответ: а) $2+\sqrt{2}$; б) $\left(-\infty; 2-\sqrt{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(2+\sqrt{2}; +\infty\right)$.

3.3. При каких значениях параметра a уравнение $\left(x^2 - x + a^2 + 2\right)^2 = 4a^2\left(2x^2 - x + 2\right)$ имеет ровно 3 различных решения? (МГУ, 1996)

Ответ: $a = \pm\sqrt{2}; a = \pm\frac{1+\sqrt{15}}{4}$.

3.4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1 = 0$$

на промежутке $(-\infty; -1)$ имеет не менее двух корней. (МГУ, 2008)

Ответ: $a > 3 + \sqrt{20}$.

3.5. При каких значениях a уравнения $(2x-1)a^2 - \left(x^2 - x + 1\right)a - \left(x^3 - 4x^2 + 3\right) = 0$ и

$(5-3x)a^2+\left(5x^2-5x-2\right)a-2\left(2x^3-8x^2+6\right)=0$
не имеют общего решения. (МГУ, 1997)

Ответ: $a\neq -\frac{3}{4}; a\neq 0; a\neq 1.$

3.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x+2)+y=3a \\ a+2x^3=y^3+(a+2)x^3 \end{cases}$$

имеет не более двух решений. (МГУ, 2001)

Ответ: $\{-1\}\cup\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\{1\}.$

3.7. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения

$$x^4+(a-3)x^2+(a+10)^2=0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии? (МГУ, 1993)

Ответ: $-7;-\frac{109}{7}.$

3.8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$25x^5+25(a-1)x^3-4(a-7)x=0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию. (МГУ, 2003)

Ответ: $-2.$

3.9. Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3+(a^2-9a)x^2+8ax-64=0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни. (МГУ, 2003)

Ответ: $a=7; x_1=2,\ x_2=4,\ x_3=8.$

3.10. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4-(a-1)\sqrt{a+3}y+a^4+2a^3-9a^2-2a+8=0 \\ y=\sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения? (МГУ, 1998)

Ответ: $a=2.$

4. Уравнения с модулем

4.1. При каких значениях a уравнение

$$2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$$

имеет четыре различных решения? (МГУ, 1994)

Ответ: $0<a<\frac{1}{8}.$

4.2. При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x-9a|-2a^2+35+x=0$$

не имеет решений? При каких значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30;63]$? (МГУ, 2003)

Ответ: $\left(-\frac{5}{2};7\right)$; $\left[\frac{9-\sqrt{211}}{2};-\frac{5}{2}\right]\cup\{7\}.$

4.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-1|$ имеет хотя бы один корень. (МГУ, 2005)
Ответ: $-8\le a\le 6.$

4.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-3|$ имеет два различных корня. (МГУ, 2005)
Ответ: $(-24;18).$

4.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $3x+\big|2x+|a-x|\big|=7|x+2|$ имеет хотя бы один корень. (МГУ, 2005)
Ответ: $a\le -12$ или $a\ge 8.$

4.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $5x-\big|3x-|x+a|\big|=10|x-2|$ имеет хотя бы один корень. (МГУ, 2005)
Ответ: $-18\le a\le 14.$

4.7. Найдите все значения параметра c, при которых уравнение

$$|x^2-2x|+|x^2-3x+2|=x^2-4x+c$$

имеет ровно три различных решения. (МГУ, 1992)

Ответ: $4;\frac{19}{4}.$

4.8. Найдите все значения параметра k, при которых уравнение

$$2x-|x-k^2|=11k-3|x+4k|$$

а) не имеет решений; б) имеет конечное непустое множество решений. (МГУ, 1992)
Ответ: а) $(-23;0)$; б) $(-\infty;-23)\cup(0;+\infty)$

4.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$2|x-a|+a-4+x=0$$

принадлежат отрезку $[0;4]$. (МГУ, 1984)

Ответ: $\frac{4}{3}\le a\le 2.$

4.10. При каких значениях b уравнение $x^2-(4b-2)\cdot|x|+3b^2-2b=0$ имеет два различных решения?

Ответ: $0 < b < \frac{2}{3}$; $b = 1$.

4.11. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|1 - ax| = 1 + (1 - 2a)x + ax^2$$

имеет единственный корень.

Ответ: 0; 1.

4.12. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x + 2| = ax + 1$?

Ответ: если $a \in (0{,}5;1]$, то нет решений; если $a \in (-\infty;-1] \cup \{0.5\} \cup (1;+\infty)$ - одно решение; при $a \in (-1;0.5)$ - два решения.

4.13. При каких значениях параметра a уравнение $x + 2 = a|x - 1|$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Ответ: при $-1 < a \le 1$ уравнение имеет единственное решение, $x = \frac{a - 2}{a + 1}$.

5. Дробно-рациональные уравнения

5.1. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + 3a - 2}{x^2 - 6x + 5} = 0$ имеет единственное решение?

Ответ: $a = 1$ или $a = -1$.

6. Иррациональные уравнения

6.1. При каких значениях b уравнение $\sqrt{x + b} = x + 3$ имеет единственное решение?

Ответ: $b = 2{,}75$; $b > 3$.

6.2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x + 1} = x + a$ имеет единственное решение?

Ответ: $a = 1{,}25$; $a < 1$.

6.3. При каких a уравнение $2x + 3\sqrt{x} + 2a^2 - 11a = 0$ имеет единственное решение?

Ответ: $[0; 5{,}5]$.

6.4. Для каждого значения a из промежутка $(-3; 0)$ найдите число различных решений уравнения

$$\left(2x^2 - 5ax + 2a^2\right)\sqrt{x - \frac{2}{a}} = 0. \text{ (МГУ, 2007)}$$

Ответ: если $-3 < a \le -2$, то одно решение; если $-2 < a \le -1$, то два решения; если $-1 < a < 0$, то три решения.

6.5. (2010) При всех a решите уравнение

$$x - \sqrt{a - x^2} = 1.$$

Ответ: если $a < 1$, то решений нет; если $a \ge 1$, то $x = \frac{\sqrt{2a - 1} + 1}{2}$.

7. Показательные уравнения

7.1. При каких значениях параметра a уравнение $4^x - (5a - 3)2^x + 4a^2 - 3a = 0$ имеет единственное решение?

Ответ: $0 < a \le \frac{3}{4}$; $a = 1$.

7.2. При каких значениях параметра a уравнение $(a - 1)\cdot 4^x + (2a - 3)\cdot 6^x = (3a - 4)\cdot 9^x$ имеет единственное решение? (МГУ, 2005)

Ответ: $(-\infty;1] \cup \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right)$.

7.3. Найдите все значениях параметра b, при которых уравнение $9^x + (b^2 + 6)\cdot 3^x - b^2 + 16 = 0$ не имеет решения. (МГУ, 1993)

Ответ: $[-4; 4]$.

7.4. При каких значениях параметра a уравнение

$$16^x - 3\cdot 2^{3x+1} + 2\cdot 4^{x+1} - (4 - 4a)\cdot 2^{x-1} - a^2 + 2a - 1 = 0$$

имеет три различных корня? (МГУ, 2007)

Ответ: $(0;1) \cup (1;4) \cup (4;5)$.

7.5. При каждом значении параметра a решить уравнение

$4^x - 2a(a + 1)\cdot 2^{x-1} + a^3 = 0$. (МГУ, 1985)

Ответ: при $a = 0$ решений нет; при $a < 0$ единственное решение $2\log_2|a|$; при $a = 1$ единственное решение 0; при $a > 0$, $a \ne 1$ два решения $\log_2 a$, $2\log_2 a$.

8. Логарифмические уравнения

8.1. При каких значениях a уравнение $2\log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$ имеет четыре различных корня?

Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right)$.

8.2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_5\left(25^x - \log_5 a\right) = x$ имеет единственное решение. (МФТИ, 2004)

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}; [1;+\infty)$..

8.3. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \log_3(2-x-y)+2 = \log_3(17-8x-10y) \\ (x-a)^2 + x = y + a + 6 \end{cases}$$

имеет ровно два решения. (МФТИ, 2002)

Ответ: $-5 < a < 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

9. Тригонометрические уравнения

9.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(a^2-6a+9\right)\left(2+2\sin x-\cos^2 x\right)+$ $+\left(12a-18-2a^2\right)\cdot(1+\sin x)+a+3=0$ не имеет решений. (МГУ, 1989)

Ответ: $a < -3;\ 1 < a < 6$.

9.2. Для каждого значения a найдите все решения уравнения $\cos 2x + 2\sin^2(x+a) + 2 - \sin a = 0$, принадлежащие промежутку $\pi \le x \le 2\pi$.. (МГУ, 2001)

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$ при $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$; при других a решений нет.

9.3. При каких значениях a уравнение $\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ имеет ровно одно решение на промежутке $0 \le x < 2\pi$.. (МГУ, 1999)

Ответ: $a = -2;\ a = 1$.

9.4. При каких значениях параметра a уравнение $\left(\sin x - \log_4 a\right)(\sin x - 2 + 2a) = 0$ имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$? (МГУ, 2003)

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(\frac{3}{2}; 4\right]$

9.5. Найдите все значения параметра q, при которых уравнение $\sin^2 x + (q-2)^2 \sin x + q(q-2)(q-3) = 0$ имеет на отрезке $[0;2\pi]$ ровно три корня. (МГУ, 1991)

Ответ: $0; 2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

9.6. Для каждого значения a найдите число решений уравнения $a tg x + \cos 2x = 1$, принадлежащих промежутку $[0;2\pi]$. (МГУ, 1996)

Ответ: 3 решения при $a < -1,\ a = 0,\ a > 1$; 5 решений при $a = \pm 1$; 7 решений при $-1 < a < 1,\ a \ne 0$.

10. Уравнения смешанного типа

10.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{\left(x^3-1\right)\left(x^2-16\right)}{\lg(15a-x)-\lg(x-a)} = 0$$

имеет единственное решение. (МГУ, 2002)

Ответ: $\left(\frac{1}{15}; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; \frac{4}{15}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1;4)$.

10.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos\left(\sqrt{a^2-x^2}\right) = 1$ имеет ровно восемь различных решений.

Ответ: $(-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$.

10.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos\left(\sqrt{a^2-x^2}\right) = 1$ имеет ровно десять различных решений.

Ответ: $(-10\pi; -8\pi) \cup (8\pi; 10\pi)$.

10.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sin\left(\sqrt{a^2-x^2}\right) = 0$ имеет ровно восемь различных решений.

Ответ: $(-4\pi; -3\pi) \cup (3\pi; 4\pi)$.

10.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sin\left(\sqrt{a^2-x^2}\right) = 0$ имеет ровно шесть различных решений.

Ответ: $(-3\pi; -2\pi) \cup (2\pi; 3\pi)$.

10.6. При каких значениях параметра a уравнение $(1+\sin(3ax))\sqrt{5\pi x - x^2} = 0$ имеет ровно 5 различных корней? (МГУ, 2004)

Ответ: $\left[-\frac{13}{30}; -\frac{3}{10}\right) \cup \left(\frac{11}{30}; \frac{1}{2}\right]$.

10.7. При каких значениях a, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, уравнение $\sqrt{2\sin(x-a)+\sqrt{3}} = \cos 6x - 1$ имеет решения? (МГУ, 1993)

Ответ: $-\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}$.

10.8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x^2-6|x|-a\right)^2+12\left(x^2-6|x|-a\right)+37=\cos\frac{18\pi}{a}$$
имеет ровно два корня. (МГУ, 1995)
Ответ: $a=-3$ и $a=9$.

10.9. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$x^2+4x+6-4a(x-a)-\cos(x+2)=$$
$$=8a+\cos(x-4a+2).$$ (МГУ, 2008)

Ответ: если $a=\pi n$, то $x=2\pi n-2$, $n\in Z$.

11. Линейные неравенства

11.1. Найдите все значения параметра $p\in[-4;4]$, при которых неравенство

$$(p-2)((x+1)(p-3)+2x)>0$$

выполняется при любых $x\ge 0$. (МГУ, 2004)
Ответ: $[-4;1]\cup(3;4]$.

12. Квадратные неравенства

12.1. (2010) Найдите все значения a, для каждого из которых неравенство

$$ax^2-4x+3a+1>0$$

а) выполняется для всех x;
б) выполняется для всех $x>0$;
в) выполняется для всех $x<0$;
г) выполняется для всех $-1<x<0$.

Ответ: а) $a>1$; б) $a>1$; в) $a\ge 0$; г) $a\ge -\frac{1}{3}$

12.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых из неравенств $0\le x\le 1$ следует неравенство

$$\left(a^2+a-2\right)x^2-(a+5)x-2\le 0.$$

Ответ: $[-3;3]$.

12.3. При каких целых a неравенство $2\log_{\frac{1}{2}}a-3+2x\log_{\frac{1}{2}}a-x^2<0$ верно для любого значения x? (МГУ, 2005)
Ответ: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

12.4. Для каких значений a система неравенств

$$\begin{cases}-x^2+12x-a\ge 0\\ x\le 2\end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x? (МГУ, 1994)
Ответ: $a\le 20$.

12.5. Найдите такие значения x, при которых неравенство

$$(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1<a<3$. (МГУ, 1994)
Ответ: $\left[3-\sqrt{6};2\right]\cup\left[5;3+\sqrt{6}\right]$.

12.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $6x^2+4a^2+6ax-3x-24a+35<0$ содержит хотя бы одно целое число. (МГУ, 2007)
Ответ: $(2;7)$.

12.7. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0\end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 2001)
Ответ: $-\frac{3}{4};\frac{4}{3}$.

12.8. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases}x^2-x+a\le 0\\ x^2+2x-6a\le 0\end{cases}$$

имеет единственное решение. (МФТИ, 2004)
Ответ: $\frac{1}{4};0$.

12.9. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых единственное решение имеет система неравенств

$$\begin{cases}by^2+4by-2x+7b+4\le 0\\ bx^2-2y-2bx+4b-2\le 0\end{cases}$$ (МГУ, 1994)

Ответ: $\frac{1}{3}$.

12.10. При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y\le k^2+10k+20\\ 5x^2+5y^2-2kx+4ky\le 5-k^2\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение? (МГУ, 2001)
Ответ: $Z\setminus\{-11;-10;\dots;-4;-3\}$.

12.11. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x-a)(ax-2a-3)\ge 0\\ ax\ge 4\end{cases}$$

не имеет решений. (МГУ, 1967)
Ответ: $(-2;0]$.

12.12. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x-a)(ax-2a-3)\ge 0\\ ax>4\end{cases}$$

не имеет решений.
Ответ: $-2\le a\le 0$.

13. Неравенства высшей степени

13.1. Найдите все значения x, для каждого из которых неравенство

$$(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+\left(5+4a-a^2\right)<0$$

выполняется хотя бы при одном значении $a\in[-1;2]$. (МГУ, 1992)

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

13.2. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a\ge 0 \\ x^3-(a+3)x^2+3ax\le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение (МГУ, 2001)

Ответ: $[3;+\infty)$.

14. Неравенства с модулем

14.1. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\left|\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$ выполняется при всех x.

Ответ: $-5<a<1$.

14.2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\left|x^2-2x+a\right|>5$ не имеет решений на отрезке $[-1;2]$. (МГУ, 2000)

Ответ: $[-4;2]$.

14.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2+4|x-a|\ge a^2$ справедливо для всех действительных x. (МГУ, 1993)

Ответ: $[-2;2]$.

14.4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+4x+6a\cdot|x+2|+9a^2\le 0$ имеет не более одного решения. (МГУ, 1995)

Ответ: $a\ge\dfrac{2}{3}$.

14.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|x+1|+2|x+a|>3-2x$ выполняется для любого x.

Ответ: $(-\infty;-1{,}5)$.

14.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $2x+2|x-a|+|x-1|>3$ выполняется для любого x.

Ответ: $(1{,}5;+\infty)$.

14.7. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $2x+2|x+a|+|x-1|>3$ выполняется для любого x.

Ответ: $(-\infty;-1{,}5)$.

14.8. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x+a$ при условии $|2x+4-2a|+|x-2+a|\le 3$. (МГУ, 2005)

Ответ: $[-1;5]$.

14.9. (2010) Найдите все пары чисел p и q, для каждой из которых неравенство

$$\left|x^2+px+q\right|>2$$

не имеет решений на отрезке $[1;5]$.

Ответ: $p=-6,\ q=7$.

15. Дробно-рациональные неравенства

15.1. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3;-1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\dfrac{x-3b}{b-2x}<0$. (МГУ, 2003)

Ответ: $(-\infty;-6)\cup\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

15.2. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a}<0$ выполняется для всех таких x, что $1\le x\le 2$. (МГУ, 1974)

Ответ: $\dfrac{1}{2}<a<1$.

15.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a}\ge 0 \\ x-8>ax \end{cases}$$

не имеет решений. (МГУ, 1967)

Ответ: $[1;3]$.

15.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{x+ax+a}{x-2a-2}\ge 0 \\ x+ax>8 \end{cases}$$

не имеет решений. (МГУ, 1967)

Ответ: $[-3;-1]$.

15.5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax^2+(a-3)x+\dfrac{2}{a}-2a\geq 0 \\ ax\geq a^2-2 \end{cases}$$

не имеет решений. (МГУ, 1967)

Ответ: $a<-1-\sqrt{5}$.

15.6. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{a^2x+2a}{ax-2+a^2}\geq 0 \\ ax+a>\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

не имеет решений. (МГУ, 1967)

Ответ: $a=0$, $a\leq -\frac{1}{2}$.

15.7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x^2\cdot 2^{|2a-1|}-2x+1}{x^2-(a-2)x-2a}>0.$$

(МГУ, 2003)

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$ при $a=\frac{1}{2}$;
$(-\infty;a)\cup(-2;+\infty)$ при $a\leq -2$;
$(-\infty;-2)\cup(a;+\infty)$ при $-2<a<\frac{1}{2}$ или $a>\frac{1}{2}$.

16. Иррациональные неравенства

16.1. При каких значениях a неравенство $\left(x^2-(a+2)x-2a^2+4a\right)\sqrt{1-x}\leq 0$ имеет единственное решение? (МГУ, 2000)

Ответ: $\left[\frac{1}{2};1\right]$

16.2. Определите, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a}\geq x$ образуют на числовой прямой отрезок длиной $2|a|$ (МГУ, 1996)

Ответ: $2;\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

16.3. Найдите все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка $[1;5]$ удовлетворяют неравенству

$$3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0.$$ (МГУ, 1992)

Ответ: $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$.

16.4. При всех значениях параметра b решите неравенство

$$2(b-1)\sqrt{3x+1}+1\geq 3bx+b-3x$$ (МГУ, 2006)

Ответ: при $b<1$ $x\in\left\{-\frac{1}{3}\right\}\cup[1;+\infty)$; при $b=1$ $x\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$; при $b>1$ $x\in\left[-\frac{1}{3};1\right]$.

17. Показательные неравенства

17.1. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство
$16^x<30\cdot 4^x-a$ не имеет ни одного целочисленного решения. (МГУ, 1995)

Ответ: $a\geq 224$.

18. Логарифмические неравенства

18.1. Для любого допустимого значения a решите неравенство
$\log_{2a}\left(\log_3 x^2\right)>1$ и найдите, при каком значении a множество точек x, не являющихся решением неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6. (МГУ, 1999)

Ответ: $\left(-3^a;-1\right)\cup\left(1;3^a\right)$ при $0<a<0{,}5$;
$\left(-\infty;-3^a\right)\cup\left(3^a;+\infty\right)$ при $a>0{,}5$, длина промежутка равна 6 при $a=1$.

19. Неравенства смешанного типа

19.1. (2010) Найдите наибольшее значение параметра b, при котором неравенство

$$\sqrt{b^5}\left(8x-x^2-16\right)+\frac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}\geq -\frac{2}{3}b|\cos\pi x|$$

имеет хотя бы одно решение. (МГУ)

Ответ: $\frac{1}{9}$.

19.2. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}\cdot\left(x^2-2x+1\right)+\frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1}\leq\sqrt[4]{a^3}\cdot\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$$

имеет хотя бы одно решение. (МГУ)

Ответ: $\frac{1}{16}$.

19.3. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство

$\left|3\sin^2 x + 2a\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x + a\right| \le 3$. (МГУ, 1988)

Ответ: $[-2{,}4;0]$.

19.4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство

$\left|\sin^2 x - 2(a-1)\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x + 2 - a\right| \le 6$.

(МГУ, 1988)

Ответ: $\left[1;\dfrac{29}{5}\right]$.

19.5. При каких значениях параметров a и b система неравенств

$\begin{cases} a+\sin bx \le 1 \\ x^2+ax+1\le 0\end{cases}$ имеет единственное решение?

(МГУ, 1994)

Ответ: $a=2,\ b=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$

$a=-2,\ b\in R.$

20. Инвариантность

* Инвариантность в математическом смысле — неизменность какой-либо величины по отношению к некоторым преобразованиям.
* Инварианты (от лат. invarians, родительный падеж invariantis — неизменяющийся), числа, алгебраические выражения и т. п., связанные с каким-либо математическим объектом и остающиеся неизменными при определенных преобразованиях этого объекта или системы отсчёта, в которой описывается объект.

20.1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}+2a\right| = a^2+1$$

имеет нечетное число решений. (МГУ, 1999)

Ответ: $a=1$ или $a=-1$.

20.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(5-2\sqrt{6}\right)^x+\left(5+2\sqrt{6}\right)^x-5a = y-|y|-8 \\ x^2-(a-4)y=0\end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 2007)

Ответ: 2; 4.

20.3. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|y|}+5|y|+3x+4=5y^2+3a \\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 1987)

Ответ: $a=\dfrac{4}{3}$.

20.4. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x| = y+x^2+a \\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

имеет только одно решение. (МГУ, 1966)

Ответ: $a=0$.

20.5. Найдите все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} xyz+z=a \\ xyz^2+z=b \\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$$

имеет только одно решение. (МГУ, 1966)

Ответ: $a=b=-2$.

20.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1-\sqrt{|1-x|}=\sqrt{7|y|} \\ 49y^2+x^2+4a=2x-1\end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно четыре различных решения. (МГУ, 1986)

Ответ: $a=-\dfrac{1}{32};\ a=-\dfrac{1}{4}$.

20.7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y\ge x^2+2a \\ x\ge y^2+2a\end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 1984)

Ответ: $a=\dfrac{1}{8}$.

20.8. (2010) Найдите все значения p, при каждом из которых найдется q такое, что система

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=q|x|+p\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $p=-1,\ p=1$.

20.9. (2010) Найдите все значения p, при каждом из которых для любого q система

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=q|x|+p\end{cases}$$

имеет решения.

Ответ: $-1\le p\le 1$.

21. Функции

21.1. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции

$f(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}$ лежит на интервале $(-3;3)$.

Ответ: $(-5;1)$

21.2. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции

$f(x)=\dfrac{3x+p}{x^2+5x+7}$ содержит полуинтервал $(-1;3]$. Определите при каждом таком p множество значений функции $f(x)$. (МГУ, 1999)

Ответ: $p=9;\ [-1;3]$.

21.3. Найдите все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции

$f(x)=\dfrac{x^2+cx-1}{2x^2-3x+2}$ принадлежат интервалу $(-1;2)$. (МГУ, 1998)

Ответ: $\left(3-2\sqrt{3};-6+2\sqrt{15}\right)$.

21.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x)=x^2+4x+\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|-a$$

принимает

1) только неотрицательные значения;

2) как положительные, так и отрицательные значения.

Ответ: 1) $a\le -\dfrac{57}{32}$; 2) $a>-\dfrac{57}{32}$.

21.5. Найдите значения a, при которых наибольшее значение функции $f(x)=2x^2+x(5-3a)+a^2-3a+4$ на отрезке с концами в точках $a-1$ и -4 минимально. Укажите это значение. (МГУ, 2006)

Ответ: $-5;-4$.

21.6. (2010) Найдите все такие значения a, для которых наименьшее значение функции $\left|x^2-(1+a)x+a\right|+(a-1)\cdot|x+1|$ меньше 2.

Ответ: $(-\infty;2)$.

21.7. (2010) Найдите все такие a, что наименьшее значение функции $f(x)=4|x-a|+\left|x^2+2x-3\right|$ меньше 4.

Ответ: $(-4;-2)\cup(0;2)$.

21.8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x)=\dfrac{4\sin x+a}{4a-2\sin x}$ принимает все значения из отрезка $[0;1]$. (МГУ, 2005)

Ответ: $0<|a|\le 2$.

Функционально-графические методы

Координатная плоскость *xOy*

22. Параллельный перенос (вдоль оси *y*)

22.1. При каких значениях параметра a уравнение $x-a=\big||2x|-1\big|$ имеет ровно три корня?

Ответ: $a=-0{,}5$ или $a=-1$.

22.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\left|2|x|-a^2\right|=x-a$ имеет ровно три различных решений.

Ответ: $-2;-0{,}5$.

22.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$f(x)=2\left|2|x|-a^2\right|-x+a$

имеет ровно три нуля функции.

Ответ: $-2;-0{,}5$.

22.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$f(x)=2\left|2|x|-a^2\right|-x+a$

имеет две различных точки перемены знака.

Ответ: $\left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]$.

22.5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\big||5x|-10\big|=a+3x$ имеет ровно три различные решения. Для каждого полученного значения a найдите все эти решения.

Ответ: при $a=10$ решения $x=-2{,}5$; $x=0$; $x=10$; при $a=6$ решения $x=-2$; $x=0{,}5$; $x=8$.

22.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-\left|x^2+2x-3\right|-a.$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Ответ: $(-3{,}5;1)$.

22.7. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-3x+2-\left|x^2-5x+4\right|-a.$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Ответ: $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$.

22.8. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет единственное решение?

Ответ: $a=1{,}25$ или $a<1$.

22.9. При каких значениях a неравенство $\sqrt{1-x^2}>a-x$ имеет решение?

Ответ: $a<\sqrt{2}$.

22.10. При каких значениях c уравнение

$$-\sqrt{16-x^2}=c+x$$

имеет единственное решение? (МГУ, 2007)

Ответ: $\{-4\sqrt{2}\}\cup(-4;4]$.

22.11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x+y=a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a=\pm\sqrt{2}$.

22.12. Найдите значения параметра a, при которых система $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y-|x|=a\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\{-\sqrt{2}\}\cup(-1;1)$.

22.13. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ |y|-x=a\end{cases}$ имеет ровно три различные решения?

Ответ: при $a=\sqrt{2}$.

23. Параллельный перенос (вдоль оси x)

23.1. При каких значениях b уравнение $\sqrt{x+b}=x+3$ имеет единственное решение?

Ответ: $b=2{,}75$; $b>3$.

23.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$|2x-a|+1=|x+3|$

имеет ровно один корень.

Ответ: -4; -8.

23.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$1=|x-3|-|2x+a|$

имеет ровно один корень.

Ответ: -4; -8.

23.4. При каком значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases}x+3|y|+5=0\\ (x-a)^2+y^2=4\end{cases}$$

имеет три различных решения?

Ответ: $a=-7$.

23.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|2x-a|+1\le|x+3|$ образуют отрезок длины 1.

Ответ: $a=-\dfrac{5}{2}$, $a=-\dfrac{19}{2}$.

23.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|3x-a|+2\le|x-4|$ образуют отрезок длины 1.

Ответ: $a=2$, $a=22$.

23.7. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{3-x}+|x-a|\le 2$ является отрезок.

Ответ: $(-1;1)\cup\left[\dfrac{5}{4};5\right)$.

23.8. Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x}+|x+a|\le 3$ является отрезок.

Ответ: $\left(-8;-\dfrac{9}{4}\right]\cup(-2;4)$.

23.9. Найдите все значения a, при которых уравнение $a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$ имеет ровно одно решение. (МГУ, 1994)

Ответ: $[2;3)\cup(3;4]$.

24. Поворот

24.1. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x+2|=ax+1$?

Ответ: если $a\in(0{,}5;1]$, то нет решений; если $a\in(-\infty;-1]\cup\{0.5\}\cup(1;+\infty)$ - одно решение; при $a\in(-1;0.5)$ - два решения.

24.2. Сколько решений в зависимости от параметра b имеет уравнение $|x-4|=bx+2$?

Ответ: нет решений при $b \in [-1;-0,5)$; одно решение при $b \in (-\infty;-1) \cup \{-0,5\} \cup [1;+\infty)$; два решения при $b \in (-0,5;1)$.

24.3. Найдите значения параметра a, при котором уравнение $|x^2 - 5x + 6| = ax$ имеет ровно три различных решения.

Ответ: $5 - 2\sqrt{6}$.

24.4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x^2 - 4x + 3| = a(x-1)$ имеет два различных корня. Указать эти корни.

Ответ: $a \in (-\infty;-2) \cup [2;+\infty) \cup \{0\}$

$x = 1$, $x = a + 3$.

24.5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 - 5|x|\right| = a(x+4)$$

имеет ровно три различных корня. (МГУ, 2004)

Ответ: 0;1.

24.6. При каких значениях параметра a уравнение $x + 2 = a|x-1|$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Ответ: при $-1 < a \le 1$ уравнение имеет единственное решение, $x = \dfrac{a-2}{a+1}$.

24.7. При каких значениях параметра a уравнение $b|x-3| = x+1$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Ответ: при $-1 < b \le 1$ уравнение имеет единственное решение, $x = \dfrac{3b-1}{b+1}$.

24.8. Выясните, при каких значениях a уравнение $|x+2| + a|x-1| = 3$: $\quad(*)$

а) имеет единственный корень и найти его;
б) имеет ровно два корня и найти их;
в) имеет бесконечное множество корней.

Ответ: а) $|a| > 1$, $x = 1$; б) $|a| < 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{a-5}{a+1}$; в) $a = 1$ и $a = -1$.

24.9. При каких значениях параметра a уравнение $6\sqrt{x-2} = ax + 7$ имеет единственное решение?

Ответ: $a \in [-3,5;0]$; $a = 1$.

24.10. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-9} = ax + 7a - 3$ имеет единственное решение.

Ответ: $0 < a < \dfrac{3}{16}$, $a = \dfrac{1}{4}$.

24.11. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y + a = ax^2 \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Ответ: $-2; 2$.

24.12. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + |x-1| = 0$ имеет три решения?

Ответ: при $a = -\dfrac{1}{4}$.

24.13. Определите, при каких значениях параметра b при любых значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y + 4 = 0 \\ y + ax + ab = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения $(x; y)$. (МГУ, 2006)

Ответ: $(-4; -1)$.

24.14. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(4;8]$ значение выражения $\log_2^2 x - 8$ не равно значению выражения $(2a-1)\log_2 x$.

Ответ: $a \le -\dfrac{1}{2}$, $a > \dfrac{2}{3}$.

25. Гомотетия

25.1. При каких действительных значениях параметра a система

$$\begin{cases} 3|x| + 2|y| = 12 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Ответ: $a \in \left(\dfrac{144}{13};16\right)$.

25.2. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |y| = x^2 - 4 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Ответ: $a = 4$.

25.3. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет решение?

Ответ: $a \ge 2\sqrt{2}$.

25.4. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ |x|+|y|=a \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра a?

Ответ: если $a<1$ или $a>\sqrt{2}$, то нет решений; если $a=1$ или $a=\sqrt{2}$, то решений четыре; если $1<a<\sqrt{2}$, то решений восемь.

25.5. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+64-16x}+\sqrt{x^2+y^2+36+12y}=10 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $-8\le a<-6$, $a=\pm\frac{24}{5}$, $6<a\le 8$.

25.6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 8xy-25=0, \\ x^2=y+2x \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2+y^2\le a^2$.

Ответ: $\left(-\infty;-1{,}25\sqrt{5}\right]\cup\left[1{,}25\sqrt{5};+\infty\right)$.

25.7. Найдите все значения параметра a, при которых количество корней уравнения $(2{,}5-a)x^3-2x^2+x=0$ равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a$ и $y=3-|x-1|$.

Ответ: $\{2{,}5;8;10\}$.

25.8. При каких значениях a существует единственное решение системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x-3)^2+(y+4)^2=a \end{cases}?$$ (МГУ, 2008)

Ответ: 9; 49.

Координатная плоскость *aOx*

26. Уравнения

26.1. Найдите число различных решений уравнения $\left|x^2+2x-3\right|=a$ в зависимости от параметра a.

Ответ: нет решений, если $a<0$; два решения, если $a=0$ или $a>4$; три решения, если $a=4$; четыре решения, если $0<a<4$.

26.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a+4x-x^2-1\right)\left(a+1-|x-2|\right)=0$$

имеет ровно три различных корня.

Ответ: $a=-1$.

26.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-\left|x^2+2x-3\right|-a.$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Ответ: (–3,5;1).

26.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-3x+2-\left|x^2-5x+4\right|-a.$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Ответ: $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$.

26.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-6x+8\right|+\left|x^2-6x+5\right|=a$$

имеет ровно три корня.

Ответ: $a=5$.

26.6. Найдите все значения параметра c, при которых уравнение

$$\left|x^2-2x\right|+\left|x^2-3x+2\right|=x^2-4x+c$$

имеет ровно три различных решения. (МГУ, 1992)

Ответ: $4;\frac{19}{4}$.

26.7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|x^2-4x+3\right|=3a-2a^2$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $a=0{,}5$ или $a=1$.

26.8. При каких значениях a число корней уравнения $\left|x^2-8|x|+7\right|=a$ равно a?

Ответ: 7.

26.9. При каких значениях a уравнение $2\log_3^2 x-\left|\log_3 x\right|+a=0$ имеет четыре различных корня?

Ответ: $\left(0;\frac{1}{8}\right)$.

26.10. Найдите все значения p, при которых уравнение $7-2\cos x=p\left(1+tg^2x\right)$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: $(0;9]$.

26.11. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1} = x + a$ имеет единственное решение?
Ответ: $a = 1{,}25$ или $a < 1$.

27. Неравенства (метод областей)

27.1. Найдите все значения a, при которых неравенство
$\log_a\left(x^2 + 4\right) > 1$ выполняется для всех значений x. (МГУ, 2005)
Ответ: $(1; 4)$.
27.2. Найдите все значения a, при которых неравенство $(x - 3a)(x - a - 3) < 0$ выполняется при всех x, таких, что $1 \le x \le 3$.
Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.
27.3. При каких a из неравенства $0 < x < 1$ следует неравенство $x^2 - a^2 \le 0$?
Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.
27.4. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x - a \le 0 \\ x^2 - 4x + a \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?
Ответ: $a = -1$ или $a = 4$.
27.5. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(1; 2]$ выполняется неравенство $\dfrac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$.
Ответ: $(0{,}5; 1]$.
27.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $x^2 - 2x \le a - 1$ и $x^2 - 4x \le 1 - 4a$ образуют на числовой оси отрезок длины единица.
Ответ: $a = \dfrac{1}{4}$ или $a = 1$.
27.7. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество всех решений неравенства

$$(p - x^2)(p + x - 2) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \le 1$. (МГУ, 1987)
Ответ: $p \le 0$, $p \ge 3$.
27.8. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $y + 2x \ge a$ и $y - x \ge 2a$ являются решениями неравенства $2y - x > a + 3$.
Ответ: $a > \dfrac{9}{8}$.

Указания и решения

1. Линейные уравнения

1.1. При каких значениях параметра b уравнение

$$9x + b^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)b - 2\sqrt{3} = b^4 x - b^2\left(b + \sqrt{3}\right)$$

не имеет корней? (МГУ, 2002)
Решение. Данное уравнение является линейным относительно неизвестной x.

$$\left(b^4 - 9\right)\cdot x = b^3 + \left(1 + \sqrt{3}\right)b^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)b - 2\sqrt{3}.$$

Линейное уравнение не имеет корней тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} b^4 - 9 = 0 \\ b^3 + \left(1 + \sqrt{3}\right)b^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)b - 2\sqrt{3} \ne 0. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы имеет два корня: $b_1 = \sqrt{3}$, $b_2 = -\sqrt{3}$. Подстановка показывает, что второму условию удовлетворяет только $b_1 = \sqrt{3}$.
Ответ: $b = \sqrt{3}$.

2. Квадратные уравнения

2.1. (2010) Найдите все такие целые a и b, для которых один из корней уравнения

$$3x^2 + ax^2 + bx + 12 = 0$$

равен $1 + \sqrt{3}$.
Решение. Подставим в уравнение $x = 1 + \sqrt{3}$. Получим равенство $(24 + 4a + b) + (6 + 2a + b)\sqrt{3} = 0$, которое выполняется ($a$ и b – целые) при условии

$$\begin{cases} 24 + 4a + b = 0 \\ 6 + 2a + b = 0 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим $a = -9$, $b = 12$. При этих значениях квадратное уравнение $x^2 - 2x - 2 = 0$ имеет корни $x = 1 \pm \sqrt{3}$.
Ответ: $a = -9$, $b = 12$.
2.2. При каких значениях параметра a уравнение

$$(3a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$$

имеет два действительных различных корня? (МГУ, 1980)

Решение. 1) Если $3a-1=0$ т.е. $a=\frac{1}{3}$, то получаем уравнение $\frac{2}{3}x-1=0$, которое имеет один корень.

2) При $a\neq\frac{1}{3}$ получаем квадратное уравнение, которое имеет два действительных различных корня тогда и только тогда, когда его дискриминант положителен:

$\frac{D}{4}>0 \Leftrightarrow a^2-(3a-1)(3a-2)>0.$ Решая это неравенство при условии $a\neq\frac{1}{3}$, получаем ответ.

Ответ: $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{16};\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{9+\sqrt{17}}{16}\right).$

2.4. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2+x+\frac{2a-1}{a+5}=0$$

не имеет решений? (МГУ, 2004)

Решение. Квадратное уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен: $D<0 \Leftrightarrow \frac{a-\frac{9}{7}}{a+5}>0.$

Решая это неравенство методом интервалов, получаем ответ.

Замечание. При $a=-5$ дробь не определена, поэтому и уравнение не определено, и не имеет смысла говорить о решениях уравнения.

Ответ: $(-\infty;-5)\cup\left(\frac{9}{7};+\infty\right).$

2.5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2+(a+4)x+a+1=0$$

имеется ровно один отрицательный. (МГУ, 2007)

Решение. 1) Пусть $a=0$, тогда получаем линейное уравнение $4x+1=0$, которое имеет единственный отрицательный корень $x=-\frac{1}{4}.$

2) При $a\neq 0$ получаем квадратное уравнение, дискриминант которого равен

$D=(a+4)^2-4a(a+1)=-3a^2+4a+16.$

а) Уравнение имеет ровно один корень, т.е. $D=0.$ Отсюда $a=\frac{2\pm2\sqrt{13}}{3}.$ Так как корень $x=-\frac{a+4}{2a}<0,$ то остается $a=\frac{2+2\sqrt{13}}{3}.$

б) Уравнение имеет корни разных знаков. В этом случае свободный член приведенного уравнения отрицателен (дискриминант будет положительным): $\frac{a+1}{a}<0 \Leftrightarrow -1<a<0.$

в) Один из корней равен нулю, т.е. $a+1=0 \Leftrightarrow a=-1.$ Квадратное уравнение принимает вид $-x^2+3x=0,$ и имеет корни $x=0,\ x=3.$ Значение $a=-1$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $(-1;0]\cup\left\{\frac{2+2\sqrt{13}}{3}\right\}.$

2.6. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2-(|a+5|-|a-5|)x+(a-12)(a+12)=0$$

имеет два различных отрицательных корня.

Решение. Используя теорему Виета, запишем условия существования двух различных отрицательных корней для квадратного уравнения:

$$\begin{cases}x_1x_2>0\\ x_1+x_2<0\\ D>0.\end{cases}$$

Рассмотрим первые два неравенства

$$\begin{cases}(a-12)(a+12)>0\\ |a+5|-|a-5|<0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(a-12)(a+12)>0\\ (a+5)^2-(a-5)^2<0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-12)(a+12)>0\\ 2a\cdot10<0.\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\ a<-12.$

Теперь рассмотрим дискриминант с учетом $a<-12.$

$(|a+5|-|a-5|)^2-4(a-12)(a+12)>0,$

$10^2-4(a-12)(a+12)>0,\ a^2-144<25,$

$a^2<169,\ -13<a<13.$ Так как $a<-12,$ то получаем $-13<a<-12.$

Ответ: (–13; –12).

2.8. При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения

$$x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма? (МГУ, 1992)

Указание. Сумма квадратов корней данного уравнения в силу теоремы Виета равна $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=-8a-6,$ причем значение a должно удовлетворять условию существованию корней, т.е. $\frac{D}{4}=-a^2-4a-3\geq 0.$ Отсюда значения $a\in[-3;-1].$ Далее рассмотреть линейную (убывающую) функцию $f(a)=-8a-6$ на отрезке $[-3;-1].$

Ответ: $a=-3,\ S=18.$

2.9. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$ax^2+(4a-7)x+4a-5=0$$

имеет в точности один корень на отрезке $[-4;0].$ (МФТИ, 2003)

Решение. 1) Пусть $a=0,$ тогда получаем линейное уравнение $-7x-5=0,$ которое имеет единственный корень $x=-\frac{5}{7},$ причем $-\frac{5}{7}\in[-4;0].$

2) При $a\neq 0$ получаем квадратное уравнение, дискриминант которого равен $D=(4a-7)^2-4a(4a-5)=-36a+49.$

а) Уравнение имеет ровно один корень, т.е. $D=0.$ Отсюда $a=\frac{49}{36}.$ Так как корень $x=-\frac{4a-7}{2a}=\frac{28}{49}>0,$ то значение $a=\frac{49}{36}$ не удовлетворяет условию задачи.

б) Квадратное уравнение имеет один корень внутри интервала $(m;M)$, а другой расположен вне этого интервала тогда и только тогда, когда $f(m)\cdot f(M)<0$, где $f(x)=ax^2+(4a-7)x+4a-5.$ Имеем неравенство $f(-4)\cdot f(0)<0$,

$(4a+23)(4a-5)<0,\quad -\frac{23}{4}<a<\frac{5}{4}.$ При этом $a\neq 0$.

в) Пусть $f(-4)=0$, т.е. $4a+23=0\Leftrightarrow a=-\frac{23}{4}.$ Квадратное уравнение принимает вид $23x^2+120x+112=0,$ и имеет корни $x=-4,$ $x=-\frac{28}{23},$ которые принадлежат отрезку $[-4;0].$ Значение $a=-\frac{23}{4}$ не удовлетворяет условию задачи.

г) Пусть $f(0)=0$, т.е. $4a-5=0\Leftrightarrow a=\frac{5}{4}.$ Квадратное уравнение принимает вид $5x^2-8x=0,$ и имеет корни $x=0,\ x=\frac{8}{5}.$ Значение $a=\frac{5}{4}$ удовлетворяет условию задачи.

С учетом первого случая окончательно получаем ответ.

Ответ: $\left(-\frac{23}{4};\frac{5}{4}\right].$

2.10. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все корни уравнения

$$3ax^2+(3a^3-12a^2-1)x-a(a-4)=0$$

удовлетворяют неравенству $|x|\leq 1$.

Решение. 1) Пусть $3a=0,$ т.е. $a=0,$ тогда получаем линейное уравнение $-x=0,$ которое имеет единственный корень $x=0,$ причем $0\in[-1;1].$ Значение $a=0$ удовлетворяет условию задачи.

2) При $a\neq 0$ получаем квадратное уравнение, дискриминант которого равен

$D=(3a^3-12a^2-1)^2+12a^2(a-4)=$

$=(3t-1)^2+12t=(3t+1)^2,$ где $t=a^3-4a^2.$

Тогда найдем корни

$x=\frac{-(3t-1)-(3t+1)}{6a}=\frac{-t}{a}=4a-a^2,$

$x=\frac{-(3t-1)+(3t+1)}{6a}=\frac{1}{3a}.$ Теперь поставим условия для корней:

$\begin{cases}-1\leq 4a-a^2\leq 1\\ -1\leq \frac{1}{3a}\leq 1\end{cases}$ Решите систему самостоятельно.

Ответ: $\{0\}\cup\left[2+\sqrt{3};2+\sqrt{5}\right].$

2.11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых расстояние между корнями уравнения $ax^2+(2a+2)x+a+3=0$ больше 1. (МГУ, 2001)

Решение. 1) Пусть $a=0,$ тогда получаем линейное уравнение $2x+3=0,$ которое имеет единственный корень.

2) При $a\neq 0$ получаем квадратное уравнение, для которого $\frac{D}{4}=(a+1)^2-a(a+3)=1-a.$

При условии $1-a>0$, т.е. $a<1$ ($a\neq 0$) имеем два корня $x_1=\dfrac{-(a+1)-\sqrt{1-a}}{a}$ и $x_2=\dfrac{-(a+1)+\sqrt{1-a}}{a}$. Согласно условию задачи

$|x_1-x_2|>1$, $\left|\dfrac{2\sqrt{1-a}}{a}\right|>1$, $\dfrac{2\sqrt{1-a}}{|a|}>1$,

$2\sqrt{1-a}>|a|$, $4(1-a)>a^2$, $a^2+4a-4<0$,

$-2-2\sqrt{2}<x<-2+2\sqrt{2}$. С учетом условий $a<1$ ($a\neq 0$) получаем ответ.

Ответ: $\left(-2-2\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;-2+2\sqrt{2}\right)$.

2.12. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнения $(2a-1)x^2+6ax+1=0$ и $ax^2-x+1=0$ имеют общий корень. (МГУ, 2000)

Решение. Вычитая из первого уравнения второе, получаем $(a-1)x^2+(6a+1)x=0$. Отсюда $x=0$ или $(a-1)x+(6a+1)=0$. Оба уравнения не могут иметь корень $x=0$. Значение $a=1$ не удовлетворяет равенству $(a-1)x+(6a+1)=0$. При $a\neq 1$ находим корень $x=\dfrac{6a+1}{1-a}$. Это значение подставим во второе исходное уравнение:

$$a\cdot\left(\frac{6a+1}{1-a}\right)^2-\frac{6a+1}{1-a}+1=0,$$

$36a^3+19a^2-6a=0$. Отсюда имеем $a=0$, $a=\dfrac{2}{9}$, $a=-\dfrac{3}{4}$.

При каждом из этих значений оба исходных уравнения имеют общий корень (покажите).

Ответ: $-\dfrac{3}{4};0;\dfrac{2}{9}$.

2.13. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y-x^2=a \\ x-y^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Исключая параметр из системы, получаем уравнение $(y-x)(1+y+x)=0$. Отсюда $y=x$ или $y=-x-1$.

Пусть $y=x$, тогда из системы имеем квадратное уравнение $x^2-x+a=0$, дискриминант которого равен $D_1=1-4a$.

Если $y=-x-1$, то из системы имеем квадратное уравнение $x^2+x+1+a=0$, которое имеет дискриминант $D_2=-3-4a$.

Рассмотрим разные случаи для дискриминантов.

1) $\begin{cases} D_1>0 \\ D_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a>0 \\ -3-4a<0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4}<a<\dfrac{1}{4}$.

2) $\begin{cases} D_1<0 \\ D_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a<0 \\ -3-4a>0 \end{cases}$

Система неравенств не имеет решений.

3) $\begin{cases} D_1=0 \\ D_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a=0 \\ -3-4a>0 \end{cases}$

Система не имеет решений.

4) $\begin{cases} D_1>0 \\ D_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a>0 \\ -3-4a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{4}$.

Первое уравнение $x^2-x-\dfrac{3}{4}=0$ имеет корни $-\dfrac{3}{2}$ и $\dfrac{1}{2}$. Второе уравнение $x^2+x+\dfrac{1}{4}=0$ имеет один корень $x=\dfrac{1}{2}$.

5) $\begin{cases} D_1=0 \\ D_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a=0 \\ -3-4a=0 \end{cases}$

Система не имеет решений.

6) $\begin{cases} D_1>0 \\ D_2>0 \end{cases}$

В этом случае выше приведенные квадратные уравнения не имеют общих корней (докажите, приравнивая корни). Тогда исходная система имеет четыре различных решения.

7) Случай $x=-x-1$, т.е. $x=-\dfrac{1}{2}$, приводит к значениям $y=-\dfrac{1}{2}$ и $a=-\dfrac{3}{4}$. Тогда получаем одно уравнение $x^2-x-\dfrac{3}{4}=0$, которое имеет корни $-\dfrac{3}{2}$ и $\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{3}{4}\le a<\dfrac{1}{4}$.

2.14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} axy+x-y+\dfrac{3}{2}=0 \\ x+2y+xy+1=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 1988)

Решение. Второе уравнение исходной системы можно переписать в виде $y(x+2)+(x+1)=0$, откуда следует, что эта система ни при каком значении параметра a не имеет решений с условием $x=-2$. Поэтому исходная система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases}(ax-1)y+x+\dfrac{3}{2}=0\\ y=-\dfrac{x+1}{x+2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(2a-2)x^2+(2a-9)x-8=0\\ y=-\dfrac{x+1}{x+2}\end{cases}$$

Найдем все значения параметра a, при которых первое уравнение последней системы имеет решение $x=-2$. Для таких значений a должно выполняться равенство

$(2a-2)(-2)^2+(2a-9)(-2)-8=0$, откуда находим, что $a=-\dfrac{1}{2}$.

При $a=-\dfrac{1}{2}$ первое уравнение системы перепишется в виде $-3x^2-10x-8=0$. Это уравнение имеет два корня $x_1=-2$ и $x_2=-\dfrac{4}{3}$. Второму из них соответствует значение $y_2=\dfrac{1}{2}$. Для $x_1=-2$ соответствующего значения y не существует. Итак, при $a=-\dfrac{1}{2}$ исходная система имеет единственное решение $\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{2}\right)$, и это значение a отвечает условию задачи.

При $a=1$ первое уравнение системы перепишется в виде $-7x-8=0$. Оно имеет единственное решение $x=-\dfrac{8}{7}$, соответствующее значение y равно $\dfrac{1}{6}$. Итак, при $a=1$ исходная система уравнений имеет единственное решение $\left(-\dfrac{8}{7};\dfrac{1}{6}\right)$, и это значение a отвечает условию задачи.

При $a\neq 1$ первое уравнение системы есть квадратное уравнение с дискриминантом $D=(2a-9)^2+4\cdot 8\cdot(2a-2)=4a^2+28a+17$.

Если $D<0$, то первое уравнение системы, а значит, и исходная система, не имеют решений.

Если $D>0$ и $a\neq -\dfrac{1}{2}$, то первое уравнение системы имеет два решения, отличных от (-2). Следовательно, система имеет два решения. Эти значения a не удовлетворяют условию задачи. Равенство $D=4a^2+28a+17=0$ выполняется для $a=\dfrac{-7\pm 4\sqrt{2}}{2}$. Оба эти значения отличны от $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. Следовательно, при $a=\dfrac{-7\pm 4\sqrt{2}}{2}$ первое уравнение системы, а вместе с ним и система, имеют по одному решению.

Ответ: $-1;-\dfrac{1}{2};\dfrac{-7\pm 4\sqrt{2}}{2}$.

3. Уравнения высшей степени

3.1. Число $x=3$ - один из корней уравнения $ax^2+bx+2=0$, где $a<0$. Найдите действительные корни уравнения $ax^4+bx^2+2=0$. (МГУ, 1993)

Указание. Для корней биквадратного уравнения получаем, что либо $x^2=x_1=3$, либо $x^2=x_2=\dfrac{2}{3a}<0$.

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

3.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2+2(a-2)x+a^2-4a\right)^2+$$
$$+(a+5)\left(x^2+2(a-2)x+a^2-4a\right)-a^2+8a+2=0$$

имеет а) единственное решение; б) ровно два различных решения. (МГУ, 2002)

Решение. Обозначим $y=f(x)=x^2+2(a-2)x+a^2-4a$, тогда уравнение принимает вид $g(y)=y^2+(a+5)y-a^2+8a+2=0$. Квадратный трехчлен $f(x)=(x+a)(x+a-4)$ принимает в одной точке значение $f(2-a)=-4$, а остальные свои значения (большие -4) – по два раза. Поэтому уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда:

$$1)\ \begin{cases}g(-4)=0\\ y_в\le -4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16-4(a+5)-a^2+8a+2=0\\ -\dfrac{a+5}{2}\le -4\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\ a=2+\sqrt{2}$,

а ровно два корня – в следующих случаях:

2) $y_1 = y_2 > -4 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ y_в > -4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+5)^2 - 4(-a^2 + 8a + 2) = 0 \\ -\dfrac{a+5}{2} > -4 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1;$$

3) $y_1 < -4 < y_2 \Leftrightarrow g(-4) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 2+\sqrt{2} \\ a < 2-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Ответ: а) $2+\sqrt{2}$; б) $\left(-\infty; 2-\sqrt{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(2+\sqrt{2}; +\infty\right)$.

3.3. При каких значениях параметра a уравнение $\left(x^2 - x + a^2 + 2\right)^2 = 4a^2\left(2x^2 - x + 2\right)$ имеет ровно 3 различных решения? (МГУ, 1996)

Указание. Положив $u = x^2 - x + 2$, приводим уравнение к виду $\left(u - a^2\right)^2 = 4a^2x^2$, что равносильно совокупности двух уравнений $u - a^2 = 2ax$, $u - a^2 = -2ax$, или совокупности

$$\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + 2 - a^2 = 0 \\ x^2 + (2a-1)x + 2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

Совокупность двух квадратных уравнений может иметь три корня в трех случаях: когда одно из них имеет два корня, а другое – один, не совпадающий ни с одним из корней первого; или когда каждое из них имеет два корня, причем один из них является общим для обоих уравнений.

Ответ: $a = \pm\sqrt{2}; a = \pm\dfrac{1+\sqrt{15}}{4}$.

3.4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1 = 0$$

на промежутке $(-\infty; -1)$ имеет не менее двух корней. (МГУ, 2008)

Решение. Приведем уравнение к виду

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 + (a+1)\left(x - \frac{1}{x}\right) + (2a+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$y^2 + (a+1)y + 2a + 3 = 0$, где функция $y = f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty; -1)$ от $-\infty$ до $f(-1) = 0$.

Поэтому исходное уравнении имеет не менее двух корней на промежутке $(-\infty; -1)$ тогда и только тогда, когда полученное уравнение имеет два корня $y_{1,2} \in (-\infty; 0)$, т.е. когда

$$\begin{cases} a+1 > 0 \\ 2a+3 > 0 \\ (a+1)^2 - 4(2a+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1 \\ (a-a_1)(a-a_2) > 0 \\ a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{20} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a > 3 + \sqrt{20}$.

Ответ: $a > 3 + \sqrt{20}$.

3.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x+2) + y = 3a \\ a + 2x^3 = y^3 + (a+2)x^3 \end{cases}$$

имеет не более двух решений. (МГУ, 2001)

Указание. Преобразуем данную систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ ax^3 + y^3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x) \\ a(x^3-1) + a^3(1-x)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x) = 0 \\ a(x-1)\left(x^2 + x + 1 - a^2(x-1)^2\right) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы приводит к рассмотрению трех случаев.

а) $a = 0$. Тогда система имеет бесконечно много решений вида $(t; 0)$, где $t \in R$. Таким образом, значение $a = 0$ не является искомым.

б) $x = 1$. Система имеет решение $(1; 0)$ при любом a.

в) Третий вариант сводится к системе

$$\begin{cases} y = a(1-x) = 0 \\ x^2 + x + 1 - a^2(x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = a(1-x) = 0 \\ \left(a^2 - 1\right)x^2 - \left(2a^2 + 1\right)x + a^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $x = 1$ не удовлетворяет второму уравнению ни при каком значении параметра a. Поэтому искомыми являются те и только те значения a, при которых система в) имеет не более одного решения.

У этой системы уравнений при $a^2 = 1$ есть единственное решение $(0; a)$. Если же $a^2 \neq 1$ $(a \neq 0)$, то квадратное (а с ним и система) имеет не более одного решения при условии, что дискриминант

$D = \left(2a^2 + 1\right)^2 - 4\left(a^2 - 1\right)^2 = 3\left(4a^2 - 1\right) \leq 0$, что равносильно $0 < |a| \leq \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\{-1\} \cup \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup \{1\}$.

3.7. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения

$$x^4 + (a-3)x^2 + (a+10)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии? (МГУ, 1993)

Указание. Корни уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда уравнение $t^2 + pt + q = 0$ имеет два различных положительных корня $t_1 < t_2$, причем числа $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$ образуют арифметическую прогрессию, т.е. при выполнении условий $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1}$, $t_1 + t_2 = p,\ \ t_1t_2 = q,$ иначе говоря, при $t_2 = 9t_1$, $t_1 = -\frac{p}{10},\ \ t_2 = -\frac{9p}{10}.$ Наконец, $\frac{9p^2}{100} = q.$ В нашем случае $p = a - 3,\ \ q = (a+10)^2$, так что a удовлетворяет уравнению $(a < 3)$:

$\frac{3(3-a)}{10} = |a+10|,$ имеющему корни

$a_1 = -7; a_2 = -\frac{109}{7}.$

Ответ: $-7; -\frac{109}{7}.$

3.8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$25x^5 + 25(a-1)x^3 - 4(a-7)x = 0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию. (МГУ, 2003)

Указание. Один из корней данного уравнения $x = 0.$ Остальные корни находятся из биквадратного уравнения

$25x^4 + 25(a-1)x^2 - 4(a-7) = 0.$ Это равнение имеет 4 различных решения тогда и только тогда, когда полученное из него заменой $t = x^2$ квадратное уравнение

$25t^2 + 25(a-1)t - 4(a-7) = 0$ имеет два различных положительных корня. Пусть $0 < t_1 < t_2$ - эти корни. Из условия следует равенство $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1}$, т.е. $t_2 = 4t_1.$ По теореме Виета $t_1 + t_2 = a - 1,\ \ t_1t_2 = \frac{4}{25}(7-a).$

Осталось решить полученную систему.

Ответ: $-2.$

3.9. Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни. (МГУ, 2003)

Указание. Если x_1, x_2, x_3 – корни уравнения третьей степени, то по теореме Виета $x_1x_2x_3 = 64,$ а так как $x_2^2 = x_1x_2$, то $x_2^3 = 64.$

Ответ: $a = 7; x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 8.$

3.10. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0 \\ y = \sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения? (МГУ, 1998)

Указание. Пусть $z = x^2$. Рассмотрим уравнение $z^2 - (a-1)(a+3)z + (a-1)(a+1)(a-2)(a+4) = 0.$ Система имеет три решения, если это уравнение имеет корни $z_1 = 0,\ z_2 > 0.$ Но тогда $(a-1)(a+1)(a-2)(a+4) = 0$; $\ \ (a-1)(a+3) > 0.$

Ответ: $a = 2.$

4. Уравнения с модулем

4.1. При каких значениях a уравнение

$$2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$$

имеет четыре различных решения? (МГУ, 1994)

Указание. Уравнение имеет четыре различных корня относительно x, если это же уравнение как квадратное относительно $y = |x+1|$ имеет два различных положительных корня, т.е. когда $D = 1 - 8a > 0$ и $2a > 0.$

Ответ: $0 < a < \frac{1}{8}.$

4.2. При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x - 9a| - 2a^2 + 35 + x = 0$$

не имеет решений? При каких значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30; 63]$? (МГУ, 2003)

Указание. Функция

$f(x) = 2|x - 9a| - 2a^2 + 35 + x =$

$$= \begin{cases} -x + 18a - 2a^2 + 35, \textit{ если } x \le 9a \\ 3x - 18a - 2a^2 + 35, \textit{ если } x > 9a \end{cases}$$

линейно убывает на промежутке $(-\infty; 9a]$, линейно возрастает на промежутке $[9a; +\infty)$ и имеет в точке $9a$ минимальное значение $f(9a) = 9a - 2a^2 + 35.$ Уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений тогда и только тогда, когда

$f(9a) > 0 \ \Leftrightarrow\ 2a^2 - 9a - 35 < 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{5}{2} < a < 7.$

Уравнение $f(x)=0$ имеет решения, причем все они принадлежат отрезку $[-30;63]$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -30 \le 9a \le 63 \\ f(9a) \le 0 \\ f(-30) \ge 0 \\ f(63) \ge 0 \end{cases}$$

Решите самостоятельно эту систему.

Ответ: $\left(-\dfrac{5}{2};7\right)$; $\left[\dfrac{9-\sqrt{211}}{2};-\dfrac{5}{2}\right]\cup\{7\}$.

4.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4x-\left|3x-|x+a|\right|=9|x-1|$ имеет хотя бы один корень. (МГУ, 2005)

Решение. Запишем уравнение в виде

$$9|x-1|+\left|3x-|x+a|\right|-4x=0.$$

Непрерывная функция

$$f(x)=9|x-1|+\left|3x-|x+a|\right|-4x:$$

1) неограниченно возрастает при $x\ge 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x)=9x-9-4x\pm 3x\pm x\pm a=kx+m,$$

где $k\ge 9-4-4=1>0$;

2) убывает при $x\le 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x)=-9x+9-4x\pm 3x\pm x\pm a=kx+m,$$

где $k\ge -9-4+4=-9<0$.

Следовательно, $x=1$ - точка минимума функции f, а область ее значений есть множество $[f(1);+\infty)$. Поэтому уравнение будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(1)\le 0$.

Решим это неравенство:

$$\left|3-|1+a|\right|\le 4;$$

$$-4\le |a+1|-3\le 4;$$

$$|a+1|\le 7;$$

$$-7\le a+1\le 7;$$

$$-8\le a\le 6.$$

Ответ: $-8\le a\le 6$.

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован (например, не указано явно, что функция принимает все значения из множества $[f(1);+\infty)$) или решение содержит ошибки.	3
Верно рассмотрены отдельные случаи расположения, в результате чего получена часть верного ответа (возможно, другие случаи не рассмотрены или в них допущены ошибки).	2
Верно рассмотрены отдельные случаи, но не найдена никакая часть верного ответа.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

4.7. Найдите все значения параметра c, при которых уравнение

$$|x^2-2x|+|x^2-3x+2|=x^2-4x+c$$

имеет ровно три различных решения. (МГУ, 1992)

Указание. При $x<0$ и $x\ge 2$ получаем уравнение $x^2-x+2-c=0$, имеющее один корень, принадлежащий указанному множеству при $0<c<4$, и два корня при $c\ge 4$.

При $0\le x<1$ приходим к уравнению $x^2-3x-2+c=0$, имеющему в указанном промежутке один корень при $-2<c\le 2$ не имеющему корней, принадлежащих множеству $0\le x<1$, при остальных c.

При $1\le x<2$ получаем уравнение $3x^2-9x+2+c=0$. Его корни в нужном промежутке: при $c=\dfrac{19}{4}$ - один корень и при $4<c<\dfrac{19}{4}$ - два корня, при остальных c все корн вне множества $1\le x<2$. Осталось подвести итог.

Ответ: $4;\dfrac{19}{4}$.

4.8. Найдите все значения параметра k, при которых уравнение

$$2x-|x-k^2|=11k-3|x+4k|$$

а) не имеет решений; б) имеет конечное непустое множество решений. (МГУ, 1992)

Решение. Уравнение равносильно совокупности четырех систем

$$\begin{cases} x-k^2\ge 0, \\ x+4k\ge 0, \\ x=-\dfrac{k(k-1)}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-k^2\ge 0, \\ x+4k<0, \\ x=\dfrac{k(k-23)}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-k^2<0, \\ x+4k\ge 0, \\ x=\dfrac{k(k-1)}{6}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-k^2<0, \\ x+4k<0, \\ k(k+23)=0. \end{cases}$$

Первая из них имеет решение

$$\begin{cases} k=0, \\ x=0; \end{cases}$$

вторая решений не имеет, третья равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} k>0, \\ x=\dfrac{k(k-1)}{6}, \end{cases} \qquad \begin{cases} k\le -23, \\ x=\dfrac{k(k-1)}{6}; \end{cases}$$

четвертая равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} k=0, \\ x<0, \end{cases} \qquad \begin{cases} k=-23, \\ x<92. \end{cases}$$

В итоге $x=\dfrac{k(k-1)}{6}$ при $k<-23$, $x\le 92$ при $k=-23$, нет решений при $-23<k<0$, $x\le 0$ при $k=0$, $x=\dfrac{k(k-1)}{6}$ при $k>0$.

Ответ: а) $(-23;0)$; б) $(-\infty;-23)\cup(0;+\infty)$

4.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$2|x-a|+a-4+x=0$$

принадлежат отрезку $[0;4]$. (МГУ, 1984)

Решение. На множестве $x<a$ исходное уравнение можно переписать в виде $2(a-x)+a-4+x=0$, откуда $x=3a-4$. Число $3a-4$ лежит в области $x<a$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $3a-4<a$, т.е. если $a<2$.

На множестве $x\ge a$ исходное уравнение можно переписать в виде $2(x-a)+a-4+x=0$, откуда $x=\dfrac{a+4}{3}$. Число $\dfrac{a+4}{3}$ лежит в области $x\ge a$ в случае, если $\dfrac{a+4}{3}\ge a$, т.е. если $a\le 2$.

Итак, при $a<2$ исходное уравнение имеет два решения $x_1=3a-4$ и $x_2=\dfrac{a+4}{3}$, при $a=2$ единственное решение $x=2$ и при $a>2$ решений не имеет.

Найдем теперь все значения $a<2$, такие, что $3a-4$ и $\dfrac{a+4}{3}$ удовлетворяют условиям $0\le 3a-4\le 4$ и $0\le\dfrac{a+4}{3}\le 4.$ Решая эти неравенства получаем, что при $\dfrac{4}{3}\le a<2$ оба корня принадлежат отрезку $[0;4]$. При $a=2$ корень $x=2$ также принадлежит отрезку $[0;4]$.

Ответ: $\dfrac{4}{3}\le a\le 2$.

4.10. При каких значениях b уравнение $x^2-(4b-2)\cdot|x|+3b^2-2b=0$ имеет два различных решения?

Решение. Пусть $|x|=t,$ где $t\ge 0.$ Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях b квадратное уравнение $t^2-(4b-2)t+3b^2-2b=0$ имеет один положительный корень?

По теореме, обратной теореме Виета найдем корни квадратного уравнения $t_1=b,\ t_2=3b-2.$

Возможны три случая.

1) $\begin{cases} t_1>0 \\ t_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b>0 \\ 3b-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<b<\dfrac{2}{3}.$

2) $\begin{cases} t_1<0 \\ t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<0 \\ 3b-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ Нет решений.

3) $\begin{cases} t_1=t_2 \\ t_1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3b-2 \\ b>0 \end{cases} \Leftrightarrow b=1.$

Ответ: $0<b<\dfrac{2}{3};\ b=1$.

4.11. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$$

имеет единственный корень.

Решение. 1) Пусть $1-ax\ge 0,$ тогда уравнение перепишем в виде $x(1-a+ax)=0.$

Если $a=0,$ то уравнение имеет один корень $x=0,$ причем выполняется условие $1-ax\ge 0.$

Если $a\ne 0,$ то уравнение имеет два корня $x=0$ или $x=\dfrac{a-1}{a}$. Подставим значение второго корня в неравенство $1-ax\ge 0,$ получим $a\le 2.$

Корни совпадают при $a=1.$

Таким образом, в первом случае исходное уравнение имеет единственный корень при

$a=0$ или $a=1$; два корня – при $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;2]$; не имеет решений при $a>2$.

2) Пусть $1-ax<0$, тогда уравнение примет вид $ax^2+(1-3a)x+2=0$. Чтобы исходное уравнение имело единственный корень (в совокупности из двух случаев), во втором случае достаточно проверить значения $a=0$, $a=1$ и $a>2$.

Значение $a=0$ не удовлетворяет условию $1-ax<0$, значит, удовлетворяет условию задачи. При $a=1$ получаем квадратное уравнение $x^2-2x+2=0$, которое не имеет корней. Значит, $a=1$ также удовлетворяет условию задачи.

Квадратное уравнение $ax^2+(1-3a)x+2=0$ имеет дискриминант $D=9a^2-14a+1$. Функция $f(a)=9a^2-14a+1$ при $a>2$ возрастает и принимает положительные значения. Значит, исходное уравнение при $a>2$ имеет два корня.

Ответ: 0; 1.

4.12. Сколько решений в зависимости от параметра *a* имеет уравнение $|x+2|=ax+1$?

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x+2\ge 0$, т.е. $x\ge -2$. Тогда данное уравнение принимает вид: $x+2=ax+1$, $x(1-a)=-1$. Последнее уравнение при $a=1$ решений не имеет, а при $a\ne 1$ имеет единственный корень $x=\dfrac{1}{a-1}$. Найдем те значения параметра a, при которых для корня выполняется условие $x\ge -2$:

$$\frac{1}{a-1}\ge -2 \Leftrightarrow \frac{2a-1}{a-1}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\le 0{,}5 \\ a>1. \end{array}\right.$$

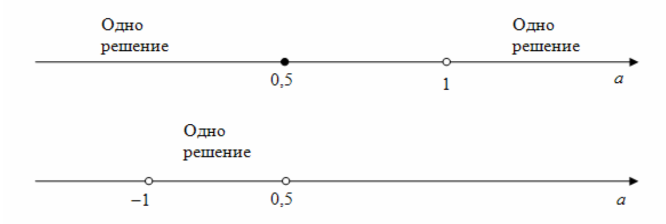
Следовательно, в первом случае исходное уравнение имеет одно решение при всех значениях $a\in(-\infty;0{,}5]\cup(1;+\infty)$ и не имеет решений при $a\in(0{,}5;1]$.

2) Если $x<-2$, то будем иметь уравнение $-x-2=ax+1$ или $x(1+a)=-3$. При $a=-1$ последнее уравнение не имеет корней, а при $a\ne -1$ - единственное решение $x=-\dfrac{3}{1+a}$, которое должно удовлетворять условию $x<-2$:

$$-\frac{3}{1+a}<-2 \Leftrightarrow \frac{2a-1}{a+1}<0 \Leftrightarrow -1<a<0{,}5.$$

Таким образом, во втором случае заданное уравнение при всех значениях $a\in(-1;0{,}5)$ имеет одно решение, а при $a\in(-\infty;-1]\cup[0{,}5;+\infty)$ решений не имеет.

Сравнивая результаты, найденные в двух случаях, получаем ответ.



Ответ: если $a\in(0{,}5;1]$, то нет решений; если $a\in(-\infty;-1]\cup\{0.5\}\cup(1;+\infty)$ - одно решение; при $a\in(-1;0.5)$ - два решения.

4.13. При каких значениях параметра a уравнение $x+2=a|x-1|$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Решение. При $x\ge 1$ исходное уравнение принимает вид $x+2=ax-a$, или $(a-1)x=a+2$. Это уравнение не имеет корней при $a=1$, а при $a\ne 1$ получаем $x=\dfrac{a+2}{a-1}$.

Выясним, при каких значениях a выполняется неравенство

$$\frac{a+2}{a-1}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{3}{a-1}\ge 0 \Leftrightarrow a>1.$$

Итак, на множестве $[1;+\infty)$ значений переменного x исходное уравнение при $a\le 1$ не имеет решений; при $a>1$ имеет единственное решение $x=\dfrac{a+2}{a-1}$.

Если $x<1$, то заданное уравнение принимает вид $x+2=a-ax$, или $(a+1)x=a-2$. Это уравнение не имеет решений при $a=-1$, а при $a\ne -1$ получаем $x=\dfrac{a-2}{a+1}$. Проверяем условие $x<1$: $\dfrac{a-2}{a+1}<1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{a+1}>0 \Leftrightarrow a>-1$. Таким образом, на множестве $(-\infty;1)$ значений переменного x исходное уравнение при $a\le -1$ не имеет решений; при $a>-1$ имеет единственное решение $x=\dfrac{a-2}{a+1}$.

Рассматривая в целом результаты двух случаев, получаем, что исходное уравнение при $a\le -1$ не имеет решений; при $-1<a\le 1$ имеет

единственное решение $x=\dfrac{a-2}{a+1}$; при $a>1$ имеет два решения $x=\dfrac{a+2}{a-1}$ и $x=\dfrac{a-2}{a+1}$.

Ответ: при $-1<a\le 1$ уравнение имеет единственное решение, $x=\dfrac{a-2}{a+1}$.

5. Дробно-рациональные уравнения

5.1. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2-(3a+1)x+2a^2+3a-2}{x^2-6x+5}=0$ имеет единственное решение?

Решение. При условии $x\ne 1$ и $x\ne 5$ имеем $x_1=a+2$ и $x_2=2a-1$ (обратная теорема Виета). Для выполнения условия задачи необходимо рассмотреть пять случаев.

1) $\begin{cases} a+2\ne 1 \\ a+2\ne 5 \\ 2a-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a=1$

2) $\begin{cases} a+2\ne 1 \\ a+2\ne 5 \\ 2a-1=5 \end{cases}$ Нет решений.

3) $\begin{cases} 2a-1\ne 1 \\ 2a-1\ne 5 \\ a+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a=-1$

4) $\begin{cases} 2a-1\ne 1 \\ 2a-1\ne 5 \\ a+2=5 \end{cases}$ Нет решений.

5) $\begin{cases} a+2\ne 1 \\ a+2\ne 5 \\ 2a-1=a+2 \end{cases}$ Нет решений.

Ответ: $a=1$ или $a=-1$.

6. Иррациональные уравнения

6.1. При каких значениях b уравнение $\sqrt{x+b}=x+3$ имеет единственное решение?

Решение. Имеем

$$\sqrt{x+b}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+b=x^2+6x+9, \\ x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+5x+9-b=0, \\ x\ge -3. \end{cases}$$

Квадратное уравнение $x^2+5x+9-b=0$ имеет дискриминант $D=4b-11$.

1) $D=0$ при $b=2{,}75$. В этом случае квадратное уравнение $x^2+5x+6{,}25=0$ имеет один корень $x=-2{,}5$, который удовлетворяет условию $x\ge -3$.

2) Пусть $D>0$, т.е. $b>2{,}75$. Тогда квадратное уравнение имеет два действительных различных корня.

Чтобы заданное уравнение имело один корень, необходимо рассмотреть два случая.

а) Один из корней $x_1<-3$, а другой $x_2=-3$. Подставим значение $x=-3$ в квадратное уравнение, получим $b=3$. Соответствующее уравнение $x^2+5x+6=0$ имеет корни $x_1=-2$, $x_2=-3$. Для первого корня не выполняется условие $x_1<-3$.

б) В случае, когда $x_1<-3<x_2$, значение квадратного трехчлена $f(x)=x^2+5x+9-b$ при $x=-3$ отрицательно, так как $f(x)<0$ на промежутке $(x_1;x_2)$. Получаем $f(-3)=3-b<0$, $b>3$.

Ответ: $b=2{,}75$; $b>3$.

6.2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет единственное решение?

Решение. Пусть $\sqrt{x+1}=t$, где $t\ge 0$. Отсюда $x=t^2-1$. Уравнение $\sqrt{x+1}=t_0$ имеет один корень, если $t_0\ge 0$. Получаем квадратное уравнение $t^2-t+a-1=0$, дискриминант которого равен $D=5-4a$.

Если $D=0$, т.е. $a=1{,}25$, то квадратное уравнение $t^2-t+0{,}25=0$ или $(t-0{,}5)^2=0$ имеет единственный корень $t=0{,}5>0$. Следовательно, исходное уравнение имеет один корень при $a=1{,}25$.

2) Если $D>0$, т.е. $a<1{,}25$, то квадратное уравнение имеет два корня.

а) Корни будут разных знаков при условии $t_1\cdot t_2=a-1<0$, т.е. из них только один положительный корень. Решая систему неравенств $\begin{cases} a<1{,}25 \\ a-1<0, \end{cases}$ получим условие $a<1$, при котором исходное уравнение имеет один корень.

б) Хотя бы один из корней равен нулю, в этом случае $a-1=0$, $a=1$. Квадратное уравнение имеет два неотрицательных корня $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$. Значит, исходное уравнение также имеет два корня.

Ответ: $a = 1{,}25;\ a < 1$.

6.3. При каких a уравнение $2x + 3\sqrt{x} + 2a^2 - 11a = 0$ имеет единственное решение?

Решение. Пусть $\sqrt{x} = t,$ где $t \ge 0.$ Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение $2t^2 + 3t + 2a^2 - 11a = 0$ имеет один неотрицательный корень?

Возможны три случая.

1) Если квадратное уравнение имеет один корень, то он будет равен $t = -\dfrac{3}{4}.$ Этот корень не удовлетворяет условию задачи.

2) Корни разных знаков. Необходимое и достаточное условие: $t_1 t_2 < 0 \ \Leftrightarrow\ 2a^2 - 11a < 0$ $\Leftrightarrow\ 0 < a < 5{,}5.$

3) Один из корней равен нулю, другой – отрицательный. В этом случае необходимо выполнение условия $2a^2 - 11a = 0.$ Отсюда $a = 0$ или $a = 5{,}5.$ Для этих значений один корень равен нулю, другой равен $(-1{,}5).$

Замечание. В данной задаче не потребовалось рассматривать дискриминант.

Ответ: $[0; 5{,}5]$.

6.4. Для каждого значения a из промежутка $(-3; 0)$ найдите число различных решений уравнения

$$\left(2x^2 - 5ax + 2a^2\right)\sqrt{x - \frac{2}{a}} = 0.$$ (МГУ, 2007)

Указание. Отметим, что $x = \dfrac{2}{a}$ - корень данного уравнения при всех $a \in (-3; 0).$ Корни квадратного трехчлена $x_1 = 2a,\ x_2 = \dfrac{a}{2}$ должны удовлетворять условию $x \ge \dfrac{a}{2}.$ Учитывая еще возможные совпадения $x_1 = x_2,$ получаем ответ.

Ответ: если $-3 < a \le -2,$ то одно решение; если $-2 < a \le -1,$ то два решения; если $-1 < a < 0,$ то три решения.

6.5. (2010) При всех a решите уравнение

$$x - \sqrt{a - x^2} = 1.$$

Решение. Уравнение $x - 1 = \sqrt{a - x^2}$ равносильно системе

$$\begin{cases}(x-1)^2 = a - x^2\\ x \ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2 - 2x + 1 - a = 0\\ x \ge 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{D}{4} = 2a - 1 \ge 0\\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{2a-1}}{2}\\ x \ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a \ge 0{,}5\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{1 + \sqrt{2a-1}}{2} \ge 1\\ \dfrac{1 - \sqrt{2a-1}}{2} \ge 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}a \ge 0{,}5\\ \dfrac{1 + \sqrt{2a-1}}{2} \ge 1\end{cases} \Leftrightarrow\ a \ge 1 \text{ (один корень)}$$

Отсюда следует, что при $a < 1$ исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: если $a < 1$, то решений нет; если $a \ge 1$, то $x = \dfrac{\sqrt{2a-1} + 1}{2}$.

7. Показательные уравнения

7.1. При каких значениях параметра a уравнение $4^x - (5a - 3)2^x + 4a^2 - 3a = 0$ имеет единственное решение?

Решение. Пусть $2^x = t,$ где $t > 0.$ Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение $t^2 - (5a-3)t + 4a^2 - 3a = 0$ имеет один положительный корень? По теореме, обратной теореме Виета найдем корни квадратного уравнения $t_1 = a,\ t_2 = 4a - 3.$

Возможны следующие случаи.

1) $\begin{cases}t_1 > 0\\ t_2 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a > 0\\ 4a - 3 < 0\end{cases} \Leftrightarrow\ 0 < a < \dfrac{3}{4}.$

2) $\begin{cases}t_1 < 0\\ t_2 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a < 0\\ 4a - 3 > 0\end{cases} \Leftrightarrow$ Нет решений.

3) $\begin{cases}t_1 = t_2\\ t_1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 4a - 3\\ a > 0\end{cases} \Leftrightarrow\ a = 1.$

4) Один из корней равен нулю, другой – положительный. В этом случае

$$\begin{cases}t_1 t_2 = 0\\ t_1 + t_2 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a^2 - 3a = 0\\ 5a - 3 > 0\end{cases} \Leftrightarrow\ a = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $0 < a \le \dfrac{3}{4};\ a = 1.$

7.2. При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)\cdot 4^x+(2a-3)\cdot 6^x=(3a-4)\cdot 9^x$ имеет единственное решение? (МГУ, 2005)

Указание. Перейдем к уравнению $(3a-4)\cdot t^2-(2a-3)\cdot t-(a-1)=0$, где $2^x=t>0$. Зависимость t от x строго монотонна, поэтому каждому $t>0$ соответствует ровно одно значение x. Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение имеет один положительный корень?

Ответ: $(-\infty;1]\cup\left\{\frac{5}{4}\right\}\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$.

7.3. Найдите все значениях параметра b, при которых уравнение $9^x+(b^2+6)\cdot 3^x-b^2+16=0$ не имеет решения. (МГУ, 1993)

Указание. Задача сводится к определению всех b, при которых квадратное уравнение $t^2+(b^2+6)\cdot t-b^2+16=0$ не имеет положительных корней.

Ответ: $[-4;4]$.

7.4. При каких значениях параметра a уравнение

$$16^x-3\cdot 2^{3x+1}+2\cdot 4^{x+1}-(4-4a)\cdot 2^{x-1}-a^2+2a-1=0$$

имеет три различных корня? (МГУ, 2007)

Указание. Пусть $2^x=t\ (t>0)$, тогда данное уравнение приводится к виду

$$t^4-6t^3+8t^2+2(a-1)t-(a-1)^2=0 \iff$$
$$\iff (t^2-3t)^2-(t-(a-1))^2=0 \iff$$
$$\iff (t^2-2t-a+1)(t^2-4t+a-1)=0.$$

Задача сводится к нахождению трех положительных различных корней из двух квадратных уравнений. Самостоятельно рассмотрите возможные случаи.

Ответ: $(0;1)\cup(1;4)\cup(4;5)$.

7.5. При каждом значении параметра a решите уравнение

$4^x-2a(a+1)\cdot 2^{x-1}+a^3=0$. (МГУ, 1985)

Решение. Обозначив 2^x через y, перепишем исходное уравнение в виде $y^2-a(a+1)\cdot y+a^3=0$. Это уравнение имеет два корня $y_1=a^2$ и $y_2=a$. Равенство корней достигается при $a=0$ или $a=1$.

При $a=0$ получаем $y_1=y_2=0$, и уравнение $2^x=0$, которое не имеет решений.

При $a=1$ получаем $y_1=y_2=1$, и уравнение $2^x=1$, которое имеет единственное решение $x=0$.

Если $a\neq 0,\ a\neq 1$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $2^x=a^2$ и $2^x=a$. При $a<0$ второе уравнение решений не имеет, а первое уравнение имеет решение $2\log_2|a|$. При $a>0,\ a\neq 1$ первое уравнение имеет решение $x_1=2\log_2 a$, второе уравнение - $x_2=\log_2 a$.

Ответ: при $a=0$ решений нет; при $a<0$ единственное решение $2\log_2|a|$; при $a=1$ единственное решение 0; при $a>0,\ a\neq 1$ два решения $\log_2 a,\ 2\log_2 a$.

8. Логарифмические уравнения

8.1. При каких значениях a уравнение $2\log_3^2 x-|\log_3 x|+a=0$ имеет четыре различных корня?

Решение. Пусть $|\log_3 x|=t$, где $t\geq 0$. Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение $2t^2-t+a=0$ имеет два различных положительных корня?

Возможен один случай.

$$\begin{cases} D>0 \\ t_1t_2>0 \\ t_1+t_2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-8a>0 \\ \frac{a}{2}>0 \\ \frac{1}{2}>0 \end{cases} \iff 0<a<\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{8}\right)$.

8.2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_5(25^x-\log_5 a)=x$ имеет единственное решение. (МФТИ, 2004)

Решение. Обозначим $\log_5 a=q,\ 5^x=t>0$. Тогда получаем $t^2-t-q=0$. Исходное уравнение имеет единственное решение в двух случаях.

1) Если $D=1+4q=0$, т.е. $q=-\frac{1}{4},\ a=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$, $t=\frac{1}{2}$.

2) Если $D=1+4q>0$ и квадратное уравнение имеет один положительный корень. При $q>-\frac{1}{4}$ это уравнение имеет два различных корня, причем при $-\frac{1}{4}<q<0$ оба корня

положительны, так как их сумма равна 1, а произведение равно $-q>0$. Если же $q\geq 0$, то только один корень положителен.
Следовательно, $\log_5 a\geq 0$, т.е. $a\geq 1$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}; [1;+\infty)$..

8.3. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases}\log_3(2-x-y)+2=\log_3(17-8x-10y)\\(x-a)^2+x=y+a+6\end{cases}$$

имеет ровно два решения. (МФТИ, 2002)

Указание. Из первого уравнения получаем, что $y=x-1$, причем $x<\frac{3}{2}$. После подстановки во второе уравнение получаем, что $x^2-2ax+a^2-a-5=0$. Последнее уравнение должно иметь 2 корня, меньших $\frac{3}{2}$.

Ответ: $-5<a<2-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

9. Тригонометрические уравнения

9.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a^2-6a+9\right)\left(2+2\sin x-\cos^2 x\right)+$$
$$+\left(12a-18-2a^2\right)\cdot(1+\sin x)+a+3=0$$

не имеет решений. (МГУ, 1989)

Решение. Введя обозначение $\sin x=t$, исходное уравнение перепишем в виде

$(a-3)^2t^2=a^2-7a+6$. (*)

Теперь задача может быть переформулирована так: найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение (*) не имеет корней, принадлежащих промежутку $-1\leq t\leq 1$.

При $a=3$ уравнение (*) принимает вид $0=-6$, и, следовательно, при $a=3$ исходное уравнение не имеет решений.

При $a\neq 3$ уравнение (*) может быть переписано в виде

$$t^2=\frac{a^2-7a+6}{(a-3)^2},$$

откуда искомые значения параметра a есть решения совокупности неравенств

$\frac{a^2-7a+6}{(a-3)^2}>1$ и $\frac{a^2-7a+6}{(a-3)^2}<0$. (**)

Первое из этих неравенств равносильно неравенству $\frac{a+3}{(a-3)^2}<0$. Множество его решений есть $a<-3$. Так как $a^2-7a+6=(a-1)(a-6)$ и на множестве $a\neq 3$ имеем $(a-3)^2>0$, то множество решений второго неравенства совокупности (**) при условии $a\neq 3$ есть $1<a<3$ и $3<a<6$.

Объединяя найденные значения a, получаем ответ.

Ответ: $a<-3;\ 1<a<6$.

9.2. Для каждого значения a найдите все решения уравнения

$\cos 2x+2\sin^2(x+a)+2-\sin a=0$,

принадлежащие промежутку $\pi\leq x\leq 2\pi$..

(МГУ, 2001)

Указание. Приведите уравнение к виду $\cos 2x-\cos 2(x+a)=\sin a-3$. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 2x=-1\\\cos 2(x+a)=1\\\sin a=1\end{cases}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$ при $a=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; при других a решений нет.

9.3. При каких значениях a уравнение $\cos 2x+2\cos x-2a^2-2a+1=0$ имеет ровно одно решение на промежутке $0\leq x<2\pi$..

(МГУ, 1999)

Указание. Уравнение равносильно совокупности $\cos x=a$, $\cos x=-a-1$.

Ответ: $a=-2;\ a=1$.

9.4. При каких значениях параметра a уравнение $(\sin x-\log_4 a)(\sin x-2+2a)=0$ имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$?

(МГУ, 2003)

Указание. Поскольку функция $y=\sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ каждое значение $y\neq -1$ принимает в двух точках, а $y=-1$ лишь при $x=\frac{3\pi}{2}$, то исходное уравнение имеет 2 корня в следующих случаях:

$-1<\log_4 a=2-2a\leq 1$, т.е. при $a=1$;

$-1<\log_4 a\leq 1$, $|2-2a|>1$;

$-1<2-2a\leq 1$, $|\log_4 a|>1$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup\{1\}\cup\left(\frac{3}{2};4\right]$

9.5. Найдите все значения параметра q, при которых уравнение $\sin^2 x + (q-2)^2 \sin x + q(q-2)(q-3) = 0$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три корня. (МГУ, 1991)

Указание. Выполнив замену $y = \sin x$, приведем данное уравнение к квадратному. Пусть его корни y_1 и y_2. Исходное уравнение может иметь 3 корня на отрезке $[0; 2\pi]$ лишь в следующих случаях:

1) когда оно сводится к уравнению $\sin x = 0$,

2) когда $\sin x = 1$ и есть еще два корня уравнения $\sin x = y_2$,

3) когда $\sin x = -1$ и есть еще два корня уравнения $\sin x = y_2$.

Ответ: $0; 2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

9.6. Для каждого значения a найдите число решений уравнения $atgx + \cos 2x = 1$, принадлежащих промежутку $[0; 2\pi]$. (МГУ, 1996)

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x(\sin 2x - a) = 0 \\ \cos x \neq 0,\ 0 \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

Ответ: 3 решения при $a < -1,\ a = 0,\ a > 1$; 5 решений при $a = \pm 1$; 7 решений при $-1 < a < 1,\ a \neq 0$.

10. Уравнения смешанного типа

10.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x^3-1)(x^2-16)}{\lg(15a-x) - \lg(x-a)} = 0$$

имеет единственное решение. (МГУ, 2002)

Решение. Имеем

$$\frac{(x^3-1)(x^2-16)}{\lg(15a-x) - \lg(x-a)} = 0 \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^3 = 1 \\ x^2 = 16 \end{array} \right. \\ 15a - x > 0 \\ x - a > 0 \\ 15a - x \neq x - a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \pm 4 \end{array} \right. \\ a < x < 15a \\ x \neq 8a \end{cases}$$

Из неравенства $a < x < 15a$ следует, что $x > 0$ и, значит, $x \neq -4$.

Рассмотрим два случая.

1) $x = 1$ - корень уравнения при условиях

$$\begin{cases} a < 1 < 15a \\ 1 \neq 8a \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{15} < a < 1 \\ a \neq \frac{1}{8} \end{cases}$$

2) $x = 4$ - корень уравнения при условиях

$$\begin{cases} a < 4 < 15a \\ 4 \neq 8a \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{4}{15} < a < 4 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Поэтому уравнение имеет единственный корень либо при $\begin{cases} \frac{1}{15} < a \le \frac{4}{15} \\ a \neq \frac{1}{8} \end{cases}$ либо при $1 \le a < 4$, либо при $a = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{15}; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; \frac{4}{15}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1; 4)$.

10.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$ имеет ровно восемь различных решений.

Решение. Преобразуем уравнение

$$\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n, n \in Z \iff \begin{cases} a^2 - x^2 = (2\pi n)^2 \\ n \ge 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{a^2 - (2\pi n)^2} \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Каждому положительному значению подкоренного выражения соответствуют ровно два значения неизвестной, нулевому – одно, а отрицательному – ни одного. Поэтому для того чтобы решений было ровно 8, необходимо и достаточно, чтобы подкоренное выражение было положительным при $n = 0, 1, 2, 3$ и отрицательным при $n = 4, 5, 6, ...$

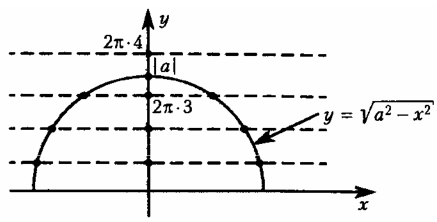
Таким образом, получим систему неравенств

$$\begin{cases} a^2 - (2\pi \cdot 3)^2 > 0 \\ a^2 - (2\pi \cdot 4)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 2\pi \cdot 3 \\ |a| < 2\pi \cdot 4 \end{cases}$$

Отсюда получаем значения

$a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$.

Замечание. Для решения задачи можно к уравнению $\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n, n \in Z$ применить графическую иллюстрацию. Функция $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ задает верхнюю полуокружность с центром в начале координат и переменным радиусом $|a|$. Функция $y = 2\pi n$ задает семейство горизонтальных прямых. Затем необходимо указать границы для радиуса полуокружности, обеспечивая нужное количество точек их пересечения.



Ответ: $(-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$.

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ обоснован и состоит из верных промежутков, но дополнительно содержит хотя бы один из их концов.	3
Решение опирается на верное рассуждение, в котором только не учтены возможные отрицательные значения неизвестной или имеются другие существенные изъяны. В результате, возможно, получен неверный ответ.	2
Ответ неверен или не получен, но найдено верное выражение для неизвестной или ее квадрата.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

10.6. При каких значениях параметра a уравнение $(1 + \sin(3ax))\sqrt{5\pi x - x^2} = 0$ имеет ровно 5 различных корней? (МГУ, 2004)

Указание. Поскольку $x = 0$ и $x = 5\pi$ - корни данного уравнения, необходимо выяснить, при каких a уравнение $\sin 3ax + 1 = 0$ имеет ровно 3 корня на интервале $(0; 5\pi)$. Рассмотрите отдельно случаи $a > 0$ и $a < 0$.

Ответ: $\left[-\frac{13}{30}; -\frac{3}{10}\right) \cup \left(\frac{11}{30}; \frac{1}{2}\right]$.

10.7. При каких значениях a, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, уравнение

$\sqrt{2\sin(x - a) + \sqrt{3}} = \cos 6x - 1$ имеет решения? (МГУ, 1993)

Указание. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2\sin(x - a) + \sqrt{3} = 0 \\ \cos 6x = 1 \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}$.

10.8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x^2 - 6|x| - a\right)^2 + 12\left(x^2 - 6|x| - a\right) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два корня. (МГУ, 1995)

Указание. Уравнение равносильно такому: $\left(x^2 - 6|x| - a + 6\right)^2 + 1 = \cos\frac{18\pi}{a}$. Но это значит, что $x^2 - 6|x| - a + 6 = 0$, а $\cos\frac{18\pi}{a} = 1$. Уравнение $x^2 - 6|x| + 6 = a$ имеет в точности 2 корня при $a = -3$ или при $a > 6$. Из второго уравнения следует, что $a = \frac{9}{n}$, где $n \in Z$, после чего получаем ответ.

Ответ: $a = -3$ и $a = 9$.

10.9. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$x^2 + 4x + 6 - 4a(x - a) - \cos(x + 2) =$$
$$= 8a + \cos(x - 4a + 2).$$ (МГУ, 2008)

Решение. После замены $x + 2 = t$ уравнение принимает вид

$t^2 - 4at + 4a^2 + 2 = \cos t + \cos(t - 4a) \Leftrightarrow$

$(t - 2a)^2 + 2 = 2\cos(t - 2a)\cos 2a$. Левая часть последнего уравнения не меньше 2, а правая – не превышает 2, поэтому решение существует тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} t-2a=0 \\ \cos(t-2a)\cos 2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2a \\ \cos 2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t=2a \\ a=\pi n, n\in Z \end{cases}$$

Теперь возвращаемся к исходной переменной, получаем ответ.

Ответ: если $a=\pi n$, то $x=2\pi n-2$, $n\in Z$.

11. Линейные неравенства

11.1. Найдите все значения параметра $p\in[-4;4]$, при которых неравенство

$$(p-2)((x+1)(p-3)+2x)>0$$

выполняется при любых $x\ge 0$. (МГУ, 2004)

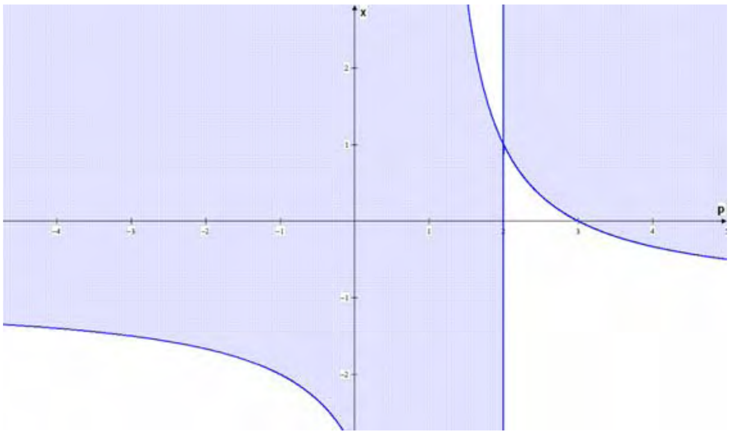
Решение. Если $p>2$, то получается линейное неравенство $(p-1)x+p-3>0$. По условию оно должно выполняться при любых $x\ge 0$, в частности при $x=0$. Отсюда $p>3$. С другой стороны при $p>3$ неравенство действительно справедливо для всех $x\ge 0$. Таким образом, $3<p\le 4$.

Очевидно, что при $p=2$ исходное неравенство не выполнено ни для каких значений x.

При $p<2$ неравенство принимает вид $(p-1)x+p-3<0$. Если $p>1$, то линейная функция $f(x)=(p-1)x+p-3$ возрастает, поэтому для всех $x\ge 0$ неравенство $f(x)<0$ выполняться не может. Если $p=1$, то $f(x)=p-3=-2<0$ для всех x, в том числе и для $x\ge 0$.

Наконец, для $p<1$ линейная функция $f(x)=(p-1)x+p-3$ убывает и при $x=0$ принимает значение $f(0)=p-3<0$. Значит, при $x\ge 0$ неравенство тем более выполняется.

Второе решение. Используя метод областей, найдем графические решения данного неравенства в системе координат pOx. Линии (прямая и гипербола), ограничивающие области решения (выделены цветом), необходимо изобразить пунктиром.



Если проводить прямые, параллельные оси x, то все значения $x\ge 0$ в области решений возможны при значениях $p\in[-4;1]\cup(3;4]$.

Замечание. Метод областей позволяет увидеть, что без ограничения $p\in[-4;4]$ условию задачи удовлетворяют значения $p\in(-\infty;1]\cup(3;+\infty)$.

Ответ: $[-4;1]\cup(3;4]$.

12. Квадратные неравенства

12.1. (2010) Найдите все значения a, для каждого из которых неравенство

$$ax^2-4x+3a+1>0$$

а) выполняется для всех x;

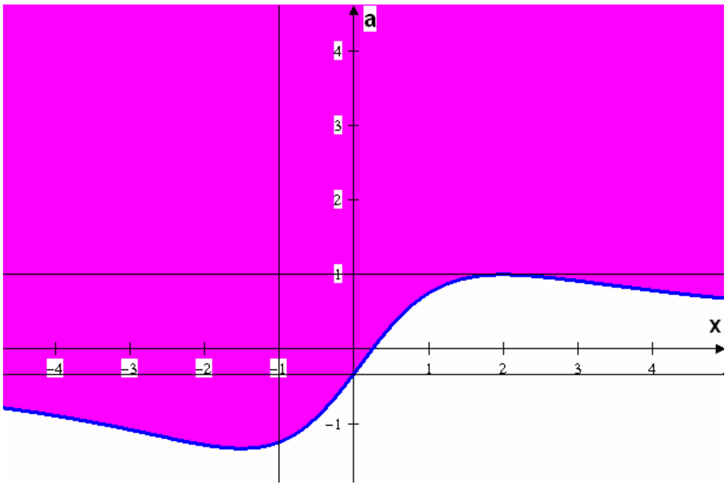
б) выполняется для всех $x>0$;

в) выполняется для всех $x<0$;

г) выполняется для всех $-1<x<0$.

Решение. Перепишем неравенство следующим образом $a(x^2+3)-4x+1>0$; $a>\dfrac{4x-1}{x^2+3}$.

Исследуя функцию $a(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$ с помощью производной $a'(x)=\dfrac{-4x^2+2x+12}{(x^2+3)^2}$, находим при $x=0$ максимум 1, при $x=-1{,}5$ минимум $\left(-\dfrac{4}{3}\right)$. Функция возрастает на интервале $(-1{,}5;0)$, убывает на интервалах $(-\infty;-1{,}5)$ и $(0;+\infty)$. Кроме того определяем асимптоту $a=0$. Выделим цветом графическое решение неравенства $a(x)>\dfrac{4x-1}{x^2+3}$.



Будем проводить прямые (параллельные оси x), которые соответствуют некоторым значениям a. При этом необходимо рассматривать заштрихованную область.

а) Из рисунка видим, что исходное неравенство выполняется для всех x при $a > 1$.

б) Аналогично неравенство выполняется для всех $x > 0$ при $a > 1$.

в) Неравенство выполняется для всех $x < 0$ при $a \geq 0$.

г) На интервале $(-1;0)$ функция $a(x)$ возрастает, причем $a(0) = -\dfrac{1}{3}$. Поэтому исходное неравенство выполняется для всех $-1 < x < 0$ при $a \geq -\dfrac{1}{3}$.

Ответ: а) $a > 1$; б) $a > 1$; в) $a \geq 0$; г) $a \geq -\dfrac{1}{3}$

12.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых из неравенств $0 \leq x \leq 1$ следует неравенство

$\left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a+5)x - 2 \leq 0$.

Решение. Квадратный трехчлен $a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2)$.

1) Пусть $a = 1$, тогда получаем линейное неравенство $-6x - 2 \leq 0$, которое имеет решения $x \geq -\dfrac{1}{3}$. Промежуток $[0;1]$ содержится в этом множестве решений.

2) Пусть $a = -2$, тогда имеем неравенство $-3x - 2 \leq 0$, решениями которого являются значения $x \geq -\dfrac{2}{3}$. Промежуток $[0;1]$ содержится в этом множестве решений.

3) Если $(a-1)(a+2) \neq 0$, то имеем квадратное неравенство. Так как дискриминант $D = (a+5)^2 + 8(a^2 + a - 2) = 9(a+1)^2$, то квадратный трехчлен $\left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a+5)x - 2$ имеет корни

$$x = \frac{a+5-3(a+1)}{2(a-1)(a+2)} = -\frac{1}{a+2} \quad \text{или}$$

$$x = \frac{a+5+3(a+1)}{2(a-1)(a+2)} = \frac{2}{a-1}.$$

а) Пусть $(a-1)(a+2) > 0$, тогда ветви параболы $f(x) = \left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a+5)x - 2$ направлены вверх и решениями данного неравенства является промежуток вида $\left[-\dfrac{1}{a+2}; \dfrac{2}{a-1}\right]$ или $\left[\dfrac{2}{a-1}; -\dfrac{1}{a+2}\right]$. Возможное решение неравенства в виде отдельного числа $x = \dfrac{2}{a-1} = -\dfrac{1}{a+2}$ не удовлетворяет условию задачи. Таким образом, в этом случае необходимо и достаточно поставить условия

$$\begin{cases} (a-1)(a+2) > 0 \\ f(0) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -2 \\ a > 1 \end{array}\right. \\ -2 \leq 0 \\ a^2 - 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} -3 \leq a < -2 \\ 1 < a \leq 3 \end{array}\right.$$

б) Пусть $(a-1)(a+2) < 0$, тогда ветви параболы $f(x) = \left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a+5)x - 2$ направлены вниз и решениями данного неравенства являются два разнонаправленных луча с началом в точках $\dfrac{2}{a-1}$ и $-\dfrac{1}{a+2}$ соответственно. Возможное решение неравенства в виде прямой в случае $x = \dfrac{2}{a-1} = -\dfrac{1}{a+2}$ (это будет при $a = -1$) удовлетворяет условию задачи. Таким образом, в этом случае необходимо и достаточно поставить условия

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-1)(a+2)<0\\ f(0)\le 0\\ x_в<0\end{cases}\\ \begin{cases}(a-1)(a+2)<0\\ f(1)\le 0\\ x_в>1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2<a<1\\ -2\le 0\\ \dfrac{a+5}{(a-1)(a+2)}<0\end{cases}\\ \begin{cases}-2<a<1\\ a^2-9\le 0\\ \dfrac{a+5}{(a-1)(a+2)}>1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2<a<1\\ a+5>0\end{cases}\\ \begin{cases}-2<a<1\\ -3\le a\le 3\\ a+5<(a-1)(a+2)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \ -2<a<1.$$

Собирая все значения a, получаем ответ.

Ответ: $[-3;3]$.

12.3. При каких целых a неравенство $2\log_{\frac{1}{2}} a-3+2x\log_{\frac{1}{2}} a-x^2<0$ верно для любого значения x? (МГУ, 2005)

Указание. Квадратный трехчлен относительно x отрицателен при всех x тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен.

Ответ: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

12.4. Для каких значений a система неравенств

$$\begin{cases}-x^2+12x-a\ge 0\\ x\le 2\end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x? (МГУ, 1994)

Указание. Промежуток между корнями квадратного трехчлена $f(x)=-x^2+12x-a$ имеет общие точки с лучом $x\le 2$ тогда и только тогда, когда $f(2)\ge 0$.

Ответ: $a\le 20$.

12.5. Найдите такие значения x, при которых неравенство $(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$ выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1<a<3$. (МГУ, 1994)

Указание. Перепишем неравенство как линейное относительно переменной a $f(a)=(-2x^2+13x-13)a+(4x^2-27x+3)>0$. Данное неравенство выполняется при всех $1<a<3$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}f(1)\ge 0\\ f(3)\ge 0\end{cases}$$

Осталось решить полученную систему.

Ответ: $\left[3-\sqrt{6};2\right]\cup\left[5;3+\sqrt{6}\right]$.

12.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $6x^2+4a^2+6ax-3x-24a+35<0$ содержит хотя бы одно целое число. (МГУ, 2007)

Указание. Необходимым и достаточным условием существования решений квадратного относительно a неравенства $4a^2+(6x-24)a+6x^2-3x+35<0$ является $\frac{D}{4}=(3x-12)^2-4(6x^2-3x+35)>0$, т.е. $-2-\frac{8}{\sqrt{15}}<x<-2+\frac{8}{\sqrt{15}}$. Полученному интервалу принадлежат всего пять целых значений x, для каждого из которых надо найти соответствующие значения параметра a.

Ответ: $(2;7)$.

12.7. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0\end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 2001)

Указание. Множество решений каждого из неравенств системы может представлять собой отрезок, объединение двух непересекающихся лучей (с началом), прямую, точку или пустое множество. Поэтому система может иметь единственное решение только в следующих случаях: а) решением одного из неравенств является ровно одна точка; б) множества решений обоих неравенств имеют общую граничную точку, т.е. существует решение системы уравнений

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4=0\\ ax^2+2(a+1)x+a+1=0\end{cases}$$

Ответ: $-\frac{3}{4};\frac{4}{3}$.

12.8. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases}x^2-x+a\le 0\\ x^2+2x-6a\le 0\end{cases}$$

имеет единственное решение. (МФТИ, 2004)

Указание. Данная система *может* иметь единственное решение лишь в трех случаях:

$D_1 = 1 + 4a = 0$, $\dfrac{D_2}{4} = 1 + 6a = 0$, уравнения $x^2 - x + a = 0$ и $x^2 + 2x - 6a = 0$ имеют общий корень. Осталось найти значения a и сделать проверку.

Ответ: $\dfrac{1}{4}; 0$.

12.10. При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \le k^2 + 10k + 20 \\ 5x^2 + 5y^2 - 2kx + 4ky \le 5 - k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение? (МГУ, 2001)

Указание. Первое неравенство задает на координатной плоскости Oxy круг с центром $(1; -2)$ и радиусом $|k + 5|$, второе – круг с центром $\left(\dfrac{k}{5}; -\dfrac{2k}{5}\right)$ и радиусом 1 (оба круга с границей). Система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих кругов не превосходит суммы радиусов, т.е. когда

$\sqrt{\left(1 - \dfrac{k}{5}\right)^2 + \left(-2 + \dfrac{2k}{5}\right)^2} \le |k + 5| + 1$. Осталось решить полученное неравенство.

Ответ: $Z \setminus \{-11; -10; ...; -4; -3\}$.

12.11. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x - a)(ax - 2a - 3) \ge 0 \\ ax \ge 4 \end{cases}$$

не имеет решений. (МГУ, 1967)

Решение. 1) Пусть $a > 0$. В этом случае данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} (x - a)\left(x - \dfrac{2a + 3}{a}\right) \ge 0 \\ x \ge \dfrac{4}{a}. \end{cases}$$

Согласно условию задачи для любого $x \ge \dfrac{4}{a}$ должно выполняться неравенство:

$f(x) = (x - a)\left(x - \dfrac{2a + 3}{a}\right) < 0$. Однако это неверно, так как если x больше всех чисел $\dfrac{4}{a}$, a, $\dfrac{2a + 3}{a}$, то $f(x) > 0$.

2) Пусть $a < 0$. В этом случае данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} (x - a)\left(x - \dfrac{2a + 3}{a}\right) \le 0 \\ x \le \dfrac{4}{a}. \end{cases}$$

Согласно условию задачи для любого $x \le \dfrac{4}{a}$ должно выполняться неравенство:

$f(x) = (x - a)\left(x - \dfrac{2a + 3}{a}\right) > 0$. Это будет тогда и только тогда, когда $\dfrac{4}{a} < a$ и $\dfrac{4}{a} < \dfrac{2a + 3}{a}$, или (так как $a < 0$) $a^2 < 4$, $4 > 2a + 3$, или ($a < 0$) $-a < 2$, $a < \dfrac{1}{2}$, и окончательно: $-2 < a < 0$.

Наконец, условию задачи удовлетворяет и значение $a = 0$. Итак, $-2 < a \le 0$.

Ответ: $(-2; 0]$.

13. Неравенства высшей степени

13.1. Найдите все значения x, для каждого из которых неравенство

$$(2 - a)x^3 + (1 - 2a)x^2 - 6x + (5 + 4a - a^2) < 0$$

выполняется хотя бы при одном значении $a \in [-1; 2]$. (МГУ, 1992)

Указание. Перепишем данное неравенство так:

$f(a) = a^2 + a(x^3 + 2x^2 - 4) - (2x^3 + x^2 - 6x + 5) > 0$.

Левая часть его – квадратный трехчлен относительно a. Для того чтобы квадратный трехчлен с положительным коэффициентом при a^2 принимал положительные значения хотя бы в одной точке отрезка $[-1; 2]$, необходимо и достаточно, чтобы он был положителен хотя бы в одном из концов этого отрезка. Получаем совокупность неравенств для x:

$$\left[\begin{array}{l} f(-1) > 0 \\ f(2) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x + 2)(x - 1)x < 0 \\ (x + 3)(x - 1) > 0 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

13.2. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a + 3)x^2 + (3a + 2)x - 2a \ge 0 \\ x^3 - (a + 3)x^2 + 3ax \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение (МГУ, 2001)

Указание. Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 2)(x - a) \ge 0 \\ x(x - 3)(x - a) \le 0 \end{cases}$$

При $a \ge 3$ у системы единственное решение $x = a$. При $a < 3$ множества решений обоих неравенств содержат отрезок вида $[b;3]$, где $b=\max(a,2)$.

Ответ: $[3;+\infty)$.

14. Неравенства с модулем

14.1. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\left|\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$ выполняется при всех x.

Решение. Приведем неравенство к виду $-3<\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}<3.$ Так как квадратный трехчлен x^2+x+1 принимает положительные значения при всех значениях x, то приходим к двойному неравенству $-3(x^2+x+1)<x^2-ax+1<3(x^2+x+1),$ затем к системе $\begin{cases}4x^2+(3-a)x+4>0\\ 2x^2+(3+a)x+2>0\end{cases}$

Для выполнения неравенств при всех значениях x необходимо и достаточно поставить условия

$$\begin{cases}D_1=(3-a)^2-64<0\\ D_2=(3+a)^2-16<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a-3|<8\\ |a+3|<4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-8<a-3<8\\ -4<a+3<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5<a<11\\ -7<a<1\end{cases}\Leftrightarrow -5<a<1.$$

Ответ: $-5<a<1$.

14.2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $|x^2-2x+a|>5$ не имеет решений на отрезке $[-1;2]$. (МГУ, 2000)

Указание. Условие равносильно тому, что неравенство $|x^2-2x+a|\le 5$ выполняется при всех $x\in[-1;2]$, а это равносильно справедливости неравенства

$(x^2-2x+a)^2-5^2\le 0,$

$(x^2-2x-5+a)(x^2-2x+5+a)\le 0,$

$(t+a-6)(t+a+4)\le 0,$ где $t=(x-1)^2$, при всех $0\le t\le 4$.

Ответ: $[-4;2]$.

14.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2+4|x-a|\ge a^2$ справедливо для всех действительных x. (МГУ, 1993)

Решение. При $x\ge a$ неравенство равносильно неравенству $(x-a)(x+a+4)\ge 0,$ справедливому при всех $x\ge a$ тогда и только тогда, когда $a\ge -a-4,$ т.е. при $a\ge -2.$

Аналогично, при $x<a$ приходим к неравенству $(x-a)(x+a-4)\ge 0,$ справедливому при всех $x<a$ при $a\le -a+4,$ т.е. при $a\le 2.$

Ответ: $[-2;2]$.

14.4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+4x+6a\cdot|x+2|+9a^2\le 0$ имеет не более одного решения. (МГУ, 1995)

Указание. После замены $|x+2|=t$ неравенство приводится к виду $(t+3a)^2\le 4,$ откуда $-2-3a\le t\le 2-3a.$ Последнее неравенство имеет не больше одного решения лишь при $2-3a\le 0.$

Ответ: $a\ge\frac{2}{3}$.

14.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|x+1|+2|x+a|>3-2x$ выполняется для любого x.

Решение. Неравенство преобразуется к виду $f(x)>3,$ где $f(x)=|x+1|+2|x+a|+2x.$ Точки -1 и $-a$ разбивают числовую прямую на интервалы, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с линейной (при любом раскрытии знаков модуля). На левом интервале ($x<-1,\ x<-a$) функция принимает вид $f(x)=-x-2a-1$ и является убывающей. На правом интервале ($x>-1,\ x>-a$) функция принимает вид $f(x)=5x+2a+1$ и является возрастающей. Это означает, что функция ограничена снизу. График функции представляет ломаную линию, состоящую из частей прямых. Точки -1 и $-a$ являются точками излома, поэтому в этих точках функция может принимать наименьшее значение.

Все значения функции $f(x)$ больше 3 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}f(-1)>3\\ f(-a)>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2|-1+a|-2>3\\ |-a+1|-2a>3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}|a-1|>\frac{5}{2}\\ |a-1|>2a+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a-1>2{,}5\\ a-1<-2{,}5\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}a-1>2a+3\\ a-1<-2a-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} a>3{,}5 \\ a<-1{,}5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a<-4 \\ a<-\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad a<-1{,}5.$$

Ответ: $(-\infty;-1{,}5)$.

14.8. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x+a$ при условии $|2x+4-2a|+|x-2+a|\le 3$. (МГУ, 2005)

Решение. Пусть $y=x+a$, тогда данное неравенство принимает вид $|y-2|+2|y-2a+2|\le 3$. Раскрывая первый из модулей, запишем это неравенство в виде системы

$$\begin{cases} y-2\le 3-2|y-2a+2| \\ y-2\ge -3+2|y-2a+2| \end{cases} \text{ или}$$

$$-1+2|y-2a+2|\le y\le 5-2|y-2a+2|.$$

Отсюда следует, что переменная y не может принимать значений, выходящих за пределы отрезка $[-1;5]$. Покажем, что искомым множеством является весь этот отрезок. Достаточно убедиться, что граничные значения достигаются. Действительно, $y=-1$ получаем из равенства $-1-2a+2=0$, т.е. при $a=\dfrac{1}{2}$.

Аналогично, $y=5$ получается при $5-2a+2=0$, т.е. для $a=\dfrac{7}{2}$.

Ответ: $[-1;5]$.

14.9. (2010) Найдите все пары чисел p и q, для каждой из которых неравенство

$$|x^2+px+q|>2$$

не имеет решений на отрезке $[1;5]$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} x^2+px+q>2 \\ x^2+px+q<-2. \end{array}\right.$$

Условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда выполняются условия системы

$$\begin{cases} f(1)\le 2 \\ f(5)\le 2 \\ f(x_в)\ge -2, \end{cases}$$

где $f(x)=x^2+px+q$ и $x_в=-\dfrac{p}{2}$ - абсцисса вершины параболы.

Рассмотрим систему неравенств.

$$\begin{cases} p+q\le 1 \\ 5p+q\le -23 \\ \dfrac{p^2}{4}-q\le 2. \end{cases}$$

Сложив первое и третье неравенства, получим квадратное неравенство $p^2+4p-12\le 0$, решением которого является промежуток $[-6;2]$.

Складывая второе и третье неравенства, имеем квадратное неравенство $p^2+20p+84\le 0$, решением которого является промежуток $[-14;-6]$.

Из двух полученных промежутков получаем $p=-6$. Подставим это значение p в систему неравенств и найдем $q=7$.

Проверим найденные значения, решая неравенство $|x^2-6x+7|>2$. Решения $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$ удовлетворяют условию задачи.

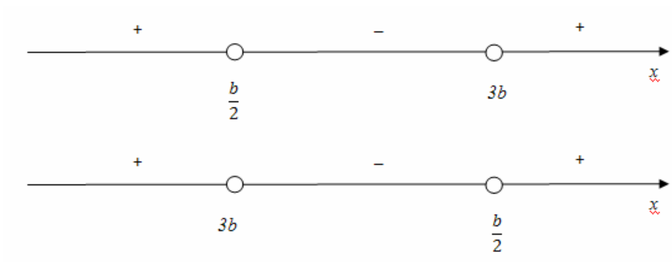
Ответ: $p=-6,\ q=7$.

15. Дробно-рациональные неравенства

15.1. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3;-1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\dfrac{x-3b}{b-2x}<0$. (МГУ, 2003)

Решение. Неравенство перепишем так:

$$\frac{x-3b}{x-\frac{b}{2}}>0 \text{ или } f(x)=(x-3b)\left(x-\frac{b}{2}\right)>0.$$



Условие задачи выполняется, если для квадратичной функции имеет место

$$\begin{cases} \dfrac{b}{2}\ge 3b \\ \left[\begin{array}{l} -3>\dfrac{b}{2} \\ -1<3b \end{array}\right. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \dfrac{b}{2}\le 3b \\ \left[\begin{array}{l} -3>3b \\ -1<\dfrac{b}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Отсюда получаем значения
$b\in(-\infty;-6)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right]$ или $b\geq 0$.

Замечание. Можно было бы воспользоваться условиями расположения корней квадратного трехчлена: оба корня меньше числа (–3) или оба корня больше числа (–1), т.е.
$\begin{cases} f(-3)>0 \\ x_в<-3 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(-1)>0 \\ x_в>-1 \end{cases}$ где абсцисса

вершины $x_в=\dfrac{3b+\frac{b}{2}}{2}=\dfrac{7b}{4}$.

Ответ: $(-\infty;-6)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

15.2. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a}<0$ выполняется для всех таких x, что $1\leq x\leq 2$. (МГУ, 1974)

Указание. Неравенство сводится к виду
$f(x)=(x-2a-1)(x-a)<0$ и к условиям
$$\begin{cases} f(1)<0 \\ f(2)<0 \end{cases}$$

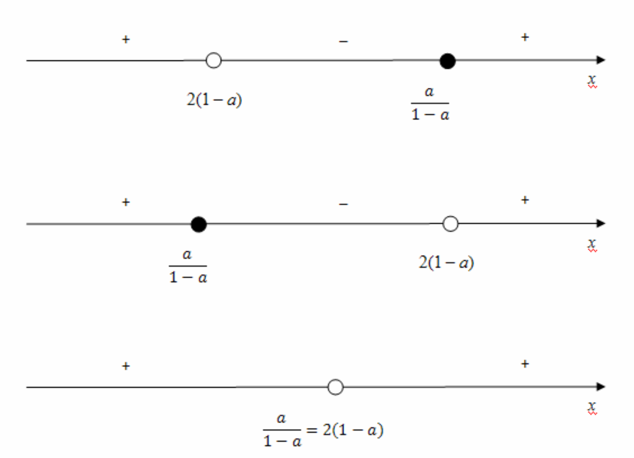
Ответ: $\frac{1}{2}<a<1$.

15.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a}\geq 0 \\ x-8>ax \end{cases}$$
не имеет решений. (МГУ, 1967)

Решение. 1) При $a=1$ второе неравенство, а значит и система не имеет решений.
2) Пусть $a<1$, тогда система принимает вид:
$$\begin{cases} (1-a)\left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)\left(x-2(1-a)\right)\geq 0 \\ x\neq 2(1-a) \\ (1-a)x>8 \end{cases}$$
или
$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)\left(x-2(1-a)\right)\geq 0 \\ x\neq 2(1-a) \\ x>\dfrac{8}{1-a} \end{cases}$$

Согласно условию задачи для любого $x>\dfrac{8}{1-a}$ должно выполняться неравенство:

$f(x)=\left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)(x-2(1-a))<0$. Однако это неверно, так как если x больше всех чисел $\dfrac{8}{1-a}$, $2(1-a)$, $\dfrac{a}{1-a}$, то $f(x)>0$.



3) Пусть $a>1$, тогда система принимает вид:
$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)\left(x-2(1-a)\right)\leq 0 \\ x\neq 2(1-a) \\ x<\dfrac{8}{1-a} \end{cases}$$

Согласно условию задачи для любого $x<\dfrac{8}{1-a}$ должно выполняться неравенство:

$f(x)=\left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)\left(x-2(1-a)\right)>0$. Это будет тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} a>1 \\ \dfrac{8}{1-a}\leq\dfrac{a}{1-a} \\ \dfrac{8}{1-a}\leq 2(1-a) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a>1 \\ 8\geq a \\ 8\geq 2(1-a)^2 \end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 1<a\leq 8 \\ -1\leq a\leq 3 \end{cases}\Leftrightarrow 1<a\leq 3.$$

Итак $a=1$, $1<a\leq 3$.

Ответ: $[1;3]$.

15.7. Для каждого значения a решите неравенство
$$\frac{x^2\cdot 2^{|2a-1|}-2x+1}{x^2-(a-2)x-2a}>0.$$
(МГУ, 2003)

Указание. Дискриминант трехчлена, стоящего в числителе, при $a \neq \frac{1}{2}$ отрицателен, а при $a = \frac{1}{2}$ равен нулю. Знаменатель же равен $(x+2)(x-a)$. Осталось применить метод интервалов, учитывая взаимное расположение точек a и -2.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$ при $a=\frac{1}{2}$;

$(-\infty;a)\cup(-2;+\infty)$ при $a \le -2$;

$(-\infty;-2)\cup(a;+\infty)$ при $-2 < a < \frac{1}{2}$ или $a > \frac{1}{2}$.

16. Иррациональные неравенства

16.1. При каких значениях a неравенство $\left(x^2-(a+2)x-2a^2+4a\right)\sqrt{1-x} \le 0$ имеет единственное решение? (МГУ, 2000)

Указание. Данное неравенство имеет единственное решение ($x=1$) тогда и только тогда, когда наименьший корень квадратного трехчлена $x^2-(a+2)x-2a^2+4a$ не меньше 1.

Ответ: $\left[\frac{1}{2};1\right]$

16.2. Определите, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a} \ge x$ образуют на числовой прямой отрезок длиной $2|a|$ (МГУ, 1996)

Указание. Решая неравенство, удобно выполнить замену $y=\sqrt{x+a}$.

Ответ: $2; \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

16.3. Найдите все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка $[1;5]$ удовлетворяют неравенству

$3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0$. (МГУ, 1992)

Указание. Данное неравенство преобразуется к виду

$a<\frac{5}{3}+\left(\sqrt{\frac{3}{3x+1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$. Правая часть оптимальна и равна $\frac{5}{3}$, когда выражение в скобках равно нулю, т.е. при $x=\frac{8}{3}\in[1;5]$.

Ответ: $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$.

16.4. При всех значениях параметра b решите неравенство

$2(b-1)\sqrt{3x+1}+1 \ge 3bx+b-3x$ (МГУ, 2006)

Указание. Преобразуйте исходное неравенство к виду

$2(b-1)\sqrt{3x+1} \ge (b-1)(3x+1)$.

Ответ: при $b<1$ $x\in\left\{-\frac{1}{3}\right\}\cup[1;+\infty)$; при $b=1$ $x\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$; при $b>1$ $x\in\left[-\frac{1}{3};1\right]$.

17. Показательные неравенства

17.1. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$16^x<30\cdot4^x-a$ не имеет ни одного целочисленного решения. (МГУ, 1995)

Указание. Пусть $4^x=t$, тогда неравенство $(t-15)^2<225-a$, во всяком случае, не должно иметь своим решением $t=16$, т.е. должно выполняться неравенство $(16-15)^2 \ge 225-a$, т.е. $a \ge 224$. Проверьте, что это условие является и достаточным.

Ответ: $a \ge 224$.

18. Логарифмические неравенства

18.1. Для любого допустимого значения a решите неравенство

$\log_{2a}\left(\log_3 x^2\right)>1$ и найдите, при каком значении a множество точек x, не являющихся решением неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6. (МГУ, 1999)

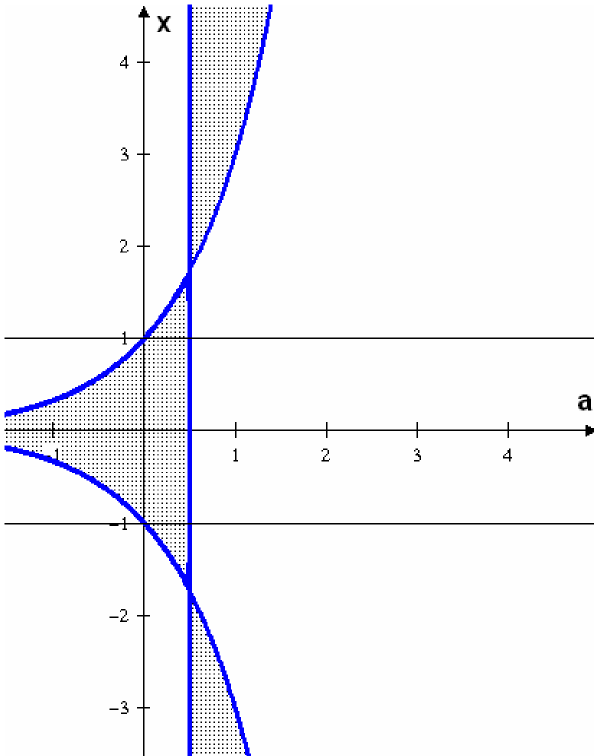
Решение. Для решения неравенства $\log_{2a}\left(\log_3 x^2\right)-1>0$ используем метод рационализации.

$$\begin{cases}(2a-1)\left(\log_3 x^2-2a\right)>0\\ \log_3 x^2>0\\ 2a>0\\ 2a\neq1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(2a-1)\left(x^2-3^{2a}\right)>0\\ x^2-1>0\\ a>0\\ a\neq0{,}5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(2a-1)\left(x-3^a\right)\left(x+3^a\right)>0\\ (x-1)(x+1)>0\\ a>0\end{cases}$$

Далее используем метод областей для графического изображения решений исходного неравенства. С учетом ограничений запишем решения $\left(-3^a;-1\right)\cup\left(1;3^a\right)$ при $0<a<0{,}5$; $\left(-\infty;-3^a\right)\cup\left(3^a;+\infty\right)$ при $a>0{,}5$.
Из рисунка видим, что ограниченный отрезок, расположенный вне заштрихованной области ($a>0$) возможен между числами 3^a и -3^a.
Поэтому получаем уравнение $3^a-(-3^a)=6$, откуда $a=1$.



Ответ: $\left(-3^a;-1\right)\cup\left(1;3^a\right)$ при $0<a<0{,}5$; $\left(-\infty;-3^a\right)\cup\left(3^a;+\infty\right)$ при $a>0{,}5$, длина промежутка равна 6 при $a=1$.

19. Неравенства смешанного типа

19.1. (2010) Найдите наибольшее значение параметра b, при котором неравенство

$$\sqrt{b^5}\left(8x-x^2-16\right)+\frac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}\ge -\frac{2}{3}b\left|\cos\pi x\right|$$

имеет хотя бы одно решение.
Решение. При $b=0$ неравенство выполняется. Пусть $b>0$. Преобразуем данное неравенство

$$b\sqrt{b}\left(b(x-4)^2+\frac{1}{b(x-4)^2}\right)\le\frac{2}{3}b\left|\cos\pi x\right| \text{ или}$$

$$\sqrt{b}\left(b(x-4)^2+\frac{1}{b(x-4)^2}\right)\le\frac{2}{3}\left|\cos\pi x\right|.$$

Так как сумма двух взаимно обратных положительных величин не меньше 2, то левая часть не меньше $2\sqrt{b}$. Правая часть не больше $\frac{2}{3}$. Следовательно, чтобы данное неравенство имело хотя бы одно решение, необходимо выполнение условия $2\sqrt{b}\le\frac{2}{3}$, $b\le\frac{1}{9}$.

Наибольшее значение $b=\frac{1}{9}$. Если $b=\frac{1}{9}$, то левая часть последнего неравенства не меньше $\frac{2}{3}$, а правая часть не больше $\frac{2}{3}$. Значит, левая и правая части равны $\frac{2}{3}$. Левая часть достигает наименьшего значения при условии

$b(x-4)^2=\dfrac{1}{b(x-4)^2}$ или $(x-4)^4=81$, $x=1$ или $x=7$. При этих значениях x правая часть равна $\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

19.3. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство
$\left|3\sin^2 x+2a\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x+a\right|\le 3$. (МГУ, 1988)
Решение. Упростим подмодульное выражение

$$f(x)=3\sin^2 x+2a\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x+a=$$
$$=3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+a\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}+a=$$
$$=a\sin 2x-\cos 2x+2+a=$$
$$=\sqrt{a^2+1}\sin(2x-\varphi)+2+a, \text{ где}$$
$$\varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы наименьшее (m) и набольшее (M) значения функции $f(x)$ удовлетворяли системе

$$\begin{cases} m\ge -3\\ M\le 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{a^2+1}+2+a\ge -3\\ \sqrt{a^2+1}+2+a\le 3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+1}\le a+5\\ \sqrt{a^2+1}\le 1-a\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+1\le (a+5)^2\\ a+5\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+1\le (1-a)^2\\ 1-a\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}a\ge -2{,}4\\ a\le 0.\end{cases}$$

Ответ: $[-2{,}4;0]$.

19.5. При каких значениях параметров a и b система неравенств

$\begin{cases}a+\sin bx\le 1\\ x^2+ax+1\le 0\end{cases}$ имеет единственное решение?

(МГУ, 1994)

Указание. Второе неравенство имеет решение при $|a|\ge 2.$ Если $a<-2,$ то первое неравенство выполняется при всех x, а при $a>2$ оно вообще не имеет решений. Осталось проверить $a=2$ и $a=-2.$

Ответ: $a=2,\ b=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$

$a=-2,\ b\in R.$

20. Инвариантность

20.1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$$

имеет нечетное число решений. (МГУ, 1999)

Решение. Данное уравнение инвариантно (неизменно) при замене x на $-x$ (докажите). Поэтому, если число x_0 является корнем исходного уравнения, то число $-x_0$ также будет корнем. Вследствие этого, количество корней может быть нечетным только в случае, когда среди корней находится число $x_0=0.$

Подставляя в исходное уравнение $x=0,$ получаем уравнение относительно a:

$|2a|=a^2+1,\quad (|a|-1)^2=0,\quad |a|=1.$

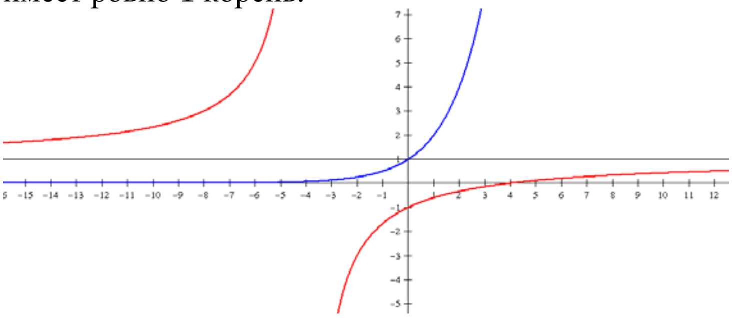
1) Если $a=1$, то исходное уравнение примет вид

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2\right|=2.$$

Оно распадается на два уравнения:

$\dfrac{x(2^x-1)}{2^x+1}=0$ или $\dfrac{x(2^x-1)}{2^x+1}=-4.$ Первое уравнение имеет один корень $x=0.$ Второе уравнение разрешим относительно 2^x ($x=-4$ не является корнем этого уравнения):

$2^x=\dfrac{x-4}{x+4}$ или $2^x=1-\dfrac{8}{x+4}$. Показательная функция $y=2^x$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ и проходит через точку $(0;1)$. Дробно-линейная функция возрастает на промежутках $(-\infty;-4)$ и $(-4;+\infty)$. Ее график – гипербола, проходящая через точку $(0;-1)$, с вертикальной асимптотой $x=-4$ и горизонтальной асимптотой $y=1.$ Второе уравнение не имеет корней. В этом случае исходное уравнение имеет ровно 1 корень.



2) Пусть $a=-1$ (рассмотрите самостоятельно).

Ответ: $a=1$ или $a=-1$.

20.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left(5-2\sqrt6\right)^x+\left(5+2\sqrt6\right)^x-5a=y-|y|-8\\ x^2-(a-4)y=0\end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 2007)

Решение. Из равенства

$$\left(5-2\sqrt6\right)^x=\frac{1}{\left(5+2\sqrt6\right)^x}=\left(5+2\sqrt6\right)^{-x}$$

следует, что если пара $(x;y)$ удовлетворяет системе, то пара $(-x;y)$ – тоже решение системы. Поэтому, если решение единственно, то $x=0$ и

$$\begin{cases}y-|y|+5a-10=0\\ (a-4)y=0,\end{cases}$$

откуда получаем два возможных значения $a=2,\ a=4$. Проверка показывает, что оба значения удовлетворяют условию.

Ответ: 2; 4.

20.3. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}3\cdot 2^{|y|}+5|y|+3x+4=5y^2+3a\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 1987)

Решение. Заметим, что если (x_0,y_0) - решение системы, то и $(x_0,-y_0)$ - решение системы. Следовательно, для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось условие

$-y_0=y_0$, т.е. $y_0=0$. При $y=0$ система примет вид

$$\begin{cases}7+3x=3a\\ x^2=1\end{cases}$$

Если $x=1$, то $a=\frac{10}{3}$; если $x=-1$, то $a=\frac{4}{3}$.

Итак, значениями параметра a, при которых данная система может иметь единственное решение, являются только $a=\frac{4}{3}$ и $a=\frac{10}{3}$.

Пусть $a=\frac{4}{3}$. Тогда данная система примет вид

$$\begin{cases}3\cdot 2^{|y|}+5|y|=-3x+5y^2\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы следует, что $|x|\le 1,\ |y|\le 1$. Тогда $-3x\le 3,\ |y|\ge y^2$. Кроме того, $3\cdot 2^{|y|}\ge 3\cdot 2^0=3$ при любом y. Таким образом $3\cdot 2^{|y|}\ge 3\ge -3x,\ 5|y|\ge 5y^2$.

Следовательно, $3\cdot 2^{|y|}+5|y|\ge -3x+5y^2$, причем равенство достигается только в случае, когда $3\cdot 2^{|y|}=3=-3x,\ 5|y|=5y^2$ одновременно.

Получаем систему

$$\begin{cases}3\cdot 2^{|y|}=3\\ -3x=3\\ 5|y|=5y^2\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}x=-1\\ y=0.\end{cases}$$

Значит, при $a=\frac{4}{3}$ данная система имеет единственное решение $(-1;0)$.

Пусть теперь $a=\frac{10}{3}$. Тогда данная система примет вид

$$\begin{cases}3\cdot 2^{|y|}+5|y|+3x=5y^2+6\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

Заметим, что пары чисел (0;1) и (1;0) являются решениями этой системы. Таким образом, при $a=\frac{10}{3}$ система имеет более одного решения.

Ответ: $a=\frac{4}{3}$.

20.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}1-\sqrt{|1-x|}=\sqrt{7|y|}\\ 49y^2+x^2+4a=2x-1\end{cases}\qquad(1)$$

имеет ровно четыре различных решения. (МГУ, 1986)

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases}\sqrt{7|y|}+\sqrt{|x-1|}=1\\ \left(\sqrt{7|y|}\right)^4+\left(\sqrt{|x-1|}\right)^4=-4a.\end{cases}\qquad(2)$$

Обозначим $\sqrt{|x-1|}=u,\ \sqrt{7|y|}=v$. (3)

Получим систему уравнений

$$\begin{cases}u+v=1\\ u^4+v^4=-4a\end{cases}\qquad(4)$$

Заметим, что выполняются неравенства $u\ge 0$ и $v\ge 0$. (5)

Если u_0, v_0 - какое-либо решение системы (4), удовлетворяющее неравенствам (5), то из формул (3) следует, что исходная система будет иметь следующие решения

$$\left(1+u_0^2;\frac{v_0^2}{7}\right),\ \left(1+u_0^2;-\frac{v_0^2}{7}\right),$$

$$\left(1-u_0^2;\frac{v_0^2}{7}\right),\ \left(1-u_0^2;-\frac{v_0^2}{7}\right).\quad(6)$$

Пара чисел $u=v_0,\ v=u_0$ также удовлетворяет равенствам (4) и неравенствам (5). Поэтому решениями исходной системы уравнений будут и следующие пары чисел:

$$\left(1+v_0^2;\frac{u_0^2}{7}\right),\ \left(1+v_0^2;-\frac{u_0^2}{7}\right),$$

$$\left(1-v_0^2;\frac{u_0^2}{7}\right),\ \left(1-v_0^2;-\frac{u_0^2}{7}\right).\quad(7)$$

Если параметр a принимает значение, удовлетворяющее условию задачи, то среди выписанных восьми пар чисел (6) и (7) должно быть только четыре различных. Легко проверить, что это возможно лишь тогда, когда $u_0=0$, или $v_0=0$, или $u_0=v_0$.

Учитывая, что пара чисел $(u_0;v_0)$ должна удовлетворять первому уравнению системы (4), заключаем, что если для некоторого значения a выполняется условие задачи, то системе (4) обязательно должна удовлетворять по крайней мере одна из трех пар чисел $(0;1),\ (1;0),\ \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Подставляя указанные пары во второе уравнение системы (4), убеждаемся, что это возможно только при $a=-\frac{1}{4}$ и $a=-\frac{1}{32}$.

Рассмотрим систему (4) при $a=-\frac{1}{32}$

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^4+v^4=\frac{1}{8} \end{cases} \quad (8)$$

Обозначив $t=uv$, будем иметь

$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=1-2t$,

$u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=(1-2t)^2-2t^2=1-4t+2t^2$.

Следовательно, t удовлетворяет квадратному уравнению $1-4t+2t^2=\frac{1}{8}$, т.е. уравнению $2t^2-4t+\frac{7}{8}=0$. Это уравнение имеет два корня $t_1=\frac{1}{4}$ и $t_2=\frac{7}{4}$. Нас интересуют неотрицательные решения $u,\,v$ системы (8). Из первого уравнения (8) следует, что должны выполняться неравенства $0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1$, и, значит, $t\le 1$. Следовательно, $t=\frac{1}{4}$ и все неотрицательные решения системы (8) содержатся среди решений системы

$$\begin{cases} u+v=1 \\ uv=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что она имеет единственное решение $u=\frac{1}{2},\ v=\frac{1}{2}$. Эта пара удовлетворяет системе (8). Для нее среди решений (6), (7) исходной системы имеется ровно четыре различных $\left(\frac{5}{4};\pm\frac{1}{28}\right), \left(\frac{3}{4};\pm\frac{1}{28}\right)$.

Решая также систему (4) при $a=-\frac{1}{4}$, убеждаемся, что она имеет только два решения $(0;1)$ и $(1;0)$ в неотрицательных числах. Для них среди решений (6), (7) исходной системы имеется ровно четыре различных $(0;0)$, $(2;0)$, $\left(1;\pm\frac{1}{7}\right)$.

Ответ: $a=-\frac{1}{32}$; $a=-\frac{1}{4}$.

20.7. (2010) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y\ge x^2+2a \\ x\ge y^2+2a \end{cases}$$

имеет единственное решение. (МГУ, 1984)

Решение. Заметим, что x и y входят в систему симметричным образом. Если $(x_0;y_0)$ - решение системы, то $(y_0;x_0)$ также является ее решением. Так как решение должно быть единственным, то $x_0=y_0$, и при этом число x_0 удовлетворяет неравенству $x_0^2-x_0+2a\le 0$. Это неравенство должно иметь единственное решение, что будет тогда, когда дискриминант $D=1-8a=0$ или $a=\frac{1}{8}$.

Теперь докажем, что при этом значении a данная система действительно имеет единственное решение. При $a=\frac{1}{8}$ данная система примет вид

$$\begin{cases} y\ge x^2+\frac{1}{4} \\ x\ge y^2+\frac{1}{4} \end{cases}$$

Если пара чисел $(x;y)$ удовлетворяет этой системе неравенств, то она удовлетворяет и неравенству, полученному при сложении этих неравенств. Складывая эти неравенства, имеем неравенство $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le 0$. Последнее неравенство выполняется только для $x=y=\frac{1}{2}$, т.е. оно имеет единственное решение $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $a=\frac{1}{8}$.

20.8. (2010) Найдите все значения p, при каждом из которых найдется q такое, что система

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=q|x|+p \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если $(x_0;y_0)$ - решение системы, то $(-x_0;y_0)$ также является ее решением. Поэтому условие $x=0$ - необходимое условие для существования единственного решения. Пусть $x=0$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} y^2=1 \\ y=p, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad p=\pm 1.$$

Проверим эти значения. Если $p=1$, то имеем

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=q|x|+1 \end{cases}$$

Отсюда получаем уравнение

$(1+q^2)x^2+2q|x|=0,\quad |x|\left((1+q^2)|x|+2q\right)=0.$

Последнее уравнение будет иметь единственный корень при $q>0$.

Аналогично проверяется значение $p=-1$.

Ответ: $p=-1,\ p=1$.

20.9. (2010) Найдите все значения p, при каждом из которых для любого q система

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=q|x|+p \end{cases}$$

имеет решения.

Решение. Заметим, что если $(x_0;y_0)$ - решение системы, то $(-x_0;y_0)$ также является ее решением. Поэтому уравнение $(1+q^2)x^2+2pq|x|+p^2-1=0,$ полученное из системы, будет иметь корни разных знаков. Для этого необходимо и достаточно выполнение условия $p^2-1<0,\ -1<p<1.$

Если $p^2-1=0,$ то квадратное уравнение будет иметь, по крайней мере, корень $x=0$ для любого q.

Ответ: $-1\le p\le 1.$

21. Функции

21.1. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции

$f(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}$ лежит на интервале $(-3;3)$.

Указание. См. решение задания № 14.1.

Ответ: $(-5;1)$

21.2. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции

$f(x)=\dfrac{3x+p}{x^2+5x+7}$ содержит полуинтервал $(-1;3]$. Определите при каждом таком p множество значений функции $f(x)$. (МГУ, 1999)

Решение. Обозначим $f(x)=y$ и рассмотрим какие значения принимает переменная y.

Значение $y=0$ получаем при $x=-\dfrac{p}{3},$ причем $x^2+5x+7>0$ при всех x. Пусть $y\ne 0$. Из равенства $y=\dfrac{3x+p}{x^2+5x+7}$ получаем квадратное уравнение $yx^2+(5y-3)x+7y-p=0,$ которое имеет решение, когда дискриминант

$D=(5y-3)^2-4y(7y-p)\ge 0,$

$g(y)=3y^2+y(30-4p)-9\le 0.$ Таким образом, множество $E(f)$ значений функции f - отрезок между корнями квадратного трехчлена $g(y)$ (по теореме Виета произведение этих корней равно -3, так что корни имеют разные знаки, и отрезок между ними всегда содержит точку $y=0$, которую на время исключили).

Отрезок $E(f)$ содержит полуинтервал $(-1;3]$ в том и только том случае, если

$$\begin{cases} g(-1)\le 0 \\ g(3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-(30-4p)-9\le 0 \\ 27+3(30-4p)-9\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p\le 9 \\ p\ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow \quad p=9.$$

При $p=9$ имеем $g(y)=y^2-2y-3\le 0,$ причем $g(-1)=g(3)=0$ и $E(f)=[-1;3].$

Ответ: $p=9;\ [-1;3].$

21.4. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x)=x^2+4x+\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|-a$$

принимает

1) только неотрицательные значения;

2) как положительные, так и отрицательные значения.

Решение. 1) Для неравенства $f(x)\ge 0$ имеем

$a\le x^2+4x+\left|x^2-\dfrac{3}{2}x-1\right|.$

Построим график функции

$a(x)=x^2+4x+\left|x^2-\dfrac{3}{2}x-1\right|=$

$$=\begin{cases} 2x^2+2{,}5x-1 & \text{если } x\in(-\infty;-0{,}5]\cup[2;+\infty) \\ 5{,}5x+1 & \text{если } x\in[-0{,}5;2] \end{cases}$$

Выделим цветом множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$a\le x^2+4x+\left|x^2-\dfrac{3}{2}x-1\right|.$

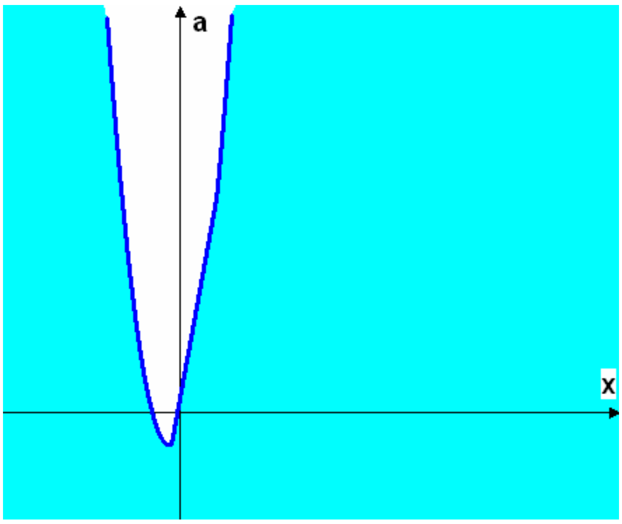
Найдем наименьшее значение функции $a(x)$.

Сравним значения квадратного трехчлена $2x^2+2{,}5x-1$ при $x_в=-\dfrac{2{,}5}{4}=-\dfrac{5}{8}$ и линейного двучлена $5{,}5x+1$ при $x=-0{,}5$:

$2\left(-\frac{5}{8}\right)^2+2{,}5\left(-\frac{5}{8}\right)-1=-\frac{57}{32}=-1{,}78125$ и $5{,}5(-0{,}5)+1=-1{,}75$. Таким образом, $a_{наим.}=-\frac{57}{32}$.

Прямые, параллельные оси x, полностью находятся в заштрихованной области при $a\le-\frac{57}{32}$.

2) Условие «функция принимает как положительные, так и отрицательные значения» означает на графическом языке: прямые, параллельные оси x, пересекают как заштрихованную так и не заштрихованную области. Как видим из рисунка, это возможно при $a>-\frac{57}{32}$.



Ответ: 1) $a\le-\frac{57}{32}$; 2) $a>-\frac{57}{32}$.

21.5. Найдите значения a, при которых наибольшее значение функции $f(x)=2x^2+x(5-3a)+a^2-3a+4$ на отрезке с концами в точках $a-1$ и -4 минимально. Укажите это значение. (МГУ, 2006)

Указание. Наибольшее значение квадратичной функции из условия задачи на отрезке достигается в одном из концов этого отрезка.

Ответ: $-5;-4$.

21.6. (2010) Найдите все такие значения a, для которых наименьшее значение функции $\left|x^2-(1+a)x+a\right|+(a-1)\cdot|x+1|$ меньше 2.

Решение. Функция преобразуется к виду $f(x)=|(x-1)(x-a)|+(a-1)\cdot|x+1|$. Точки -1, 1 и a разбивают числовую прямую на интервалы, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с квадратичной (при любом раскрытии знаков модуля). На левом интервале ($x<-1,\ x<1,\ x<a$) функция принимает вид $f(x)=x^2-2ax+1$ и является убывающей на интервале $(-\infty;t)$, где t одно из чисел -1 и a. На правом интервале ($x>-1,\ x>1,\ x>a$) функция принимает вид $f(x)=x^2-2x+2a-1$ и является возрастающей на $(t;+\infty)$, где t одно из чисел 1 и a. На промежуточных интервалах функция может иметь вид $f(x)=-x^2+2ax-1$ или $f(x)=-x^2+2x-2a+1$ и будет ограничена снизу. Каждая из парабол имеет вершину либо при $x=1$ либо при $x=a$. График функции представляет ломаную линию, состоящую из частей парабол. Точки -1, 1 и a являются точками излома, поэтому в этих точках функция может принимать наименьшее значение.

Получаем условия

$$\left[\begin{array}{l} f(1)<2 \\ f(-1)<2 \\ f(a)<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1<1 \\ |a+1|<1 \\ (a-1)|a+1|<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} a<2 \\ -2<a<0 \\ \left[\begin{array}{l} a^2-1<2 \ при\ a\ge-1 \\ a^2-1>-2 \ при\ a<-1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<2 \\ -2<a<0 \\ -1\le a<\sqrt{3} \\ a<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$a<2$.

Ответ: $(-\infty;2)$.

21.7. (2010) Найдите все такие a, что наименьшее значение функции $f(x)=4|x-a|+\left|x^2+2x-3\right|$ меньше 4.

Решение. Переформулируем задачу: найдите все такие a, что неравенство $4|x-a|+\left|x^2+2x-3\right|-4<0$ имеет решения.

Перепишем неравенство $|x-a|<1-\frac{1}{4}\left|x^2+2x-3\right|$. График непрерывной функции $f(x)=1-\frac{1}{4}\left|x^2+2x-3\right|=$

$$=\begin{cases} -0{,}25x^2-0{,}5x+1{,}75 & если\ x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty) \\ 0{,}25x^2+0{,}5x+0{,}25 & если\ x\in[-3;1] \end{cases}$$

состоит из частей парабол. Функция $g(x)=|x-a|$ задает семейство «уголков» с вершиной на оси x. Необходимо найти те промежутки, на которых имеются точки графика

$g(x)=|x-a|$, расположенных ниже графика $f(x)$. На рисунке отмечены три пограничных расположения графика $g(x)=|x-a|$. Если $a=-1$, то графики имеют одну общую точку. Аналитически это можно показать, решив на промежутке $[-3;1]$ уравнение

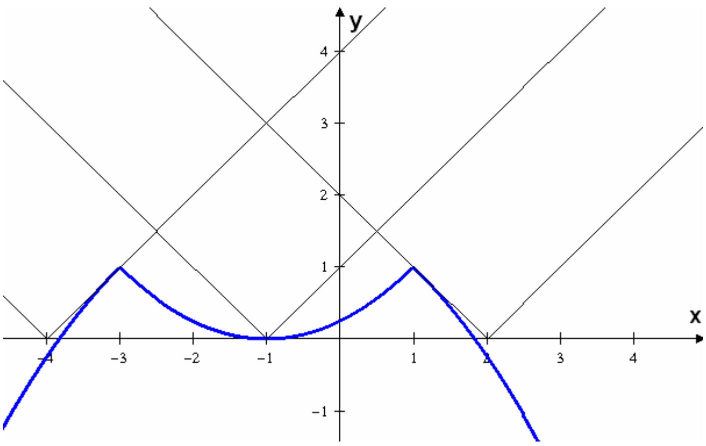
$$|x+1|=0{,}25x^2+0{,}5x+0{,}25,\quad |x+1|=0{,}25|x+1|^2.$$

Другие граничные значения a найдем из условий касания:

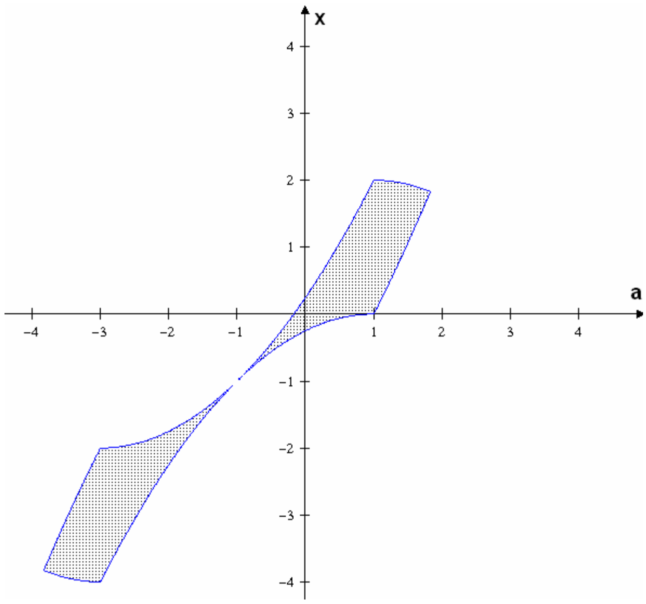
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f'(x_0)=-1\\ g(x_0)=f(x_0)\end{cases}\\ \begin{cases} f'(x_0)=1\\ g(x_0)=f(x_0)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} -0{,}5x-0{,}5=-1\\ g(x_0)=f(x_0)\end{cases}\\ \begin{cases} -0{,}5x-0{,}5=1\\ g(x_0)=f(x_0)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=1\\ g(1)=f(1)\end{cases}\\ \begin{cases} x=-3\\ g(-3)=f(-3)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|1-a|=1\\ |3+a|=1\end{array}\right.$$

Отсюда получаем $a=-4$ или $a=2$, для которых $x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. Теперь из рисунка получаем искомые промежутки: $(-4;-1)\cup(-1;2)$.



Замечание. Если решения неравенства графически представить в системе координат aOx, то получим красивую фигуру с центром симметрии $(-1;-1)$. Из этого рисунка также видим решения $(-4;-1)\cup(-1;2)$.



Ответ: $(-4;-1)\cup(-1;2)$.

21.8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$f(x)=\frac{4\sin x+a}{4a-2\sin x}$$ принимает все значения из отрезка $[0;1]$. (МГУ, 2005)

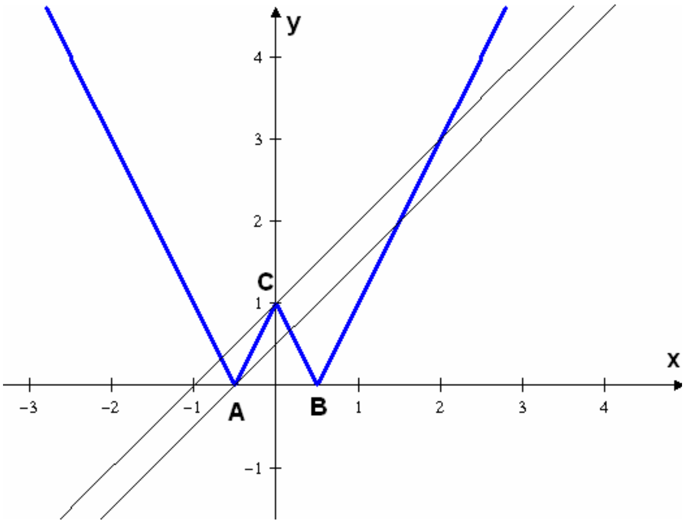
Указание. Выполнив замену $\sin x=t$, приходим к такой переформулировке задачи: при каких значениях параметра a уравнение $y=\dfrac{4t+a}{4a-2t}$ имеет корень на отрезке $[-1;1]$ для любого $y\in[0;1]$? Решая это уравнение относительно t, получаем $t=2a-\dfrac{9a}{2(y+2)}=f(y)$. Значение $a=0$ не удовлетворяет условию. При $a\neq 0$ функция $f(y)$ монотонно возрастает на отрезке $[0;1]$, а t при этом принимает значения от $f(0)=-\dfrac{a}{4}$ до $f(1)=\dfrac{a}{2}$. Условие $|t|\le 1$ означает, что $\left|\dfrac{a}{4}\right|\le 1$, $\left|\dfrac{a}{2}\right|\le 1$.

Ответ: $0<|a|\le 2$.

22. Параллельный перенос (вдоль оси y)

22.1. При каких значениях параметра a уравнение $x-a=||2x|-1|$ имеет ровно три корня?

Решение. График функции $y=||2x|-1|$ касается оси Ox в точках $A(-0{,}5;0)$ и $B(0{,}5;0)$. Функция $y=x-a$ задает семейство прямых параллельных прямой $y = x$. Графики пересекаются в трех точках тогда и только тогда, когда прямая $y = x - a$ проходит через точку A или точку $C(0;1)$. Во всех остальных случаях количество точек пересечения графиков функций будет или больше, или меньше трех. Определим значения параметра a в первом и во втором случае. Пусть прямая $y = x - a$ проходит через точку $A(-0{,}5;0)$, тогда $0 = -\frac{1}{2} - a$, откуда $a = -\frac{1}{2}$. Если прямая $y = x - a$ проходит через точку $C(0;1)$, то $a = -1$.



Ответ: $a = -0{,}5$ или $a = -1$.

22.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\left|2|x| - a^2\right| = x - a$ имеет ровно три различных решений.

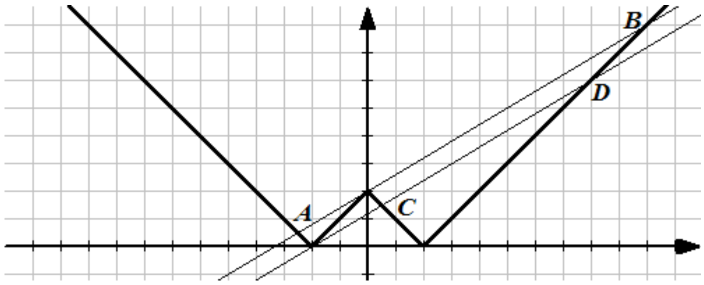
Указание. При $a = 0$ уравнение имеет один корень. При $a \neq 0$ построим график функции (см. график из примера 22.1) $f(x) = 2\left|2|x| - a^2\right|$, который имеет общие точки $\frac{a^2}{2}$ и $-\frac{a^2}{2}$ с осью x. Из семейства параллельных прямых $y = x - a$ нас интересуют только те, которые пересекают построенный график в трех точках. Таких прямых только две. Для одной прямой получаем условие $a = -\frac{a^2}{2}$, для другой прямой $-a = 2a^2$. Поскольку $a \neq 0$, то получаем ответ.

Ответ: $-2; -0{,}5$.

22.5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left||5x| - 10\right| = a + 3x$ имеет ровно три различные решения. Для каждого полученного значения a найдите все эти решения.

Решение. Поделим обе части уравнения на 5, $\left||x| - 2\right| = \frac{a}{5} + \frac{3x}{5}$.

Построим график функции $y = \left||x| - 2\right|$, содержащий части прямых с угловыми коэффициентами $k = 1$ или $k = -1$. Функция $y = \frac{a}{5} + \frac{3x}{5}$ задает семейство прямых с угловым коэффициентом $k = \frac{3}{5}$.



Условию задачи удовлетворяют два расположения прямой l: l_1 и l_2.

1) Так как прямая l_1 проходит через точку $(0; 2)$, то из уравнения прямой $y = \frac{a}{5} + \frac{3x}{5}$ получим $a = 10$. В этом случае уравнение прямой l_1 имеет вид: $y = \frac{3x}{5} + 2$. Найдем абсциссы точек пересечения A и B прямой l_1 с неподвижным графиком.

а) Для точки A решим уравнение $\frac{3x}{5} + 2 = -x - 2$, $x = -2{,}5$.

б) Для точки B решим уравнение $\frac{3x}{5} + 2 = x - 2$, $x = 10$.

2) Так как прямая l_2 проходит через точку $(-2; 0)$, то из уравнения прямой $y = \frac{a}{5} + \frac{3x}{5}$ получим $a = 6$. В этом случае уравнение прямой l_2 имеет вид: $y = \frac{3x}{5} + \frac{6}{5}$. Найдем абсциссы точек пересечения C и D прямой l_2 с неподвижным графиком.

а) Для точки C решим уравнение $\frac{3x}{5} + \frac{6}{5} = -x + 2$, $x = 0{,}5$.

б) Для точки D решим уравнение

$$\frac{3x}{5}+\frac{6}{5}=x-2,\quad x=8.$$

Ответ: при $a=10$ решения $x=-2{,}5;$ $x=0;$ $x=10;$

при $a=6$ решения $x=-2;$ $x=0{,}5;$ $x=8.$

22.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-\left|x^2+2x-3\right|-a\ .$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=x^2-\left|x^2+2x-3\right|.$

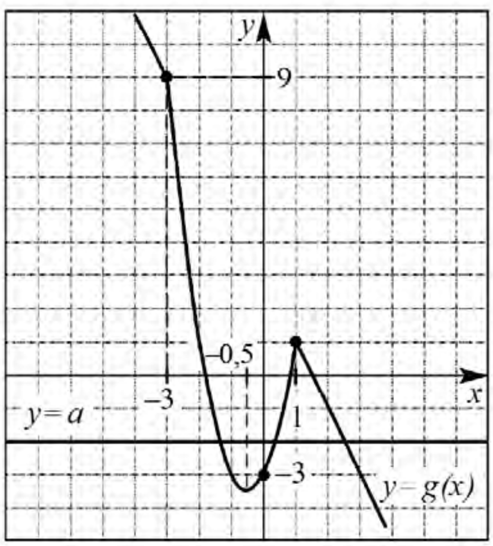


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех и более точках, если уравнение $g(x)=a$ имеет более двух различных корней.

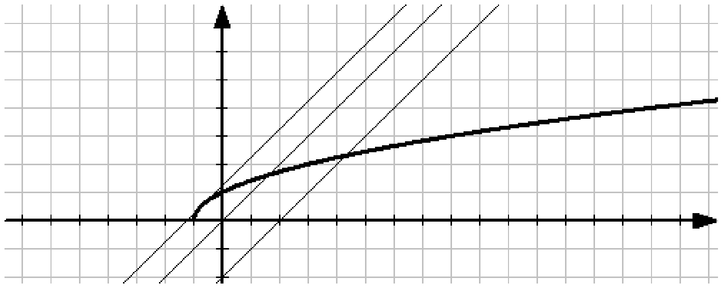
$$g(x)=\begin{cases}-2x+3,\ \textit{если}\ x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)\\ 2x^2+2x-3,\ \textit{если}\ x\in(-3;1)\end{cases}$$

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x)=a$ имеет более двух корней, только если $g\left(-\frac{1}{2}\right)<a<g(1),\ -3{,}5<a<1.$

Ответ: (–3,5;1).

22.8. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет единственное решение?

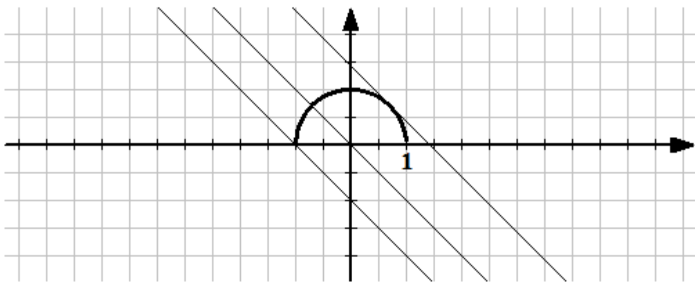
Решение. Построим график функции $y=\sqrt{x+1}$. Функция $y=x+a$ задает семейство прямых, параллельных прямой $y=x.$ При $a<1$ графики имеют одну общую точку. Еще один случай, когда графики имеют одну общую точку, прямая $y=x+a$ является касательной. Угловой коэффициент касательной равен 1. Так как $f'(x_0)=k,$ то получим уравнение $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=1$ для нахождения абсциссы x_0 точки касания. Из уравнения находим $x_0=-0{,}75$, а из уравнения $y=\sqrt{x+1}$ находим $y_0=0{,}5.$ Подставим координаты точки $(-0{,}75;0{,}5)$ в уравнение $y=x+a$, получим $a=1{,}25$.



Ответ: $a=1{,}25$ или $a<1.$

22.9. При каких значениях a неравенство $\sqrt{1-x^2}>a-x$ имеет решения?

Решение. График функции $y=\sqrt{1-x^2}$ или $x^2+y^2=1\ (y\geq 0)$ есть полуокружность.



Функция $y=a-x$ для каждого значения a задает прямую, которая с изменением a перемещается параллельно самой себе (с ростом a перемещается вверх).

Исходное неравенство будет выполняться до тех пор, пока точки окружности будут выше точек прямой, т.е. пока прямая не станет касательной к окружности. Это произойдет при $a=\sqrt{2}.$ Значение $a=\sqrt{2}$ можно найти и аналитически, если решить уравнение $\sqrt{1-x^2}=a-x,$ и после возведения в квадрат потребовать, чтобы дискриминант полученного квадратного уравнения был равен нулю.

Итак, при $a < \sqrt{2}$ данное неравенство имеет решения.

Ответ: $a < \sqrt{2}$.

22.11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = a \end{cases}$$

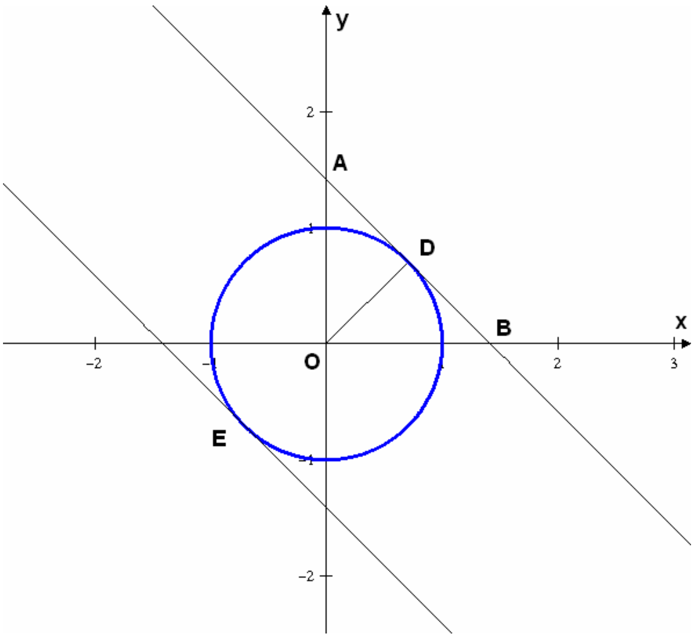
имеет единственное решение.

Решение. Изобразим в одной координатной плоскости графики, заданные уравнениями системы.

На рисунке видно, что система будет иметь единственное решение, если прямая $y = a - x$ касается окружности $x^2 + y^2 = 1$ и ее решениями будут координаты точек E и D.

Найдем значение a, при котором прямая касается окружности, для чего рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ODA (это действительно так, ибо прямая $y = -x$, а значит и прямая $y = a - x$, составляют с положительным направлением оси Ox угол в 45°). Так как $OD = AD = 1$, по теореме Пифагора получаем $a = OA = \sqrt{a}$.

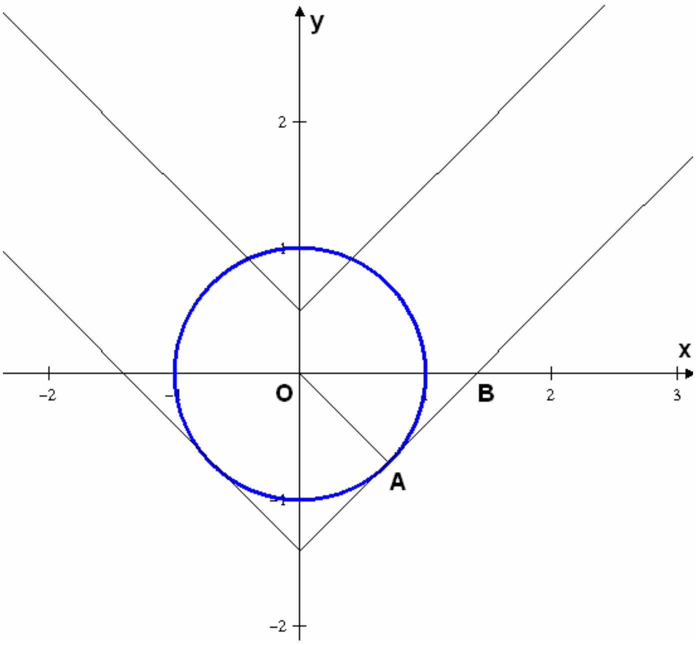
Тогда второе значение a, при котором прямая $y = a - x$ касается окружности $x^2 + y^2 = 1$, будет равно $\left(-\sqrt{2}\right)$.



Ответ: $a = \pm\sqrt{2}$.

22.12. Найдите значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Решение. Первое уравнение системы задает окружность радиуса 1 с центром (0; 0). Второе уравнение $y = |x| + a$ задает семейство «уголков» с вершиной на оси y.



$\angle AOB = 45^\circ$, $OA = AB = 1$, $OB = \sqrt{2}$, $a = -\sqrt{2}$.

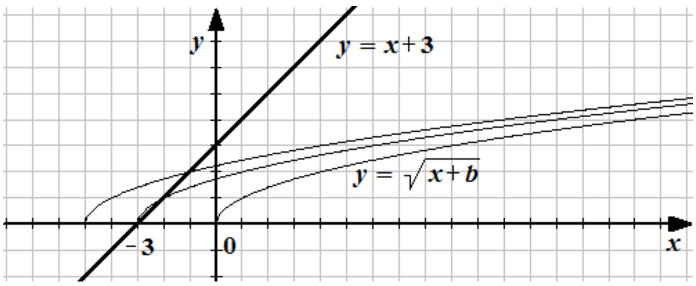
Из рисунка видно, что условию задачи удовлетворяют следующие значения $a \in \left\{-\sqrt{2}\right\} \cup (-1;1)$.

Ответ: $a \in \left\{-\sqrt{2}\right\} \cup (-1;1)$.

23. Параллельный перенос (вдоль оси x)

23.1. При каких значениях b уравнение $\sqrt{x+b} = x + 3$ имеет единственное решение?

Решение. Рассмотрим неподвижный график (прямую) функции $y = x + 3$ и семейство графиков, состоящих из полупарабол $y = \sqrt{x+b}$ с вершиной на оси x.



Если вершина полупараболы лежит левее точки $(-3;0)$, то точка пересечения одна. В этом случае $-b < -3$ или $b > 3$. Если вершина находится в точке $(-3;0)$, то имеется две точки пересечения. Тогда $b = 3$. Точек пересечения будет две до тех пор, пока прямая $y = x + 3$ не станет касательной к графику функции $y = \sqrt{x+b}$. Так как угловой коэффициент касательной равен 1, то найдем абсциссу точки касания из условия $y'(x_0) = 1$.

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0+b}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_0+b} = 0{,}5 \Leftrightarrow x_0 + b = 0{,}25 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = 0{,}25 - b\,.$$

Точка касания принадлежит прямой и полупараболе, поэтому $\sqrt{x_0+b} = x_0 + 3$ или $\sqrt{0{,}25-b+b} = 0{,}5 - b + 3$. Отсюда $b = 2{,}75$ и $x_0 = -2{,}5$, т.е. вершина параболы находится в точке $(-2{,}75;0)$. В этом случае точка пересечения графиков одна. При $b < 2{,}75$ точек пересечения графиков не будет.

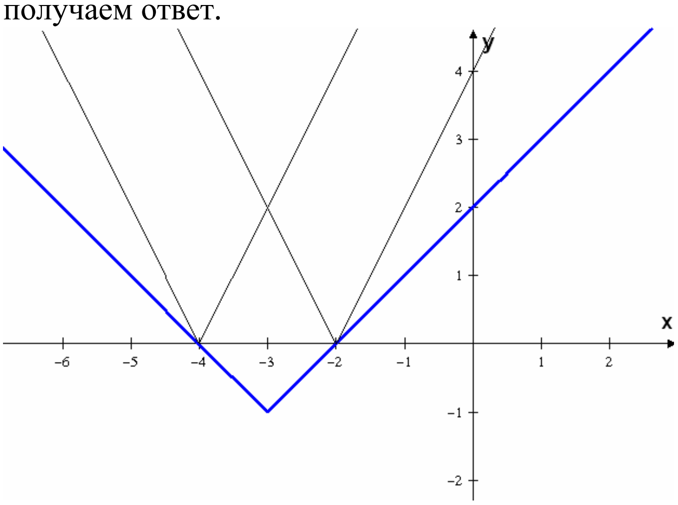
Ответ: $b = 2{,}75$; $b > 3$.

23.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$|2x-a|+1 = |x+3|$
имеет ровно один корень.

Решение. Перепишем уравнение $|2x-a| = |x+3|-1$. Функция $f(x) = |x+3|-1$ задает «уголок» с вершиной $(-3;-1)$, состоящий из лучей с угловыми коэффициентами 1 и -1.

Функция $g(x) = |2x-a|$ задает семейство уголков с вершиной на оси x, состоящий из лучей с угловыми коэффициентами 2 и -2. Условию задачи удовлетворяет два случая расположения графиков: если вершина движущегося уголка попадает в точку $(-4;0)$ или точку $(-2;0)$. Координаты этих точек удовлетворяют уравнению $g(x) = |2x-a|$.

Имеем $|-8-a| = 0$ или $|-4-a| = 0$. Отсюда получаем ответ.

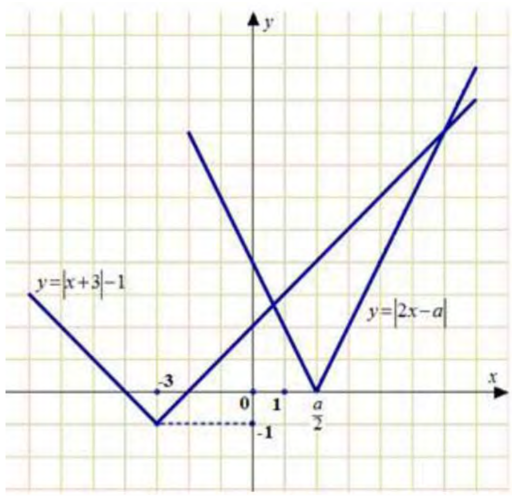


Ответ: -4; -8.

23.5. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства
$|2x-a|+1 \le |x+3|$ образуют отрезок длины 1.

Решение. Перепишем неравенство в следующем виде $|2x-a| \le |x+3|-1$.

Построим схематично графики функций $y = |2x-a|$ и $y = |x+3|-1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2} \le -4$ или $\frac{a}{2} \ge -2$.

$$1)\ \begin{cases} a \le -8 \\ |2x-a| \le -x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -8 \\ 2x-a \le -x-4 \\ 2x-a \ge x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a \le -8 \\ x \le \dfrac{a-4}{3} \\ x \ge a+4 \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-4}{3} - (a+4) = 1$, откуда $a = -\frac{19}{2}$.

$$2)\ \begin{cases} a \ge -4 \\ |2x-a| \le x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -4 \\ 2x-a \le x+2 \\ 2x-a \ge -x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

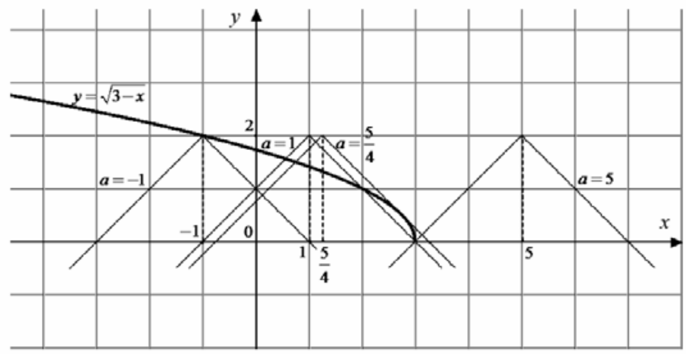
$$\begin{cases} a \ge -4 \\ x \le a+2 \\ x \ge \dfrac{a-2}{3} \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a + 2 - \frac{a-2}{3} = 1$, откуда $a = -\frac{5}{2}$.

Ответ: $a=-\frac{5}{2}$, $a=-\frac{19}{2}$.

23.7. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{3-x}+|x-a|\le 2$ является отрезок.

Указание. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{3-x}\le 2-|x-a|$, и нарисуем эскизы графиков функций, стоящих в левой и правой частях неравенства.



Рассматривая взаимное расположение графиков при разных значениях a, получаем:
$-1 < a < 1$ или $1{,}25\le a<5$.

Ответ: $(-1;1)\cup\left[\frac{5}{4};5\right)$.

23.9. Найдите все значения a, при которых уравнение
$a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$ имеет ровно одно решение. (МГУ, 1994)

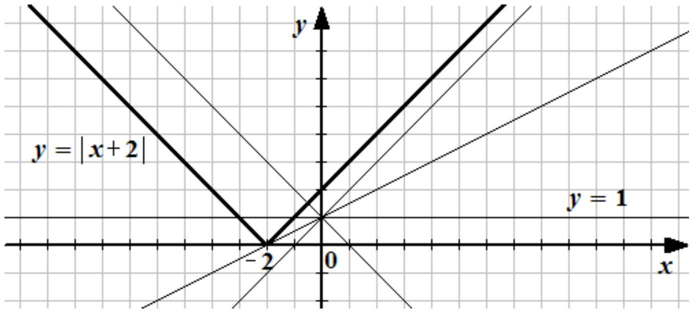
Указание. График левой части уравнения
$3-\sqrt{1-(x-3)^2}=a-\sqrt{1-(x-a)^2}$,
равносильного исходному, есть нижняя единичная полуокружность с центром в точке $(3;3)$, а график правой части – такая же полуокружность, но с центром $(a;a)$. Изменяя параметр в сторону возрастания, получим, что указанные графики впервые пересекаются, причем имеют единственную точку, при $a=2$. Эта ситуация сохраняется при дальнейшем увеличении a (кроме случая $a=3$, когда полуокружности сливаются) до значения $a=4$, а затем графики расходятся и не имеют общих точек.

Ответ: $[2;3)\cup(3;4]$.

24. Поворот

24.1. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x+2|=ax+1$?

Решение. Рассмотрим графики двух функций. Графиком функции $f(x)=|x+2|$ является «уголок» с вершиной в точке $(-2;0)$. Функция $g(x)=ax+1$ задает семейство прямых, проходящих через точку $(0;1)$. При изменении параметра a от $-\infty$ до $+\infty$ прямая $y=ax+1$ поворачивается по направлению против часовой стрелки между состояниями, близкими к вертикальным.



Из рисунка видно, что при $a=\pm1$ график функции $g(x)=ax+1$ параллелен одной из ветвей графика функции $f(x)=|x+2|$. Найдем значения a, при которых прямая $y=ax+1$ проходит через вершину графика $f(x)$. Подставим координаты точки $(-2;0)$ в уравнение $y=ax+1$, отсюда $a=0{,}5$.

Изменяя значения параметра a от $-\infty$ до $+\infty$, определяем соответствующее количество точек пересечения рассматриваемых графиков.

При $a\in(-\infty;-1]$ графики пересекаются в одной точке, значит, данное уравнение имеет один корень. Если $a\in(-1;0{,}5)$, то прямая $y=ax+1$ пересекает график $f(x)$ в двух точках, т.е. исходное уравнение имеет два корня. При $a=0{,}5$ уравнение имеет одно решение (общая точка $(-2;0)$). Если $a\in(0{,}5;1]$, то графики $f(x)$ и $g(x)$ не пересекаются, уравнение не имеет решений. При $a\in(1;+\infty)$ оба графика пересекаются в одной точке.
Ответ дадим в виде таблицы.

Значения параметра a	$(-\infty;-1]$	$(-1;0{,}5)$	0,5	$(0{,}5;1]$	$(1;+\infty)$
Число раз личных корней	1	2	1	0	1

Замечание. Если представить уравнение в виде $|x+2|-1=ax$, то можно было рассмотреть графики функций $f(x)=|x+2|-1$ и $g(x)=ax$.

Ответ: если $a\in(0{,}5;1]$, то нет решений; если $a\in(-\infty;-1]\cup\{0.5\}\cup(1;+\infty)$ - одно решение; при $a\in(-1;0.5)$ - два решения.

24.3. Найдите значения параметра a, при котором уравнение $|x^2-5x+6|=ax$ имеет ровно три различных решения.

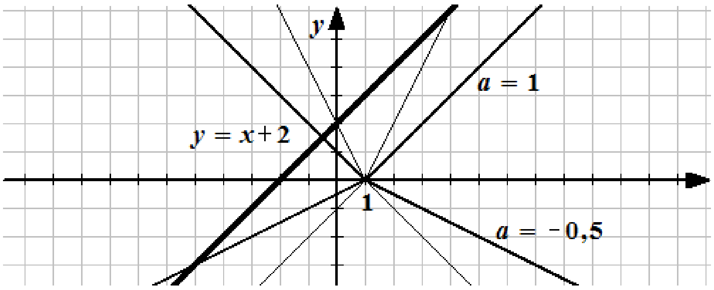
Решение. Построим график функции $y=|x^2-5x+6|$. Функция $y=ax$ задает семейство прямых, проходящих через начало координат (пучок прямых с центром (0; 0)). Условию задачи удовлетворяет прямая l, касающаяся неподвижного графика функции $f(x)=-x^2+5x-6$ на промежутке (2; 3) в точке $C(x_0;y_0)$. Составим уравнение касательной. Так как $f(x_0)=-x_0^2+5x_0-6$, $f'(x_0)=-2x_0+5$, то $y=-x_0^2+5x_0-6+(-2x_0+5)(x-x_0)$ или $y=x_0^2-6+x(5-2x_0)$. Так как касательная проходит через начало координат, то получаем $0=x_0^2-6$, $x_0=\pm\sqrt{6}$, $x_0=\sqrt{6}$ $(x_0\in(2;3))$.

Искомое значение параметра $a=f'(x_0)=-2\cdot\sqrt{6}+5$.

Ответ: $5-2\sqrt{6}$.

24.6. При каких значениях параметра a уравнение $x+2=a|x-1|$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Решение. Построим графики обеих частей исходного уравнения. График функции $f(x)=x+2$ - есть прямая (неподвижный график). Функция $g(x)=a|x-1|$ задает семейство «уголков» с вершиной в точке $(1;0)$. Если $a>0$, то ветви «уголка» направлены вверх, при $a<0$ - вниз. При $a=1$ или $a=-1$ одна из ветвей «уголка» параллельна прямой $y=x+2$.



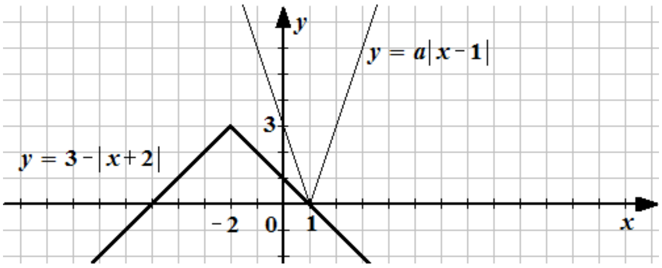
Исследуем изменение параметра a от $-\infty$ до $+\infty$. Из рисунка видно, что при $a\le-1$ графики обеих частей исходного уравнения не пересекаются, т.е. уравнение не имеет решений. При $-1<a\le1$ уравнение имеет одно решение, это абсцисса точки пересечения графика функции $f(x)=x+2$ с левой ветвью графика функции $g(x)=a|x-1|$, т.е. с той, для которой $x<1$ и, следовательно, исходное уравнение принимает вид $x+2=a(1-x)$. Отсюда $x=\dfrac{a-2}{a+1}$. При $a>1$ оба графика пересекаются в двух точках.

Ответ: при $-1<a\le1$ уравнение имеет единственное решение, $x=\dfrac{a-2}{a+1}$.

24.8. Выясните, при каких значениях a уравнение $|x+2|+a|x-1|=3$: (*)

а) имеет единственный корень и найти его;
б) имеет ровно два корня и найти их;
в) имеет бесконечное множество корней.

Решение. Запишем уравнение (*) в виде
$a|x-1|=3-|x+2|$ (**)
и построим графики функций $y=3-|x+2|$ и $y=a|x-1|$.



Из рисунка видно, что при любом $a \in \boldsymbol{R}$ графики указанных функций имеют общую точку $(1;0)$ и поэтому число $x_1 = 1$ - корень уравнения $(*)$.

а) Пусть $|a| > 1$, тогда графики функций имеют единственную общую точку $(1;0)$, а число $x_1 = 1$ - корень уравнения $(*)$.

б) Пусть $|a| < 1$, тогда графики имеют общую точку с абсциссой $x_2 < -2$. Так как $|x-1| = 1 - x$, $|x+2| = -x-2$ при $x < -2$, то x_2 - корень уравнения $3 + x + 2 = a(1-x)$, т.е. $x_2 = \dfrac{a-5}{a+1}$.

в) Пусть $a = 1$, тогда графики совпадают на отрезке $[-2;1]$ и поэтому каждое значение $x \in [-2;1]$ - корень уравнения $(*)$.

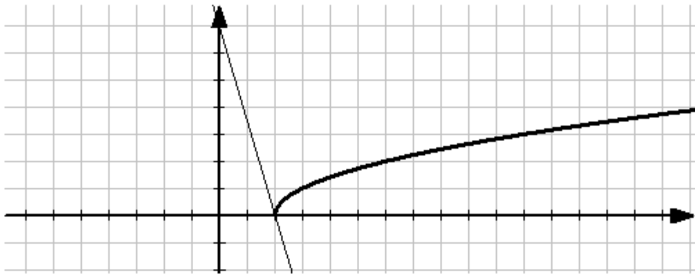
Если $a = -1$, то графики совпадают при $x \geq 1$, поэтому значения $x \in [1;+\infty)$ - корни уравнения $(*)$.

Ответ: а) $|a| > 1$, $x = 1$; б) $|a| < 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{a-5}{a+1}$; в) $a = 1$ и $a = -1$.

24.9. При каких значениях параметра a уравнение $6\sqrt{x-2} = ax + 7$ имеет единственное решение?

Решение. На рисунке построены графики функций $y = 6\sqrt{x-2}$ и $y = ax + 7$. При изменении значения параметра a прямая $y = ax + 7$ поворачивается вокруг точки (0; 7). Зафиксируем три положения этой прямой: (1), (2), (3).

Прямая (1) проходит через точку (2; 0), прямая (2) параллельна оси Ox, прямая (3) касается графика функции $y = 6\sqrt{x-2}$.



Отметим, что прямой (1) ответствует значение $a = -3{,}5$, прямой (2) - $a = 0$. Как видно из рисунка, искомыми значениями параметра являются те, которым соответствуют прямые, лежащие между прямыми (1) и (2), а также прямая (3). Иначе говоря, искомыми являются значения параметра, лежащие в промежутке $a \in [-3{,}5;0]$ и, кроме того, значение a, при котором прямая $y = ax + 7$ является касательной к кривой $y = 6\sqrt{x-2}$. Найдем это значение параметра a. Пусть x_0 - абсцисса точки касания, тогда можно заключить, что имеют место два числовых равенства:

$$\begin{cases} 6\sqrt{x_0 - 2} = ax_0 + 7 \\ 6 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x_0 - 2}} = a \end{cases}$$

Эта система выражает два факта: то, что в точке x_0 равны значения самих функций $y = 6\sqrt{x-2}$ и $y = ax + 7$, а также то, что равны и их производные.

Выразив из второго уравнения системы a и подставив в первое уравнение, будем иметь:

$$6\sqrt{x_0 - 2} = \frac{3x_0}{\sqrt{x_0 - 2}} + 7 \qquad (*)$$

Сделаем замену $\sqrt{x_0 - 2} = t_0$. Равенство $(*)$, записанное через t_0, будет иметь вид

$$6t_0 = \frac{3(t_0^2 + 2)}{t_0} + 7.$$

Это последнее равенство, в свою очередь, можно переписать в виде $3t_0^2 - 7t_0 - 6 = 0$, которое имеет решения $t_0 = 3$ и $t_0 = -2/3$. Так как значение $t_0 = -2/3$ не удовлетворяет условию, остается $t_0 = 3$, откуда следует, что $x_0 = 11$, $a = 1$.

Ответ: $a \in [-3{,}5;0]$; $a = 1$.

24.11. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y + a = ax^2 \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Решение. Изобразим графики уравнений в одной системе координат (рис.?).

Из геометрических соображений видно, что система будет иметь наибольшее число решений (пять точек), если вершина параболы будет находиться в точке *B*, а ее ветви будут направлены вниз или, если вершина параболы будет находиться в точке *D*, а ее ветви будут направлены вверх. Такие ситуации возможны, если a соответственно равно (–2) или 2.

Ответ: $-2; 2$.

24.12. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + |x-1| = 0$ имеет три решения?

Решение. Если $a = 0,$ то уравнение имеет один корень $x = 1,$ что не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \neq 0.$ Перепишем данное уравнение в следующем виде: $ax^2 = -|x-1|.$ Уравнение будет иметь решение только при $a < 0.$

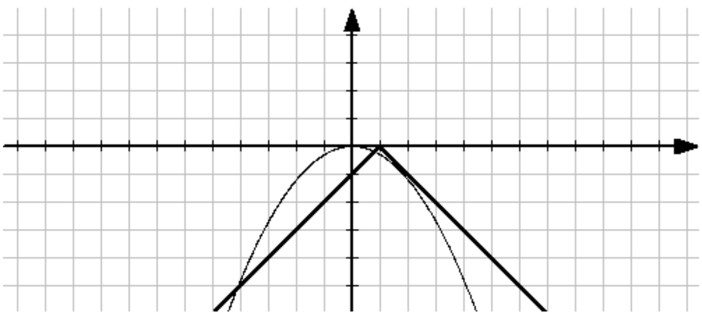


График функции $y = -|x-1|$ - «уголок» с вершиной в точке (1;0), ветви которого направлены вниз. Графиком функции $y = ax^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Вершина параболы – точка (0;0).

Уравнение будет иметь три решения только тогда, когда прямая $y = -x+1$ будет касательной к графику функции $y = ax^2$. Пусть x_0 - абсцисса точки касания прямой $y = -x+1$ с параболой $y = ax^2$.

Уравнение касательной имеет вид $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0).$

Запишем условия касания: $\begin{cases} y'(x_0) = -1, \\ ax_0^2 = -x_0 + 1; \end{cases}$

$\begin{cases} 2ax_0 = -1, \\ ax_0^2 = -x_0 + 1; \end{cases}$ откуда $x_0 = 2,\ a = -\dfrac{1}{4}.$

Ответ: при $a = -\dfrac{1}{4}.$

24.13. Определите, при каких значениях параметра b при любых значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y + 4 = 0 \\ y + ax + ab = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения $(x; y)$. (МГУ, 2006)

Указание. Первое уравнение системы задает окружность

$\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = \dfrac{45}{4},$ а второе – прямую $y = -a(x+b),$ проходящую через точку $(-b; 0),$ не лежащую на одной горизонтали с центром $\left(\dfrac{5}{2}; -3\right)$ окружности. Следовательно, для того чтобы при любом значении углового коэффициента a такая прямая пересекала данную окружность ровно в двух различных точках, необходимо и достаточно, чтобы точка $(-b; 0)$ лежала внутри окружности, т.е. выполнялось неравенство

$$\left(-b - \frac{5}{2}\right)^2 + (0+3)^2 < \frac{45}{4}.$$

Ответ: $(-4; -1)$.

24.14. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(4;8]$ значение выражения $\log_2^2 x - 8$ не равно значению выражения $(2a-1)\log_2 x.$

Решение. 1). Пусть $\log_2 x = t,$ тогда при $x = 4$ имеем $t = 2$; если $x = 8$, то $t = 3$. Так как функция $t = \log_2 x$ непрерывная и возрастающая, то при всех значениях переменной x из промежутка (4;8] переменная t принимает все значения из промежутка (2;3].

2). Переформулируем задачу: найдите все значения a, для которых при каждом t из промежутка (2;3] значение выражения $t^2 - 8$ не равно значению выражения $(2a-1)t.$

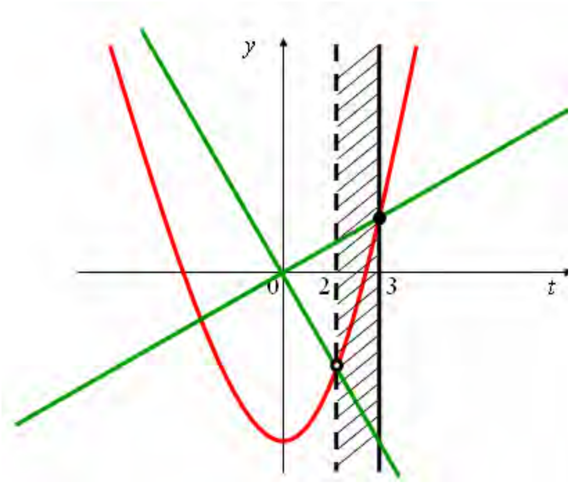
3). Графиком функции $y = t^2 - 8$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Функция $y = (2a-1)t$ задает семейство прямых, проходящих через начало координат.

При увеличении углового коэффициента прямая поворачивается против часовой стрелки.

4). Парабола пересекает прямую $t = 2$ в точке (2;–4): $y = 2^2 – 8 = –4$. В этом случае угловой

коэффициент прямой $y=(2a-1)t$, проходящей через точку (2;–4), равен:
$2a-1=-2$. Парабола пересекает прямую $t=3$ в точке (3;1): $y=32-8=1$. В этом случае угловой коэффициент прямой $y=(2a-1)t$, проходящей через точку (3;1), равен:
$2a-1=\frac{1}{3}$.
5). Условие «значение выражения t^2-8 не равно значению выражения $(2a-1)t$ при $t\in(2;3]$» графически означает, что прямая $y=(2a-1)t$ не пересекает параболу на промежутке $(2;3]$. Это выполняется при условиях

$$\left[\begin{array}{l}2a-1\le -2\\ 2a-1>\frac{1}{3}\end{array}\right.$$



Решая совокупность неравенств, получаем ответ.

Ответ: $a\le -\frac{1}{2}$, $a>\frac{2}{3}$.

25. Гомотетия

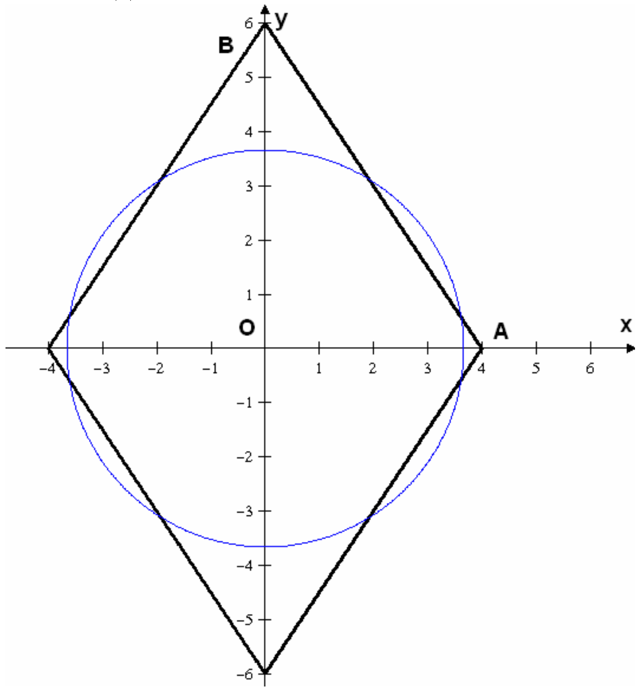
25.1. При каких действительных значениях параметра a система

$$\begin{cases}3|x|+2|y|=12\\ x^2+y^2=a\end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Решение. Уравнение $3|x|+2|y|=12$ задает ромб, точка пересечения диагоналей которого – начало координат (0;0), $OA=4$, $OB=6$.

Данная система имеет наибольшее число решений, когда окружность $x^2+y^2=a$ пересекает каждую сторону ромба в двух точках. Это возможно тогда, когда радиус этой окружности ($r=\sqrt{a}$) больше половины его меньшей диагонали.



Рассмотрим треугольник AOB: $h=OB\cdot\frac{OA}{AB}$,
где $OA=4$, $OB=6$, $AB=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$,
$h=\frac{12\sqrt{13}}{13}$.

Значит, $\frac{12\sqrt{13}}{13}<\sqrt{a}<4$ или $\frac{144}{13}<a<16$.

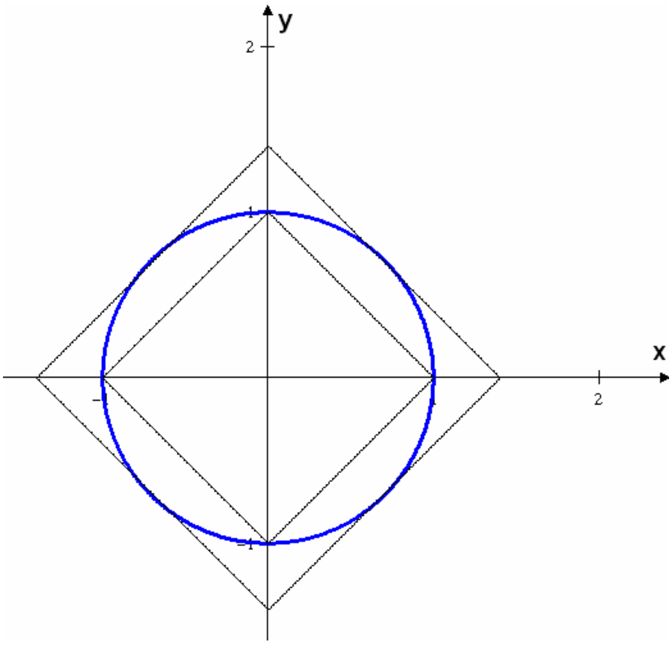
Ответ: $a\in\left(\frac{144}{13};16\right)$.

25.4. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ |x|+|y|=a\end{cases}$$

в зависимости от значений параметра a?

Решение. Отметим, что при $a<0$ второе уравнение не имеет решений. Если $a=0$, то второе уравнение имеет решение (0;0), но оно не является решением первого уравнения. Пусть $a<0$. Графиком первого уравнения системы является окружность с центром (0;0) и радиуса 1. Второе уравнение задает семейство гомотетичных квадратов с центром гомотетии (0;0).



Если квадрат находится внутри окружности, то система не имеет решений. Когда квадрат окажется вписанным в окружность $(a=1)$, система будет иметь четыре решения. При $a=\sqrt{2}$ квадрат будет описанным около окружности и решений системы станет опять четыре. Если брать промежуточные значения $a\in(1;\sqrt{2})$, то каждая сторона квадрата имеет две общие точки с окружностью, а значит, система будет иметь восемь решений. При $a>\sqrt{2}$ система решений не имеет.

Ответ: если $a<1$ или $a>\sqrt{2}$, то нет решений; если $a=1$ или $a=\sqrt{2}$, то решений четыре; если $1<a<\sqrt{2}$, то решений восемь.

25.5. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+64-16x}+\sqrt{x^2+y^2+36+12y}=10\\ x^2+y^2=a^2\end{cases}$$

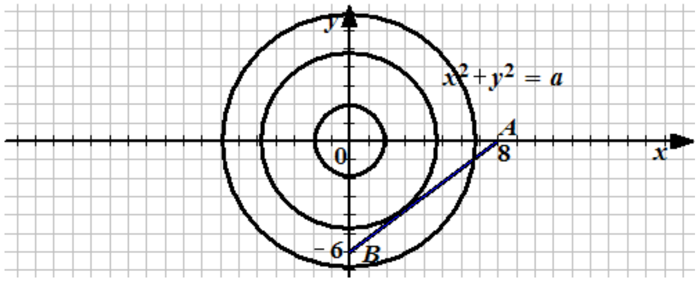
$(*)$

имеет единственное решение.

Решение. Первому уравнению системы $(*)$ удовлетворяют координаты точки $M(x;y)$ такой, что сумма расстояний от точки M до точек $A(8;0)$ и $B(0;-6)$ равна 10.

Так как расстояние AB равно 10, то точка M должна принадлежать отрезку AB (в противном случае сумма указанных расстояний была бы больше 10 согласно свойству сторон треугольника).

Итак, первому уравнению системы $(*)$ удовлетворяют координаты точек отрезка AB и только эти точки.



Второму уравнению системы $(*)$ удовлетворяют координаты точек окружности радиуса $|a|$ с центром $O(0;0)$. Эта окружность имеет с отрезком AB единственную общую точку в следующих случаях:

а) окружность касается отрезка AB; в этом случае $|a|=h$, где $h=\dfrac{6\cdot 8}{10}=\dfrac{24}{5}$;

б) окружность пересекает отрезок AB в одной точке; в этом случае ее радиус должен быть больше катета OB, но не превышать катета OA прямоугольного треугольника OAB, т.е. $6<|a|\le 8$.

Ответ: $-8\le a<-6,\ a=\pm\dfrac{24}{5},\ 6<a\le 8.$

25.6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}8xy-25=0,\\ x^2=y+2x\end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2+y^2\le a^2$.

Решение. Из второго уравнения системы выразим $y=x^2-2x$ и подставим в первое уравнение. Получим уравнение $8x^3-16x^2-25=0$. После замены $2x=t$ перейдем к приведенному уравнению $t^3-4t^2-25=0$. Среди делителей числа -25 легко находим корень $t=5$. Из разложения $(t-5)(t^2+t+5)=0$ следует, что приведенное уравнение других корней не имеет. Далее $2x=5,\quad x=2{,}5$ и $y=2{,}5^2-2\cdot 2{,}5=1{,}25$. Таким образом, данная система имеет единственное решение $(2{,}5;1{,}25)$.

Неравенство $x^2+y^2\le a^2$ задает круг с центром (0;0) и радиуса $|a|$. Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно выполнение условия $a^2\ge OM^2$, где $O(0;0)$ и $M(2{,}5;1{,}25)$. Так как $OM^2=2{,}5^2+1{,}25^2=7{,}8125=(1{,}25\sqrt{5})^2$, то из неравенства $a^2 \ge (1{,}25\sqrt{5})^2$ или $|a| \ge 1{,}25\sqrt{5}$ получаем решения.

Ответ: $(-\infty;-1{,}25\sqrt{5}] \cup [1{,}25\sqrt{5};+\infty)$.

25.7. Найдите все значения параметра a, при которых количество корней уравнения $(2{,}5-a)x^3-2x^2+x=0$ равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a$ и $y=3-|x-1|$.

Решение. Уравнение $(2{,}5-a)x^3-2x^2+x=0$ при любом значении a равносильно совокупности уравнений $x=0$ и $(2{,}5-a)x^2-2x+1=0$.

А) Исследуем второе уравнение.

1) Если $a=2{,}5$, то получаем линейное уравнение, которое имеет один корень $x=0{,}5$ (исходное уравнение – два различных корня).

2) Если $a \ne 2{,}5$, то имеем квадратное уравнение, дискриминант которого равен $D_1=1-(2{,}5-a)=a-1{,}5$.

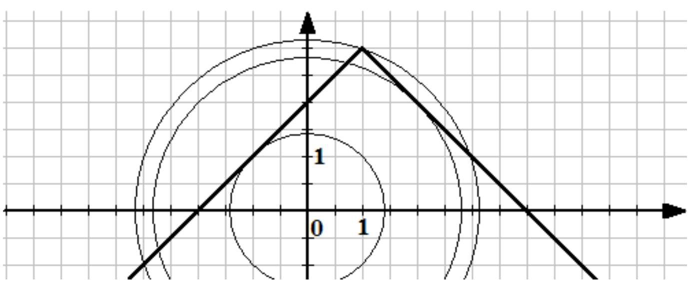
а) $D_1=0$ при $a=1{,}5$. Квадратное уравнение имеет один корень $x=1$ (исходное уравнение – два различных корня).

б) $D_1>0$ при $a>1{,}5$ (учтем, что $a \ne 2{,}5$). Квадратное уравнение имеет два различных корня, отличных от нуля (исходное уравнение – три различных корня)

в) $D_1<0$ при $a<1{,}5$. Квадратное уравнение не имеет корней (исходное уравнение имеет один корень).

Б) Исследуем систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ y=3-|x-1|. \end{cases}$

При $a \le 0$ система не имеет решений. Пусть $a>0$. Первое уравнение системы при $a>0$ задает семейство окружностей с центром (0;0) и радиуса $r=\sqrt{a}$ $(r^2=a)$. Второе уравнение системы задает неподвижный уголок с вершиной (1;3), состоящий из частей прямых с угловыми коэффициентами $k=1$ или $k=-1$.



1) Окружность имеет одну общую точку с неподвижным графиком (касается с частью прямой $y=x+2$), если радиус $r=\sqrt{2}$, тогда $a=(\sqrt{2})^2=2$. При $a<2$ нет общих точек.

2) Если окружность касается с другой частью прямой $y=4-x$, то радиус окружности $r=2\sqrt{2}$ и $a=8$. В этом случае окружность с уголком имеет три общих точки. При $a \in (2;8)$ - две общие точки.

3) Пусть окружность проходит через вершину уголка. Радиус такой окружности равен $r=\sqrt{10}$, $a=10$. В этом случае графики имеют три общие точки. При $a \in (8;10)$ - четыре общие точки, при $a>10$ - две общие точки.

Исследуя количество корней данного уравнения и количество общих точек данных линий (количество решений системы), получаем ответ.

Ответ: $\{2{,}5; 8; 10\}$.

26. Уравнения

26.1. Найдите число различных решений уравнения $|x^2+2x-3|=a$ в зависимости от параметра a.

Решение. Построим график функции $y=|x^2+2x-3|$. Характеристическими точками графика являются точки $A(1;0)$, $B(-3;0)$ и $C(-1;4)$. Уравнение $|x^2+2x-3|=a$ имеет столько различных решений, сколько раз прямая $y=a$ пересекает график функции $y=|x^2+2x-3|$.

Из рисунка видно, что:

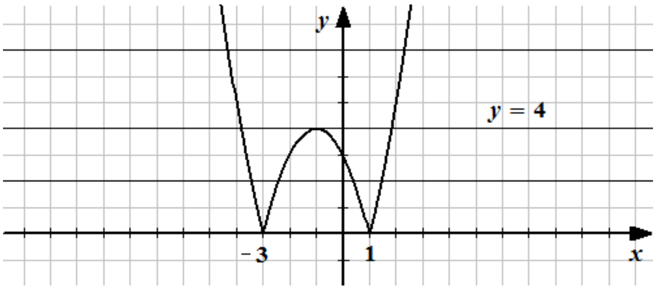
если $a<0$, то графики не имеют общих точек, т.е. нет решения;

если $a=0$, то графики имеют две общие точки (A и B), т.е. данное уравнение имеет два решения;

если $0<a<4$, то графики пересекаются в четырех точках – что дает четыре решения;

если $a=4$, то графики имеют три общие точки, т.е. исходное уравнение имеет три решения;

если $a>4$, то графики имеют две общие точки и заданное уравнение имеет два решения.



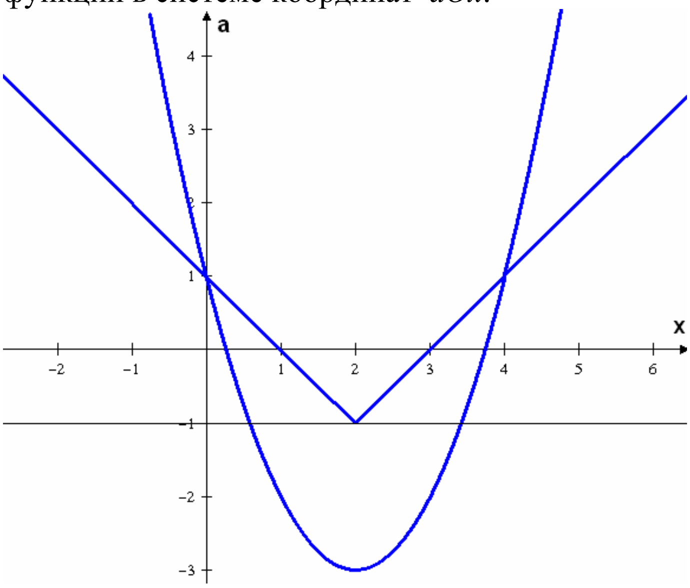
Ответ: нет решений, если $a < 0$; два решения, если $a = 0$ или $a > 4$; три решения, если $a = 4$; четыре решения, если $0 < a < 4$.

26.2. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$$

имеет ровно три различных корня.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $a = x^2 - 4x + 1$ и $a = |x - 2| - 1$. Построим графики полученных функций в системе координат aOx.



Из рисунка видим, что условию задачи удовлетворяет одно значение $a = -1$.

Ответ: $a = -1$.

26.3. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a.$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Указание. Переформулируем задачу: найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

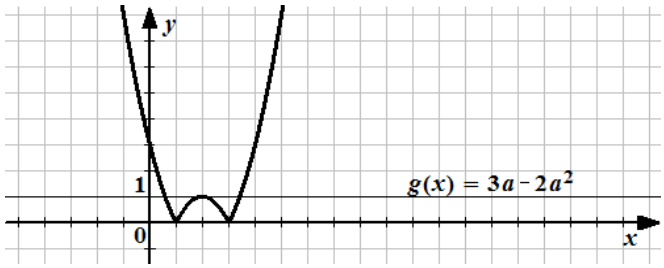
$$x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a = 0.$$

имеет более чем два решения.

Ответ: (–3,5;1).

26.7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x^2 - 4x + 3| = 3a - 2a^2$ имеет ровно три различных корня.

Решение. Определим, при каких значениях параметра a графики функций $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ и $g(x) = 3a - 2a^2$ имеют ровно три общих точки на координатной плоскости xOy.



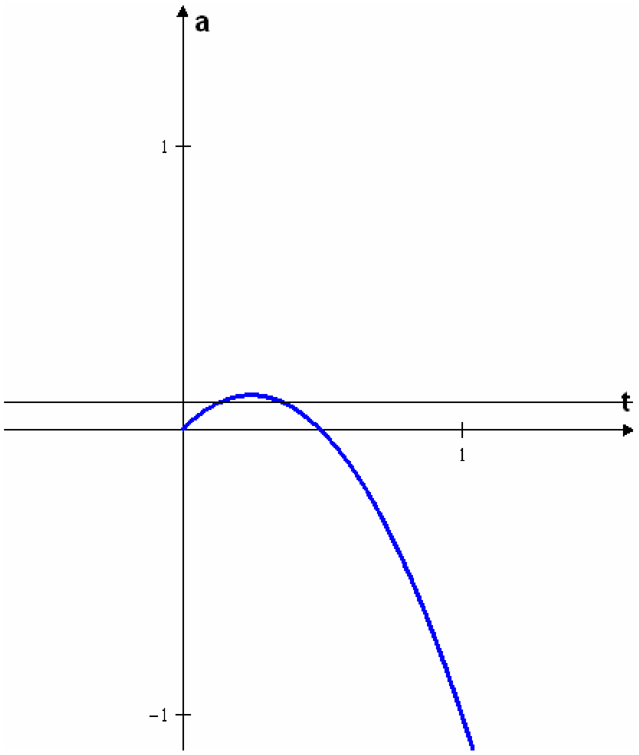
По графику видно, что требованию задачи отвечает случай $3a - 2a^2 = 1$. Отсюда $a = 0{,}5$ или $a = 1$.

Замечание. При решении такого типа задач полезно разобрать сразу все возможные случаи наличия корней в данном уравнении и необходимые для этого условия.

Ответ: $a = 0{,}5$ или $a = 1$.

26.9. При каких значениях a уравнение $2\log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$ имеет четыре различных корня?

Решение. Сделав замену $|\log_3 x| = t$, где $t \geq 0$, получим уравнение $2t^2 - t + a = 0$, которое должно иметь два различных положительных корня. Построим график функции $a = -2t^2 + t$, где $t > 0$. Координаты вершины параболы $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{8}\right)$.



Из рисунка видим, что прямые $a = const$ пересекают график в двух точках при $a \in \left(0; \frac{1}{8}\right)$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right)$.

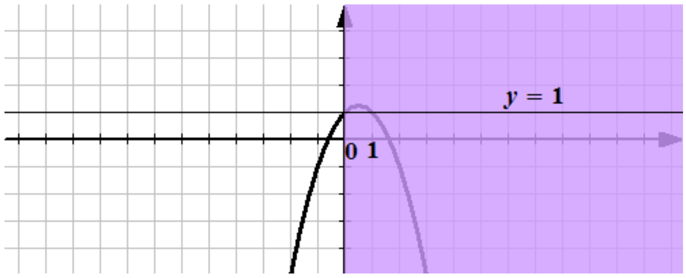
26.10. Найдите все значения p, при которых уравнение $7 - 2\cos x = p\left(1 + tg^2 x\right)$ имеет хотя бы один корень.

Указание. Сделав замену $\cos x = t$, где $t \in [-1;0) \cup (0;1]$, приведите уравнение к виду $p = -2t^3 + 7t^2$.

Ответ: $(0;9]$.

26.11. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1} = x + a$ имеет единственное решение?

Решение. После замены $\sqrt{x+1} = t$ имеем квадратное уравнение $t^2 - t + a - 1 = 0$, где $t \geq 0$. Перепишем уравнение в виде $-t^2 + t + 1 = a$. Рассмотрим неподвижный график функции $y = -t^2 + t + 1$, где $t \geq 0$ и семейство прямых $y = a$, параллельных оси t. Найдем координаты вершины параболы $(0{,}5; 1{,}25)$. Графики будут пересекаться в одной точке при $a = 1{,}25$ или $a < 1$.



Ответ: $a = 1{,}25$ или $a < 1$.

27. Неравенства (метод областей)

27.1. Найдите все значения a, при которых неравенство $\log_a\left(x^2 + 4\right) > 1$ выполняется для всех значений x. (МГУ, 2005)

Решение. Используя метод рационализации, заменим данное неравенство равносильной системой

$$\begin{cases} (a-1)\left(x^2 + 4 - a\right) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

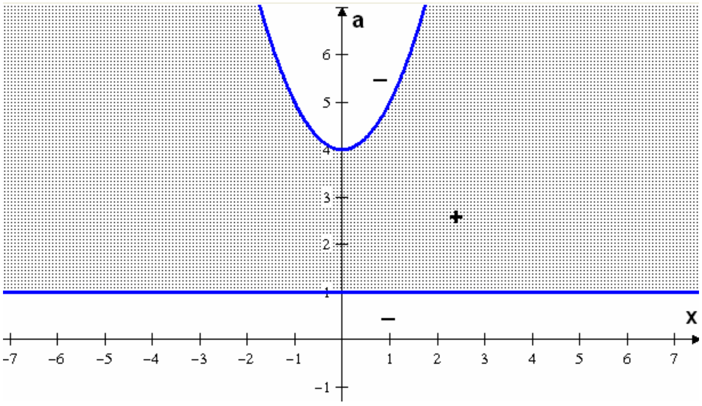
Для решения первого неравенства системы используем метод областей.

1) Обозначим $F(x;a) = (a-1)\left(x^2 + 4 - a\right)$.

2) Для выражения $F(x;a)$ переменные x и a принимают любые значения.

3) $F(x;a) = 0$, $(a-1)\left(x^2 + 4 - a\right) = 0$, отсюда $a = 1$ или $a = x^2 + 4$.

4) Имеем прямую и параболу, которые разбивают координатную плоскость на области, в каждой из которых выражение $F(x;a)$ сохраняет знак. Возьмем контрольную точку $(0;0)$: $F(0;0) = -4 < 0$. Ставим знак минус в области, содержащей точку $(0;0)$. В остальных областях расставляем знаки, используя правило знакочередования. Множество точек, координаты которых удовлетворяют первому неравенству системы, выделены цветом. Условия $a > 0$, $a \neq 1$ учтены. Проводя прямые, параллельные оси x, видим, что полностью прямые находятся в заштрихованной области при $a \in (1;4)$.



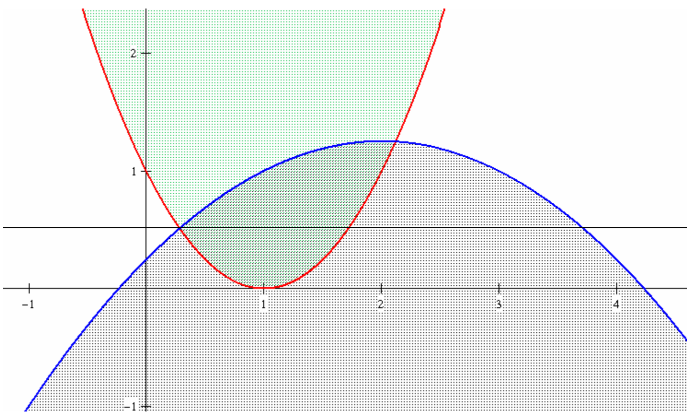
Замечание. Для данного примера линии на рисунке должны бать штриховыми, а не сплошными.

Ответ: $(1;4)$.

27.6. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $x^2-2x\le a-1$ и $x^2-4x\le 1-4a$ образуют на числовой оси отрезок длины единица.

Решение. Считая переменную a зависимой от переменной *x*, перепишем неравенства в следующем виде: $a\ge x^2-2x+1$ и $a\le -\frac{1}{4}x^2+x+\frac{1}{4}$. Графическое решение первого неравенства в системе координат xOa представляет множество точек, лежащих выше параболы или на ней, для второго неравенства – не выше соответствующей параболы. Общая часть и есть графическое решение данных неравенств с двумя переменными.

Решая каждое из квадратных уравнений $x^2-2x+1-a=0$ и $x^2-4x+4a-1=0$, получаем, что каждая из парабол состоит из двух полупарабол (уравнения корней) $x=1-\sqrt{a}$ или $x=1+\sqrt{a}$ и $x=2-\sqrt{5-4a}$ или $x=2+\sqrt{5-4a}$.



Область решений ограничена либо графиками функций $x=1-\sqrt{a}$ и $x=1+\sqrt{a}$, либо $x=1+\sqrt{a}$ и $x=2-\sqrt{5-4a}$.

Согласно условию задачи имеем

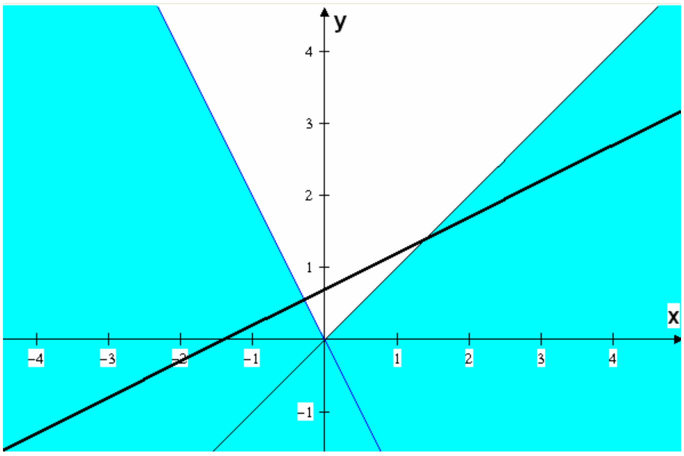
$$\left[\begin{array}{l}1+\sqrt{a}-\left(1-\sqrt{a}\right)=1\\ 1+\sqrt{a}-\left(2-\sqrt{5-4a}\right)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sqrt{a}=1\\ \sqrt{5-4a}=2-\sqrt{a}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{1}{4}\\ a=1.\end{array}\right.$$

Ответ: $a=\frac{1}{4}$ или $a=1$.

27.8. (2010) Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $y+2x\ge a$ и $y-x\ge 2a$ являются решениями неравенства $2y-x>a+3$.

Решение. Первые два неравенства $y\ge -2x+a$ и $y\ge x+2a$ задают на координатной плоскости угол с вершиной $\left(-\frac{a}{3};\frac{5a}{3}\right)$. Чтобы все точки угла полностью принадлежали множеству решений неравенства $y>\frac{x}{2}+\frac{a+3}{2}$ (верхняя полуплоскость) необходимо и достаточно принадлежности вершины угла. Имеем $\frac{5a}{3}>-\frac{a}{6}+\frac{a+3}{2}$, отсюда $a>\frac{9}{8}$.



Ответ: $a>\frac{9}{8}$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Графики функций и уравнений

1.1. Прямая на плоскости

• Уравнение $px+qy+r=0$, где p,q,r - действительные числа и $p^2+q^2\neq 0$, задает на координатной плоскости прямую линию.

• Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=kx+b$.

• Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$$

• Уравнение прямой в отрезках на осях:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (a\neq 0,\ b\neq 0)$$

1.2. Две прямые на плоскости

• Взаимное расположение двух прямых

$$y=k_1x+b_1 \quad \text{и} \quad y=k_2x+b_2$$

а) совпадающие:

$$\begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$$

б) параллельные:

$$\begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1\neq b_2 \end{cases}$$

в) пересекающиеся: $k_1\neq k_2$

г) перпендикулярные: $k_1k_2=-1$.

• Взаимное расположение двух прямых

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \text{и} \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

а) совпадающие:

$$\begin{cases} a_1b_2=a_2b_1 \\ a_1c_2=a_2c_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

б) параллельные:

$$\begin{cases} a_1b_2=a_2b_1 \\ a_1c_2\neq a_2c_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

в) пересекающиеся:

$$a_1b_2\neq a_2b_1 \quad \text{или} \quad \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

г) перпендикулярные:

$$a_1a_2+b_1b_2=0 \quad \text{или} \quad \frac{a_1}{b_1}=-\frac{b_2}{a_2}.$$

• Пусть коэффициенты уравнений системы

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

отличны от нуля. Тогда:

1) чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1};$$

2) чтобы система имела бесконечно много решений, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1};$$

3) чтобы система не имела решений, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}\neq\frac{c}{c_1}.$$

Случай, когда коэффициенты равны нулю, нужно рассматривать отдельно.

• Уравнение $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$, где $a_i^2+b_i^2\neq 0 \quad (i=1;2)$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости две пересекающиеся прямые.

• Уравнение $|a_1x+b_1y+c_1|=|a_2x+b_2y+c_2|$, где $a_i^2+b_i^2\neq 0 \quad (i=1;2)$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости две пересекающиеся прямые.

• Уравнение $|a_1x+b_1y+c_1|=a_2x+b_2y+c_2$, где $a_i^2+b_i^2\neq 0 \quad (i=1;2)$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости угол.

• Уравнение $|ax+by+c|=m$, где $m>0$ и $a^2+b^2\neq 0$, задает на координатной плоскости пару параллельных прямых.

1.3. Окружность (эллипс)

• Уравнение $(x-m)^2+(y-n)^2=a^2$ задает на координатной плоскости окружность радиуса $R=|a|$ с центром в точке $C(m;n)$ при $a\neq 0$; если $a=0$, то это сама точка C.

• Уравнение $(x-m)^2+(y-n)^2=a$ задает на координатной плоскости окружность радиуса $R=\sqrt{a}$ с центром в точке $C(m;n)$ при $a>0$; если $a=0$, то это сама точка C; если $a<0$, то пустое множество.

• Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

с центром в точке $C(m;n)$ и полуосями a и b $(a>0,\ b>0)$.

1.4. Парабола

• Функция $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ задает параболу с вершиной в точке $C(x_{в}; y_{в})$.

• Функция $y = a(x-m)^2 + n \quad (a \neq 0)$ задает параболу с вершиной в точке $C(m; n)$.

• Каноническое уравнение параболы:

$$(y-n)^2 = 2p(x-m).$$

• Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.

1) Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \qquad (*)$$

не имеет решений тогда и только тогда, когда $D < 0$.

2) Квадратное уравнение $(*)$ имеет

а) два различных корня тогда и только тогда, когда $D > 0$;

б) два (может быть кратных) корня тогда и только тогда, когда $D \geq 0$.

3) Квадратное уравнение $(*)$ имеет

а) два корня $x_1 < M < x_2$ тогда и только тогда, когда $a \cdot f(M) < 0$;

б) два корня $x_1 = M < x_2$ или $x_1 < M = x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(M) = 0 \\ x_{в} > M \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(M) = 0 \\ x_{в} < M \end{cases}$$

4). Квадратное уравнение $(*)$ имеет

а) два (может быть кратных) корня $x_1,\ x_2 > M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(M) > 0 \\ x_{в} > M \end{cases}$$

б) два разных корня $x_1,\ x_2 > M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0 \\ a \cdot f(M) > 0 \\ x_{в} > M \end{cases}$$

в) два (может быть кратных) корня $x_1,\ x_2 \geq M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(M) \geq 0 \\ x_{в} \geq M \end{cases}$$

г) единственное решение $x_1 = x_2 > M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D = 0 \\ x_{в} > M \end{cases}$$

5). Квадратное уравнение $(*)$ имеет

а) два (может быть кратных) корня $x_1,\ x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(M) > 0 \\ x_{в} < M \end{cases}$$

б) два разных корня $x_1,\ x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0 \\ a \cdot f(M) > 0 \\ x_{в} < M \end{cases}$$

в) два (может быть кратных) корня $x_1,\ x_2 \leq M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(M) \geq 0 \\ x_{в} \leq M \end{cases}$$

г) единственное решение $x_1 = x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D = 0 \\ x_{в} < M \end{cases}$$

6). Квадратное уравнение $(*)$ имеет

а) корни $x_1 < m < M < x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0 \\ a \cdot f(M) < 0 \end{cases}$$

б) корни $x_1 = m < M < x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(m) = 0 \\ a \cdot f(M) < 0 \end{cases}$$

в) корни $x_1 < m < M = x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0 \\ f(M) = 0 \end{cases}$$

7). Квадратное уравнение $(*)$ имеет

а) корни $x_1 < m < x_2 < M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0 \\ a \cdot f(M) > 0 \end{cases}$$

б) корни $m < x_1 < M < x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot f(m) > 0 \\ a \cdot f(M) < 0 \end{cases}$$

8). Квадратное уравнение (∗) имеет один корень внутри интервала $(m;M)$, а другой расположен вне этого интервала тогда и только тогда, когда

$$f(m)\cdot f(M)<0.$$

9). Квадратное уравнение (∗) имеет

а) разные корни $m<x_1<x_2<M$ или (может быть) кратные корни $m<x_1\le x_2<M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D>0 \\ a\cdot f(m)>0 \\ a\cdot f(M)>0 \\ m<x_в<M \end{cases} \text{ или } \begin{cases} D\ge 0 \\ a\cdot f(m)>0 \\ a\cdot f(M)>0 \\ m<x_в<M \end{cases}$$

б) разные корни $m\le x_1<x_2<M$ или (может быть) кратные корни $m\le x_1\le x_2<M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D>0 \\ a\cdot f(m)\ge 0 \\ a\cdot f(M)>0 \\ m<x_в<M \end{cases} \text{ или } \begin{cases} D\ge 0 \\ a\cdot f(m)\ge 0 \\ a\cdot f(M)>0 \\ m\le x_в<M \end{cases}$$

в) разные корни $m<x_1<x_2\le M$ или (может быть) кратные корни $m<x_1\le x_2\le M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D>0 \\ a\cdot f(m)>0 \\ a\cdot f(M)\ge 0 \\ m<x_в<M \end{cases} \text{ или } \begin{cases} D\ge 0 \\ a\cdot f(m)>0 \\ a\cdot f(M)\ge 0 \\ m<x_в\le M \end{cases}$$

г) разные корни $m\le x_1<x_2\le M$ или (может быть) кратные корни $m\le x_1\le x_2\le M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D>0 \\ a\cdot f(m)\ge 0 \\ a\cdot f(M)\ge 0 \\ m<x_в<M \end{cases} \text{ или } \begin{cases} D\ge 0 \\ a\cdot f(m)\ge 0 \\ a\cdot f(M)\ge 0 \\ m\le x_в\le M \end{cases}$$

1.5. Гипербола

• Уравнение $(x-m)(y-n)-k=0$ при $k\ne 0$ задает на координатной плоскости семейство гипербол $y=\dfrac{k}{x-m}+n$ с центром симметрии $C(m;n)$ и асимптотами $x=m$ и $y=n$.

• Функция $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $c\ne 0$ и $ad-bc\ne 0$, задает на координатной плоскости гиперболу.

• Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\right)$$

1.6. Параллелограмм

• Уравнение $|a_1x+b_1y+c_1|+|a_2x+b_2y+c_2|=m$, где $m>0$ и $a_i^2+b_i^2\ne 0$ $(i=1;2)$, $\dfrac{a_1}{a_2}\ne\dfrac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости параллелограмм.

• «Уравнение ромба в отрезках»:

$$\frac{|x|}{k}+\frac{|y|}{l}=1, \text{ где } k>0,\ l>0.$$

• Уравнение квадрата: $|x|+|y|=k$, где $k>0$.

2. Преобразование графиков

• Если график функции $y=f(x)$ построен, то

1. График функции $y=f(x-a)$ может быть получен переносом графика функции $y=f(x)$ на a единиц вправо, если $a>0$; на a единиц влево, если $a<0$.

2. График функции $y=f(x)+b$ может быть получен переносом графика функции $y=f(x)$ на b единиц вверх, если $b>0$; на b единиц вниз, если $b<0$.

3. График функции $y=f(kx)$ может быть получен из графика функции $y=f(x)$ сжатием в k раз к оси y, если $k>1$; растяжением в $\dfrac{1}{k}$ раз, если $0<k<1$; преобразованием симметрии относительно оси y, если $k=-1$.

4. . График функции $y=m\cdot f(x)$ может быть получен из графика функции $y=f(x)$ растяжением от оси x, если $m>1$; сжатием к оси x, если $0<m<1$; преобразованием симметрии относительно оси x, если $m=-1$.

5. Для построения графика функции $y=f(|x|)$ надо:

а) стереть все точки графика функции $y=f(x)$, лежащие слева от оси y;

б) оставить на месте все точки графика функции, лежащие на оси y и справа от нее;

в) отобразить правую часть графика симметрично относительно оси y.

6. График функции $y = |f(x)|$ получается из графика $y = f(x)$ следующим образом:
а) все точки графика $y = f(x)$, лежащие на оси x и выше ее, остаются на месте;
б) все точки графика $y = f(x)$, лежащие ниже оси x, симметрично отображаются относительно оси x.

- График уравнения $f(x-m; y) = 0$ получается из графика уравнения $f(x; y) = 0$ переносом на m единиц вправо, если $m > 0$; на m единиц влево, если $m < 0$.
- График уравнения $f(x; y-n) = 0$ получается из графика уравнения $f(x; y) = 0$ переносом на n единиц вверх, если $n > 0$; на n единиц вниз, если $n < 0$.
- Графики уравнений $f(x; y) = 0$ и $f(-x; y) = 0$ симметричны относительно оси y.
- Графики уравнений $f(x; y) = 0$ и $f(x; -y) = 0$ симметричны относительно оси x.
- График уравнения $f(kx; y) = 0$ получается из графика уравнения $f(x; y) = 0$ сжатием вдоль оси x в k раз, если $k \geq 1$ (при $0 < k < 1$ получаем растяжение в $1/k$ раз).
- График уравнения $f(x; ky) = 0$ получается из графика уравнения $f(x; y) = 0$ сжатием вдоль оси y в k раз, если $k \geq 1$ (при $0 < k < 1$ получаем растяжение в $1/k$ раз).

3. Решение неравенств с двумя переменными

3.1. Графическое решение неравенств

Неравенство с двумя переменными x и y $f(x; y) > \varphi(x; y)$ можно записать в виде

$$F(x; y) > 0, \qquad (1)$$

где $f(x; y), \varphi(x; y), F(x; y)$ - многочлены с указанными переменными. Неравенства, содержащие неизвестные, могут быть и другого вида:

$$F(x; y) < 0, F(x; y) \geq 0, F(x; y) \leq 0.$$

Решением неравенства (1) называется упорядоченная пара действительных чисел $(x_0; y_0)$, обращающая это неравенство в верное числовое неравенство. Графически это соответствует заданию точки $(x_0; y_0)$ координатной плоскости. Решить неравенство – значит, найти множество всех его решений. Совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству (1), называется *областью* его *решений*.

Неравенства называются *равносильными*, если они имеют одну и ту же область решений.

Полезно будет напомнить здесь одно простое утверждение: график уравнения $F(x; y) = y - f(x) = 0$, где $f(x)$ - многочлен, делит координатную плоскость на две области так, что при переходе из одной области в другую значение выражения $F(x; y)$ меняет знак на противоположный.

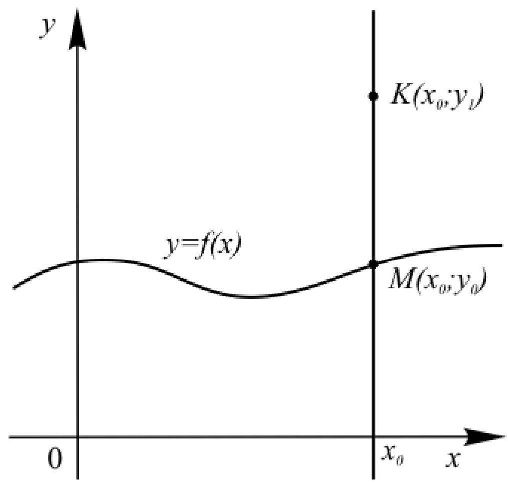


Рис. 1

Действительно, если взять любую точку (рис. 1), лежащую выше графика, то ее ордината будет больше, чем ордината точки, имеющей такую же абсциссу, но лежащей на графике. То есть множество точек плоскости, расположенных выше графика, будет геометрическим изображением решения неравенства $y > f(x)$, т.е. $F(x; y) > 0$. Для точек, лежащих ниже графика, имеет место неравенство $F(x; y) < 0$.

Аналогично можно сформулировать утверждение для графика уравнения $F(y; x) = x - \varphi(y) = 0$, где $\varphi(y)$ - многочлен.

Многочлен можно заменить на элементарную функцию. Например, для выражений

$$F(x; y) = y - \log_2 x \text{ и } F(x; y) = y - \frac{k}{x} \quad (k > 0)$$

на рисунках 2 и 3 соответственно представлены решения неравенства $F(x; y) \geq 0$.

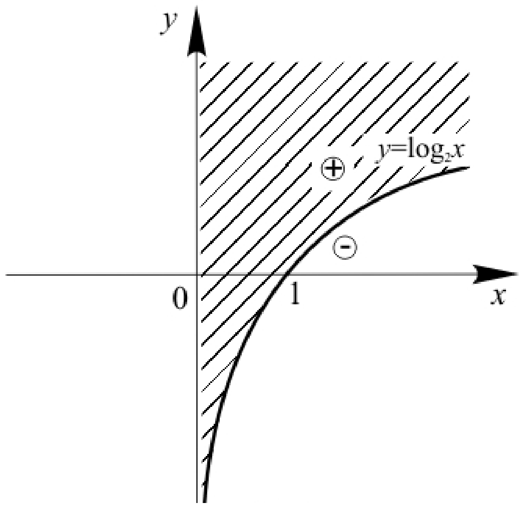


Рис. 2

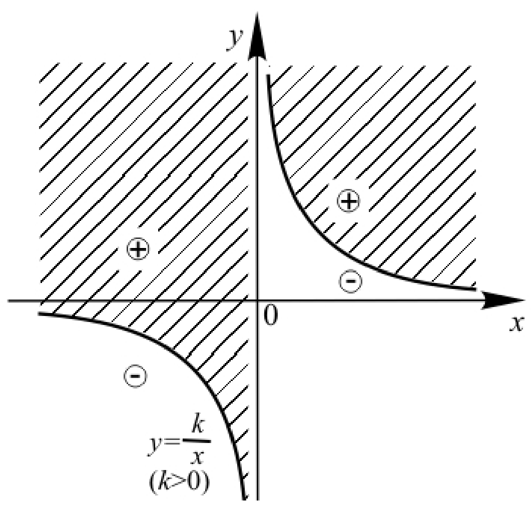


Рис. 3

Указанные утверждения удобно использовать, если в неравенстве удается выразить переменную y (или x) в явном виде, то есть уединить эту переменную в одной из частей неравенства. Ниже будут рассмотрены неравенства (уравнения), в которых переменная y (или x) задана в неявном виде.

3.2. Области знакопостоянства линейного многочлена $F(x;y) = px + qy + r$

Уравнение $px+qy+r=0$, где $p^2+q^2 \neq 0$, задает прямую линию. Геометрической интерпретацией решения линейного неравенства с двумя переменными является следующая теорема.

Теорема 1. Прямая $px+qy+r=0$, где $p^2+q^2 \neq 0$, разбивает координатную плоскость на две открытые полуплоскости так, что координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют неравенству $px+qy+r>0$, а другой - неравенству $px+qy+r<0$.

Исходя из теоремы 1, можно сформулировать свойство чередования знака для линейного многочлена

$$\Phi(x;\, y) = px+qy+r \quad (p^2+q^2 \neq 0):$$

при переходе через точку прямой $px+qy+r=0$ *из одной полуплоскости в другую знак значения многочлена* $\Phi(x;\ y)$ *меняется на противоположный.*

● Если прямые $F_1(x;y)=a_1x+b_1y+c_1=0$ и $F_2(x;y)=a_2x+b_2y+c_2=0$ пересекаются, то каждая из систем неравенств

$$\begin{cases} F_1 \geq 0 \\ F_2 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 \geq 0 \\ F_2 \leq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 \leq 0 \\ F_2 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 \leq 0 \\ F_2 \leq 0, \end{cases}$$

задает на координатной плоскости множество внутренних точек угла, включая границы (сделайте рисунок и рассмотрите все возможные случаи). Например, совокупность $\left[\begin{array}{l} F_1 < 0 \\ F_2 < 0, \end{array}\right.$ соответствующая системе неравенств $\begin{cases} F_1 \geq 0 \\ F_2 \geq 0, \end{cases}$ задает оставшуюся часть, исключая границы (координатную плоскость с «вырезанным» углом). Аналогичные утверждения верны и для других пар систем и совокупностей неравенств. Другими словами, в алгебре указанные совокупность и система неравенств являются логическими отрицаниями друг друга, а на координатной плоскости им соответствующие множества точек являются дополнениями друг друга до всей плоскости.

● Неравенство $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2) \leq 0$ (или $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2) \geq 0$), где $a_i^2+b_i^2 \neq 0 \quad (i=1;2)$, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости множество внутренних точек вертикальных углов, включая границы.

3.3. Метод областей и его обобщения

● Рассмотрим выражение

$$F(x;y) = F_1(x;y) \cdot F_2(x;y) \cdot \ldots \cdot F_n(x;y), \qquad (2)$$

где $F_i(x;y) = p_ix+q_iy+r_i$, причем прямые $p_ix+q_iy+r_i=0$ и $p_jx+q_jy+r_j=0$ попарно различны $(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n; i \neq j)$.

Выражению (2) соответствует разбиение

плоскости на области прямыми линиями $p_i x + q_i y + r_i = 0$ $(i = 1,2,...,n)$. Точки пересечения прямых будем называть *особыми точками* границы области, другие точки - *обыкновенными*. Метод областей опирается на следующее свойство чередования знака выражения (2): *при переходе через обыкновенную точку прямой* $p_i x + q_i y + r_i = 0$ *(границы области) из одной области в смежную знак значения выражения (2) меняется на противоположный.*

Действительно, при переходе через прямую линию $p_i x + q_i y + r_i = 0$ в выражении (2) меняет знак только один множитель $p_i x + q_i y + r_i$.

Пример 1. Решите графически неравенство $(y+x)(x-y-1)(x+2) \geq 0$.

Решение. На координатной плоскости *xOy* строим сплошными линиями график уравнения $(y+x)(x-y-1)(x+2) = 0$, состоящий из трех прямых $y = -x$, $y = x - 1$ и $x = -2$ (рис.4). Многочлену $F(x;y) = (y+x)(x-y-1)(x+2)$ соответствует разбиение плоскости $(x;y)$ на семь областей. Возьмем пробную точку (3;0) и определим знак значения выражения $F(x;y)$ в этой точке: $F(3;0) = 30$; 30 > 0. Ставим знак плюс в области, содержащей точку (3;0). Далее, используя свойство чередования знака выражения $F(x;y)$ вида (2), расставляем знаки в остальных областях. Нумерация областей на рисунке показывает последовательность их обхода (последовательность обхода может быть и другой). Выбираем области, содержащие знак плюс и решения уравнения $F(x;y) = 0$.

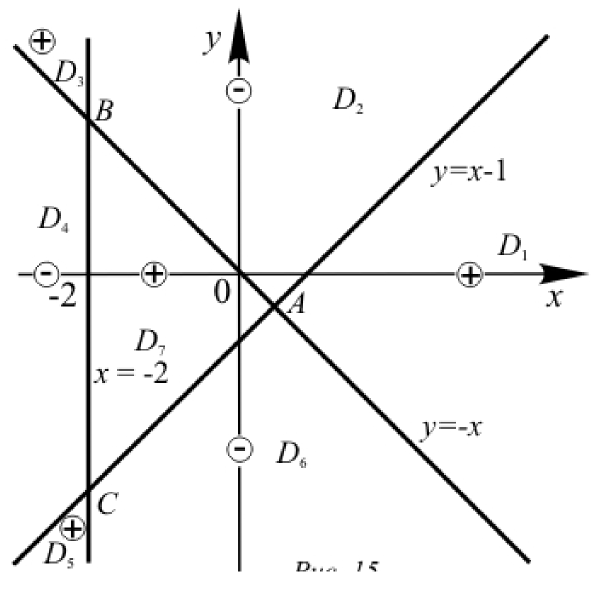


Рис. 4

- Пусть дано выражение вида

$F(x;y) = F_1^{k_1}(x;y) \cdot F_2^{k_2}(x;y) ... F_n^{k_n}(x;y)$ (3)

где $F_i(x;y) = p_i x + q_i y + r_i$, причем прямые $p_i x + q_i y + r_i = 0$ и $p_j x + q_j y + r_j = 0$ попарно различны $(i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n; i \neq j)$. $k_1, k_2, ..., k_n$ - фиксированные натуральные числа и выражению $F(x;y)$ соответствует разбиение плоскости на области.

Для решения неравенства (1), где выражение $F(x;y)$ имеет вид (3), используется *обобщенный метод областей,* который опирается на следующее правило чередования знака выражения: *при переходе через обыкновенную точку прямой* $p_i x + q_i y + r_i = 0$ *(границы области) из одной области в смежную знак значения выражения (3) меняется на противоположный, если* k_i *- нечетное число, и не меняется, если* k_i *- четное число.*

Далее показано другое обобщение метода областей, связанное с заменой в выражениях вида (2) или (3) линейных многочленов $F_i(x;y)$ на нелинейные многочлены с известными областями знакопостоянства.

3.4. Области знакопостоянства многочленов *F(x; y)* второй степени

Рассмотрим кривые второго порядка: эллипс (в частности, окружность), гиперболу, параболу.

Теорема 2. Окружность $(x-m)^2 + (y-n)^2 = R^2$ (с центром в точке *A(m;n)* и радиуса $R > 0$) делит координатную плоскость на две части так, что координаты точек, лежащих вне окружности, удовлетворяют неравенству $(x-m)^2 + (y-n)^2 > R^2$, а расположенных внутри окружности – неравенству $(x-m)^2 + (y-n)^2 < R^2$.

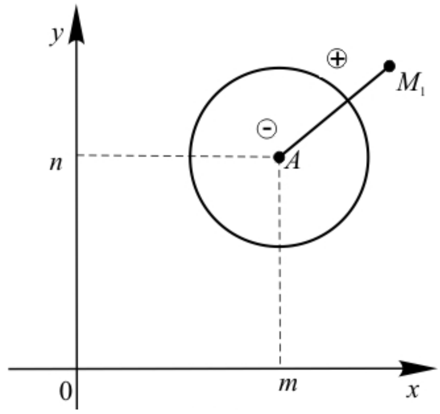


Рис. 5

Теорема 3. Эллипс, заданный каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, делит координатную плоскость на две части так, что координаты точек, лежащих вне эллипса, удовлетворяют неравенству $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$, а расположенных внутри эллипса – неравенству $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$.

Для эллипса $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ аналогично формулируется утверждение о знакочередовании значения выражения
$F(x;y)=\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}-1$.

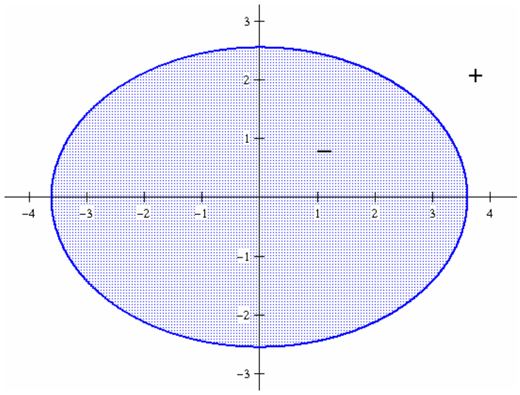


Рис. 6

Отсюда как следствие вытекает теорема 2.

Теорема 4. Гипербола $xy-k=0$ $(k\neq 0)$ делит координатную плоскость на три области так, что при переходе из одной области в смежную выражение $F(x;y)=xy-k$ меняет знак на противоположный.

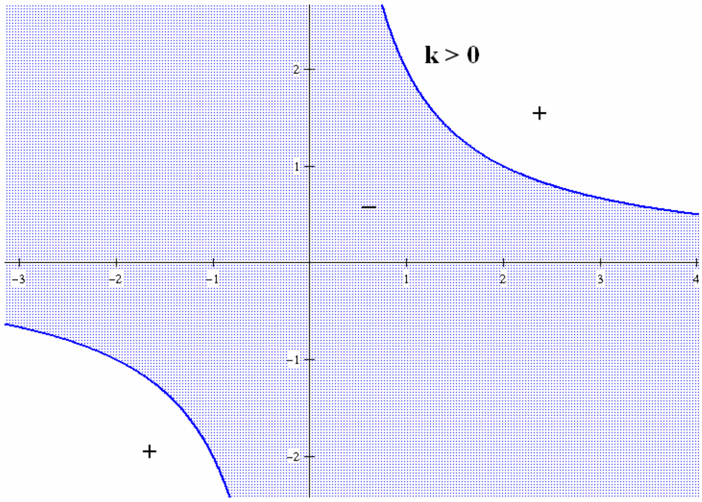


Рис. 7

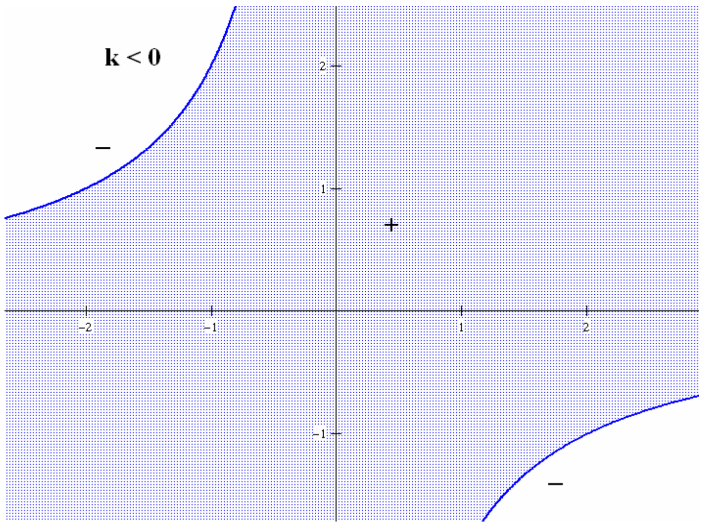


Рис. 8

Аналогичное свойство знакочередования формулируется для гиперболы
$(x-m)(y-n)-k=0 \quad (k\neq 0)$.

Сравните расположение знаков выражений $F(x;y)=y-\frac{k}{x}$ и $F(x;y)=xy-k$ для одного и того же графика на координатной плоскости (рис. 3 и 7).

Теорема 5. Гипербола, заданная каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\right)$, делит координатную плоскость на три области так, что при переходе из одной области в смежную значение выражения

$$F(x;y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1 \quad \left(F(x;y)=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-1\right)$$

меняет знак на противоположный.

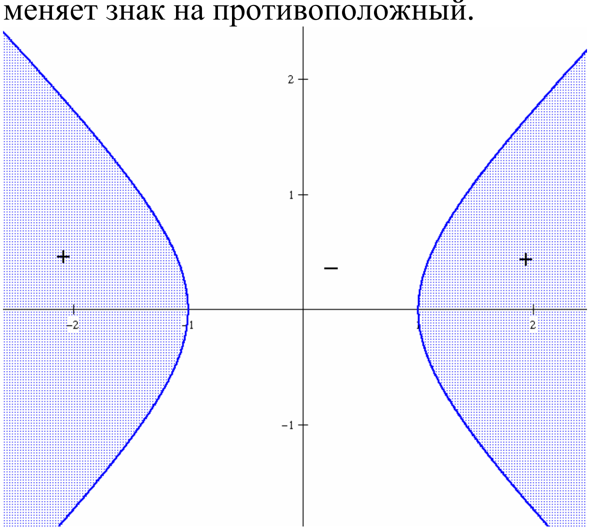


Рис. 9

Аналогичное свойство формулируется для гипербол

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1 \text{ и } \frac{(y-n)^2}{b^2}-\frac{(x-m)^2}{a^2}=1.$$

Теорема 6. Парабола, заданная каноническим уравнением $y^2=2px$ ($p>0$ или $p<0$), делит координатную плоскость на две области так, что при переходе из одной области в другую значение выражения $F(x;y)=y^2-2px$ меняет знак на противоположный.

Аналогичное свойство формулируется для параболы $(y-n)^2=2p(x-m)$.

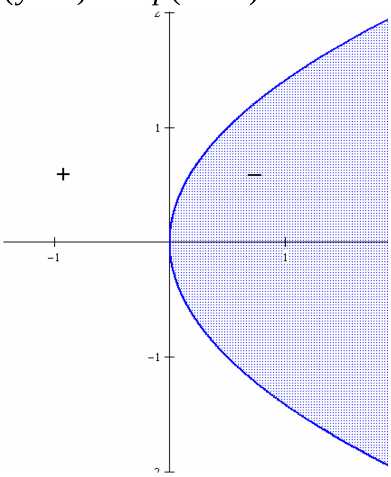


Рис. 10

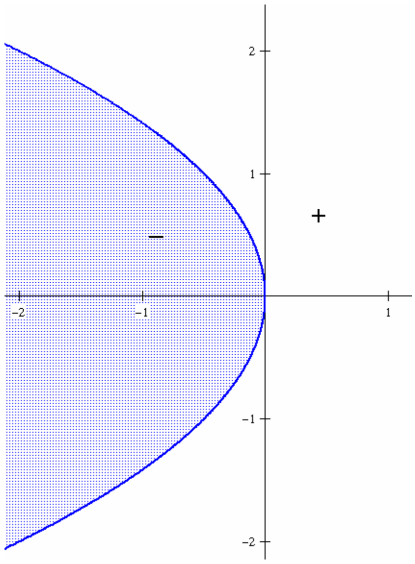


Рис. 11

3.5. Области знакопостоянства выражений, содержащих знак модуля

Для решения неравенств с двумя переменными, содержащих знак модуля, обычно разбивают координатную плоскость на отдельные области так, чтобы на каждой из них можно было записать неравенство, не используя знака абсолютной величины.

В некоторых случаях удобно использовать известные области знакопостоянства выражений с модулями.

Теорема 7. Ромб, заданный уравнением $\frac{|x|}{k}+\frac{|y|}{l}=1$, где $k>0, l>0$, делит координатную плоскость на две части так, что координаты точек, лежащих вне ромба, удовлетворяют неравенству $\frac{|x|}{k}+\frac{|y|}{l}>1$, а расположенных внутри ромба – неравенству $\frac{|x|}{k}+\frac{|y|}{l}<1$(сравните с уравнением и графиком эллипса в теореме 3).

По аналогии с существующей терминологией «уравнение прямой в отрезках», уравнение $\frac{|x|}{k}+\frac{|y|}{l}=1$, где $k>0, l>0$, можно назвать «уравнением ромба в отрезках».

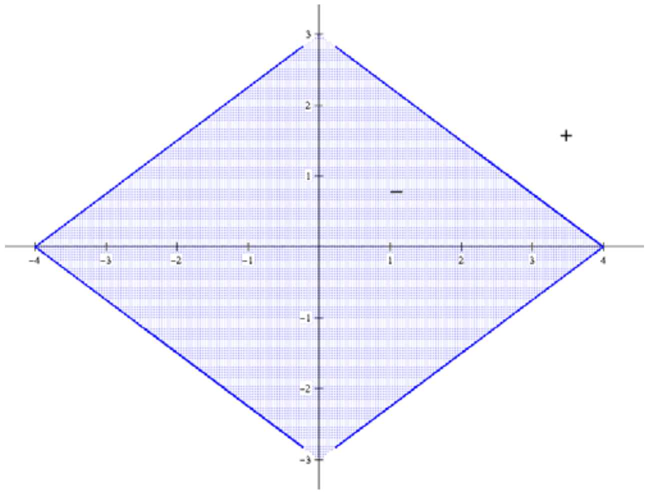


Рис. 12

Теорема 8. Фигура, заданная уравнением $\frac{|x|}{k}-\frac{|y|}{l}=1,$ где $k>0, l>0,$ делит координатную плоскость на три области так, что при переходе из одной области в смежную значение выражения $F(x;y)=\frac{|x|}{k}-\frac{|y|}{l}-1$ меняет знак на противоположный (сравните с уравнением и графиком гиперболы в теореме 5).

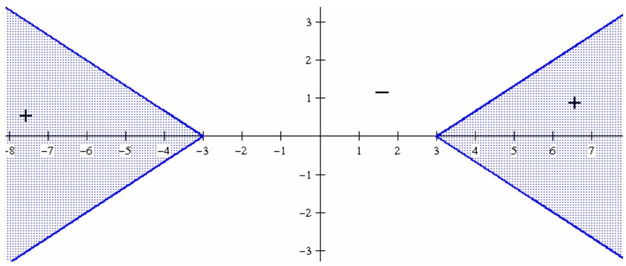


Рис. 13

Теорема 9. Фигура, заданная уравнением $|y|=kx$ $(k>0$ или $k<0)$, делит координатную плоскость на две области так, что при переходе из одной области в другую значение выражения $F(x;y)=|y|-kx$ меняет знак на противоположный (сравните с уравнением и графиком параболы в теореме 6).

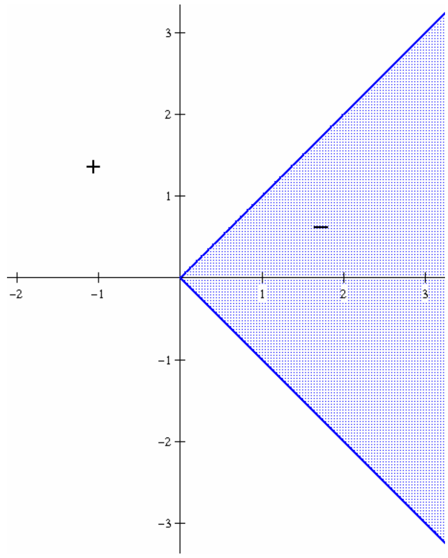


Рис. 14

Теорема 10. Неравенство $|a_1x+b_1y+c_1|\le a_2x+b_2y+c_2$, где $a_i^{\,2}+b_i^{\,2}\ne 0$ $(i=1;2)$, $\frac{a_1}{a_2}\ne\frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости множество внутренних точек угла, включая границы. В частности, отсюда следует теорема 9.

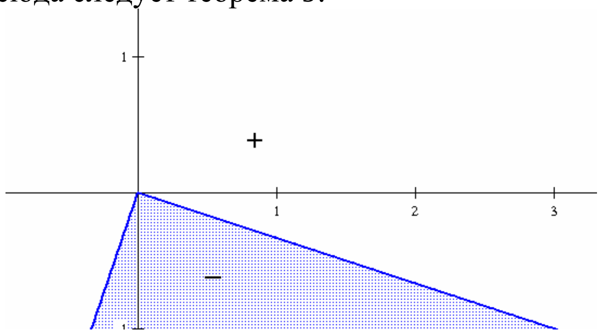


Рис. 15

Теорема 11. Неравенство $|a_1x+b_1y+c_1|\le|a_2x+b_2y+c_2|,$ где $a_i^{\,2}+b_i^{\,2}\ne 0$ $(i=1;2)$, $\frac{a_1}{a_2}\ne\frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости множество внутренних точек вертикальных углов, включая границы.

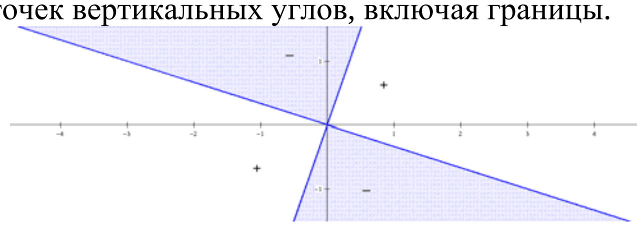


Рис. 16

Теорема 12. Пара параллельных прямых, заданная уравнением $|ax+by+c|=m,$ где $m>0$ и $a^2+b^2\ne 0,$ разбивает координатную плоскость на три области так, что при переходе из одной области в другую значение выражения $F(x;y)=|ax+by+c|-m$ меняет знак на противоположный.

Конкретизируем данную теорему: неравенство $|ax+by+c|\le m,$ где $m>0$ и $a^2+b^2\ne 0,$ задает на координатной плоскости множество внутренних точек «полосы», включая границы. В частности, «полоса» $|by+c|\le m$ параллельна оси Ox, а «полоса» $|ax+c|\le m$ параллельна оси Oy.

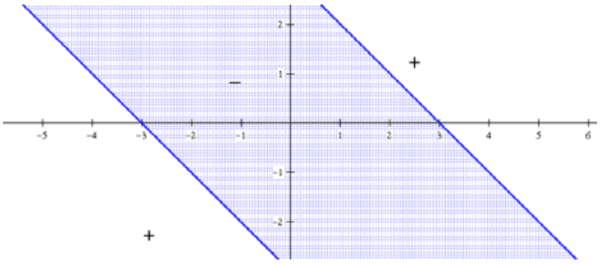


Рис. 17

Теорема13. Неравенство $|a_1x+b_1y+c_1|+|a_2x+b_2y+c_2|\le m,$ где $m>0$ и $a_i^2+b_i^2\ne 0$ $(i=1;2),$ $\dfrac{a_1}{a_2}\ne\dfrac{b_1}{b_2},$ задает на координатной плоскости множество внутренних точек параллелограмма, включая границы.

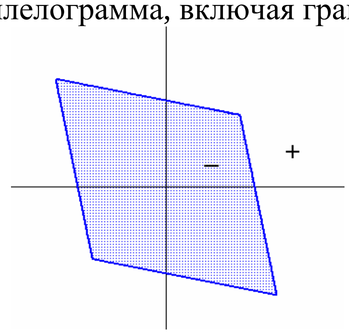


Рис. 18

3.6. Рационализация неравенств

Чтобы расширить возможности применения метода областей при решении неравенств с двумя переменными, используем идею рационализации неравенств.

Прием рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x;y)$ на более простое выражение $G(x;y)$, при которой неравенство $G(x;y)\vee 0$ равносильно неравенству $F(x;y)\vee 0$ в области определения выражения $F(x;y)$.

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где u,υ,ω,p,q - выражения с двумя переменными $(u>0;u\ne 1;\upsilon>0;\omega>0)$, a – фиксированное число ($a>0;a\ne 1$).

№	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$\log_a\upsilon-\log_a\omega$ $\log_a\upsilon-1$ $\log_a\upsilon$	$(a-1)(\upsilon-\omega)$ $(a-1)(\upsilon-a)$ $(a-1)(\upsilon-1)$
2 2а 2б	$\log_u\upsilon-\log_u\omega$ $\log_u\upsilon-1$ $\log_u\upsilon$	$(u-1)(\upsilon-\omega)$ $(u-1)(\upsilon-u)$ $(u-1)(\upsilon-1)$
3	$\log_u\upsilon-\log_\omega\upsilon$ $(\omega\ne 1)$	$(\upsilon-1)(u-1)\times$ $\times(\omega-1)(\omega-u)$
4 4а	$u^\upsilon-u^\omega$ $(u>0)$ $u^\upsilon-1$	$(u-1)(\upsilon-\omega)$ $(u-1)\upsilon$
5	$u^\upsilon-\omega^\upsilon$ $(u>0;\omega>0)$	$(u-\omega)\upsilon$
6	$\lvert p\rvert-\lvert q\rvert$	$(p-q)(p+q)$

Пример 2. Изобразите на координатной плоскости область решений неравенства

$$\frac{1}{\log_x y}>1.$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями: $x>0;x\ne 1;y>0;y\ne 1$ Приведем данное неравенство к виду

$$\frac{1-\log_x y}{\log_x y}>0 \text{ или } (\log_x y-1)\log_x y<0.$$

Используя замены 2а и 2б, последнее неравенство приводим к неравенству $(x-1)(y-x)(x-1)(y-1)<0$ или $(x-1)^2(y-x)(y-1)<0$.

Далее, используя обобщенный метод областей, находим решения исходного неравенства (рис.19).

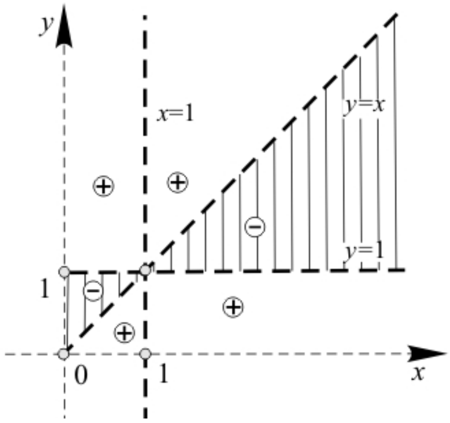


Рис. 19

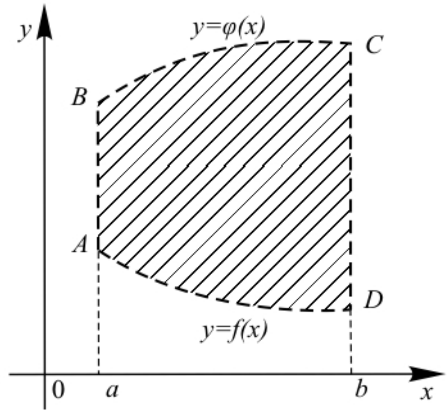


Рис. 20

Приведенные рассуждения легко переносятся на области, в основу задания которых выбрана переменная y.

Пример 3. Задайте аналитически решение неравенства $(y+x)(x-y-1)(x+2)\ge 0$.

Решение. Рис. 4. Найдем точки пересечения прямых $y=-x$, $y=x-1$ и $x=-2$, решая системы уравнений:

$$\begin{cases} y=-x, \\ y=x-1; \end{cases} \quad \begin{cases} y=-x, \\ x=-2; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x-1, \\ x=-2. \end{cases}$$

Отсюда получаем особые точки $A(0{,}5;-0{,}5)$, $B(-2;2)$, $C(-2;-3)$. Примем за основу задания областей переменную x, тогда особые значения переменной x: $x=0{,}5$ или $x=-2$. Разобьем область решений на элементарные области прямыми $x=0{,}5$ и $x=-2$. Запишем ответ для областей, содержащих знак плюс:

$$\{(x;y)x\in(-\infty;-2);\, y\in(-\infty;x-1]\cup[-x;+\infty)\}$$
$$\cup\{(x;y)|x=-2;\, y\in R\}\cup$$
$$\cup\{(x;y)|x\in(-2;0{,}5);\, y\in[x-1;-x]\}\cup$$
$$\cup\{(0{,}5;-0.5)\}\cup$$
$$\cup\{(x;y)|x\in(0{,}5;+\infty);\, y\in[-x;x-1]\}$$

3.7. Аналитическое задание области решения неравенств

Открытой элементарной областью (рис. 39) называется множество точек координатной плоскости, удовлетворяющей системе неравенств вида:

$$\begin{cases} a<x<b, \\ f(x)<y<\varphi(x) \end{cases} \qquad (4)$$

где функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$, заданные каждая одной своей формулой, непрерывны на промежутке $[a;b]$ и удовлетворяют неравенству $f(x)<\varphi(x)$ в интервале $(a;b)$. В этом случае говорят, что в системе (4) за основу задания области выбрана переменная x. Область, заданную системой неравенств (4), иногда записывают в виде

$$\{(x;y)|a<x<b,\, f(x)<y<\varphi(x)\}$$

или

$$\{(x;y)|x\in(a;b),\, y\in(f(x);\varphi(x))\}.$$

Знаки неравенств в системе (4) могут быть и нестрогими. Для неограниченных областей в условиях $a<x<b$, $f(x)<y<\varphi(x)$ используют символы $+\infty$ или $-\infty$.

3.8. Решение неравенств с параметром

Пусть дано неравенство

$$F(a;x)\vee 0, \qquad (3)$$

где x - переменная, a – фиксированное число (параметр), символ $\vee$ заменяет один из знаков: $>,<,\ge,\le$. Рассматривая параметр a как равноправную переменную с переменной x, мы сводим задачу решения неравенства (3) с параметром к решению неравенства с двумя переменными a и x.

Пример 4. Решите неравенство

$$(x+a)(a-x-1)(a+2)\ge 0$$

в зависимости от значения параметра a.

Решение. В примере 1 дано графическое решение неравенства $(y+x)(x-y-1)(x+2)\ge 0$ (рис. 4), в примере 3 представлена аналитическая запись решения этого неравенства. Дадим ответ для данного неравенства с параметром a (рис. 21). Особые точки $A(0{,}5;-0{,}5)$, $B(-2;2)$, $C(-2;-3)$ и особые значения параметра: $a=0{,}5$ и $a=-2$. Выберем области, содержащие знак плюс и решения уравнения $F(a;x)=0$, где

$F(a;x)=(x+a)(a-x-1)(a+2)$:

$D_1=\{(a;x)|a\ge 0{,}5;-a\le x\le a-1\}$;

$D_3=\{(a;x)|a\le -2;x\ge -a\}$;

$D_5=\{(a;x)|a\le -2;x\le a-1\}$;

$D_7=\{(a;x)|-2\le a\le 0{,}5;a-1\le x\le -a\}$.

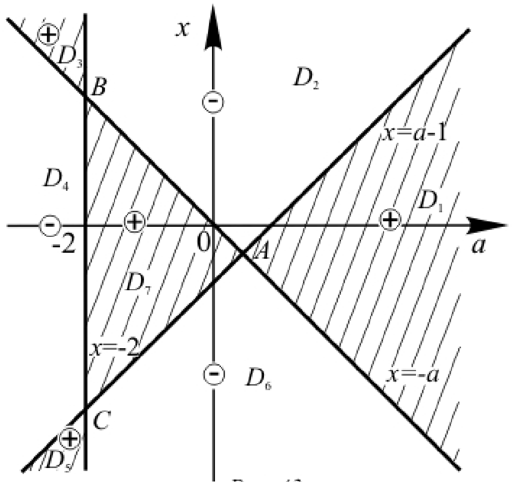


Рис. 21

Пример 5. (ЕГЭ, 2003 г.). Найдите все значения *a*, при которых область определения функции

$$y=\left(a^{x+0,5}+\sqrt{x}\cdot a^4-x^{0,5+x\log_x a}-a^{4,5}\right)^{0,5}$$

содержит ровно одно целое число.

Решение. 1). Из определения логарифма следует, что

$$a>0, x>0, x\ne 1. \qquad (*)$$

2). Упростим выражение, стоящее в основании степени

$a^{x+0,5}+\sqrt{x}\cdot a^4-x^{0,5+x\log_x a}-a^{4,5}=$

$=a^{x+0,5}+\sqrt{x}\cdot a^4-\sqrt{x}\cdot a^x-a^{4,5}=$

$=a^{0,5}\left(a^x-a^4\right)-\sqrt{x}\left(a^x-a^4\right)=$

$=\left(a^x-a^4\right)\left(a^{0,5}-x^{0,5}\right)$.

3). Из условия имеем

$$\left(a^x-a^4\right)\left(a^{0,5}-x^{0,5}\right)\ge 0.$$

Применяя рационализации 4 и 5, получим

$(a-1)(x-4)(a-x)0{,}5\ge 0$ или

$(a-1)(x-4)(x-a)\le 0$. $\qquad (**)$

Для решения последнего неравенства используем метод областей (рис.22). Неравенству $(**)$, учитывая условия $(*)$, удовлетворяют координаты точек областей D_3, D_7 и части областей D_1 и D_5.

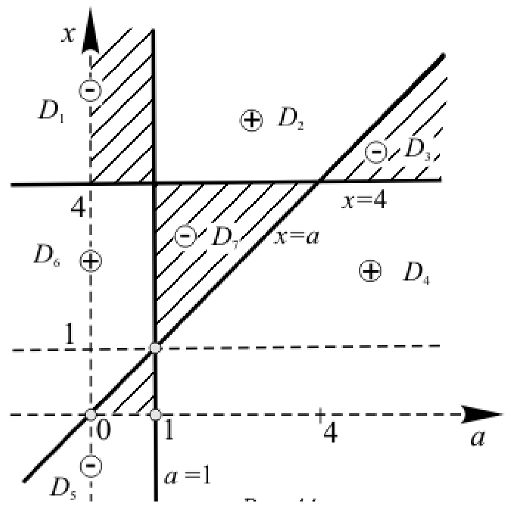


Рис. 22

При каждом значении $a\in(0;1]$ в части области D_1 бесконечное множество целых чисел, в части области D_5 нет ни одного целого числа, т.е. $0<a\le 1$ не удовлетворяют условию задачи.

При $a\in(1;4)$ в области D_7 решение имеет вид $[a;4]$. Если $3<a<4$, то отрезок $[a;4]$ содержит одно целое число 4.

При $a=4$ решение $x=4$.

В области D_3 при $a\in(4;+\infty)$ решение имеет вид $[4;a]$, которое содержит одно целое число 4 при условии $4<a<5$.

Объединим полученные значения параметра *a*.

О т в е т: $(3;5)$.

Пример 6. (ЕГЭ, 2003 г.) Из области определения функции

$$y=\log_7\left(a^a-a^{\frac{7x+4}{x+4}}\right)$$

взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения *a*, при которых такая сумма будет больше 7, но меньше 11.

Решение. 1). Так как $D(\log_7)=R_+$, то имеем

$a^a-a^{\frac{7x+4}{x+4}}>0$

или по рационализации 4

$(a-1)\left(a-\dfrac{7x+4}{x+4}\right)>0$, где $a>0$.

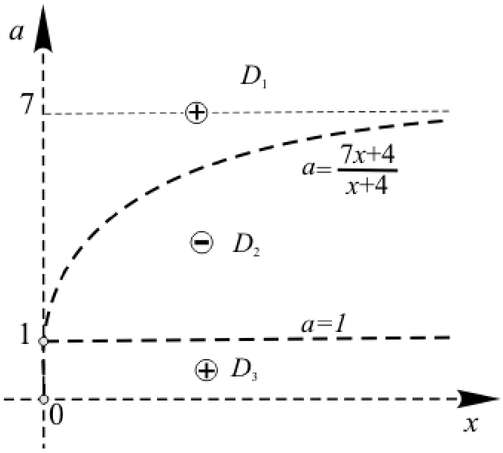


Рис. 23

2). Обозначим $F(x;a)=(a-1)\left(a-\dfrac{7x+4}{x+4}\right)$.

График уравнения $F(x;a)=0$, состоящий из прямой $a=1$ (пунктирная линия) и гиперболы $a=\dfrac{7x+4}{x+4}$ (пунктирная линия), разбивает первый координатный угол ($a>0$ и переменная x принимает натуральные значения) на три области. Применяя метод областей, получаем необходимое множество точек плоскости: области D_1 и D_3 (рис.23).

3). Решим уравнение $a=\dfrac{7x+4}{x+4}$ относительно переменной x и найдем $x=\dfrac{4-4a}{a-7}$. При $0<a<1$ решением является промежуток $(0;+\infty)$, который содержит все натуральные числа. Эти значения параметра a не удовлетворяют условию задачи.

При $a>1$ решением является промежуток $\left(0;\dfrac{4-4a}{a-7}\right)$. Рассмотрим суммы: 1; 1+2=3; 1+2+3=6; 1+2+3+4=10; 1+2+3+4+5=15. Согласно условию задачи имеем неравенство $4<\dfrac{4-4a}{a-7}\le 5$. Так как $a-7<0$, то получаем

$$\begin{cases}4(a-7)>4-4a,\\ 4-4a\ge 5(a-7);\end{cases}\quad \begin{cases}a>4,\\ a\le\dfrac{39}{9}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(4;\dfrac{39}{9}\right]$.

Источники

1. ЕГЭ. Математика. Тематическая тетрадь. 11 класс / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров. – М.: МЦНМО, Издательство «Экзамен», 2010.

2. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

3. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.

4. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.

5. Панферов В. С., Сергеев И. Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Ителлект-Центр, 2010.

6. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).

7. Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.

8. Журнал «Квант»

9. Журнал «Математика в школе»

10. Десять правил расположения корней квадратного трехчлена/ Ш. Цыганов. – г. Математика (приложение «Первое сентября»), №18, 2002.

11. Неравенства с двумя переменными: графическое и аналитическое решения/ А. Корянов. – М.: Чистые пруды, 2008. (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 22).

12. Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы. Условия и решения. Вып. 1-16. – М.: Школьная Пресса, – (Библиотека журнала «Математика в школе»).

13. www.mathege.ru - Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк заданий)

14. www.alexlarin.narod.ru - сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.