

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС  
«МАТЕМАТИКА. ЕГЭ-2010»



готовимся

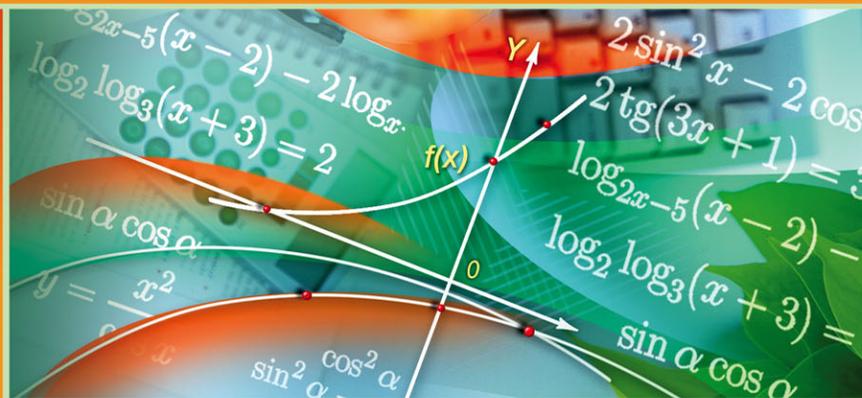
ЕГЭ

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю.Кулабухова

# МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 1. РЕШЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

ЧАСТЬ 2. РЕШЕНИЯ СБОРНИКА ЗАДАЧ  
в электронном виде на [www.legion.ru](http://www.legion.ru)



# РЕШЕБНИК

Подготовка к ЕГЭ -2010



Готовимся к ЕГЭ

---

Под редакцией  
Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

**МАТЕМАТИКА**  
**РЕШЕБНИК**  
**ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2010**  
**ЧАСТЬ 2**  
**РЕШЕНИЯ СБОРНИКА ЗАДАЧ**

Учебно-методическое пособие

*Электронная версия*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЛЕГИОН»

Ростов-на-Дону

2009

**Рецензенты:** *С. О. Иванов* — аспирант каф. АДМ ЮФУ,  
*Л. Л. Иванова* — заслуженный учитель России.

Авторский коллектив:

**Ангельев В. Д., Войта Е. А., Дерезин С. В., Евич Л. Н.,  
Кулабухов С. Ю., Ольховая Л. С., Фофонов А. Е.**

Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2010: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2009. — (Готовимся к ЕГЭ.)

Данный решебник предназначен для самостоятельной или коллективной подготовки школьников к ЕГЭ. Он является логическим продолжением основной книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010» под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова.

Решебник состоит из двух частей.

Часть I — книга, которую Вы можете приобрести в магазинах своего региона. Она содержит решения всех вариантов учебно-тренировочных тестов издания «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010», за исключением вариантов, представленных в самой книге.

Часть II — пособие, которое Вы сейчас читаете, представленное в электронном виде на сайте издательства [www.legionr.ru](http://www.legionr.ru) в свободном (бесплатном) доступе. Оно содержит решения задач, вошедших в главу «Сборник задач для подготовки к ЕГЭ» основной книги.

Решебник поможет выпускнику быстро освоить весь необходимый материал и успешно подготовиться к ЕГЭ. Также он может быть полезен учителям и методистам.

© ООО «Легион», 2009.

## Решения задач задачника

$$\begin{aligned} 1. & 3\sqrt{2} - 4 = \sqrt{(3\sqrt{2} - 4)^2} = \sqrt{34 - 24\sqrt{2}} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \sqrt{3\sqrt{2} - 4} \cdot \sqrt[4]{34 + 24\sqrt{2}} = \sqrt[4]{34 - 24\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{34 + 24\sqrt{2}} = \\ & = \sqrt[4]{34^2 - (24\sqrt{2})^2} = \sqrt[4]{1156 - 1152} = \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{324} = \sqrt[4]{4 \cdot 4 \cdot 81} = \\ & = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3 = 6. \end{aligned}$$

Ответ: 6.

$$\begin{aligned} 2. & 2\sqrt{3} + 3 = \sqrt{(2\sqrt{3} + 3)^2} = \sqrt{21 + 12\sqrt{3}} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \sqrt[6]{21 - 12\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{3} + 3} = \sqrt[6]{21 - 12\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{21 + 12\sqrt{3}} = \\ & = \sqrt[6]{21^2 - (12\sqrt{3})^2} = \sqrt[6]{441 - 432} = \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{3 \cdot 9 \cdot 8} = \\ & = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3} = 3 \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

Ответ: 6.

$$\begin{aligned} 3. & \left( \sqrt{1 + \sqrt{6}} - \sqrt{\sqrt{150} + \sqrt{25}} \right) \cdot \sqrt{\sqrt{6} - 1} + 1 - \sqrt{5} = \\ & = \left( \sqrt{1 + \sqrt{6}} - \sqrt{5\sqrt{6} + 5} \right) \sqrt{\sqrt{6} - 1} + 1 - \sqrt{5} = \\ & = \sqrt{1 + \sqrt{6}}(1 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{\sqrt{6} - 1} + 1 - \sqrt{5} = \\ & = \sqrt{(\sqrt{6} - 1)(\sqrt{6} + 1)(1 - \sqrt{5})} + 1 - \sqrt{5} = \\ & = \sqrt{5}(1 - \sqrt{5}) + 1 - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 5 + 1 - \sqrt{5} = -4. \end{aligned}$$

Ответ: -4.

$$4. \sqrt[6]{2\sqrt{7} + 8} \cdot \sqrt[6]{8 - 2\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{36} = \sqrt[6]{8^2 - (2\sqrt{7})^2} \cdot \sqrt[3]{36} = \sqrt[6]{36} \cdot \sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{6 \cdot 36} = 6.$$

Ответ: 6.

5. Преобразуем данное выражение, используя формулу суммы кубов:

$$\begin{aligned} \frac{m^{1,5} + 2\sqrt{2}}{(m+2) - \sqrt{2m}} + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2m} - 1) &= \frac{(m^{0,5} + \sqrt{2}) \cdot (m - \sqrt{2m} + 2)}{(m+2) - \sqrt{2m}} + \\ + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2m} - 1) &= m^{0,5} + \sqrt{2} + 2m^{0,5} - \sqrt{2} = 3m^{0,5}. \end{aligned}$$

Найдём значение выражения при  $m = 9$ :  $3m^{0,5} = 3\sqrt{9} = 3 \cdot 3 = 9$ .

Ответ: 9.

6. Преобразуем данное выражение, используя формулу суммы кубов:

$$\frac{n^{1,2} - 3\sqrt{3}}{(n^{0,8} + 3) + \sqrt{3n^{0,8}}} - \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3n^{0,8}} - 1) =$$

$$= \frac{(n^{0,4} - \sqrt{3}) \cdot (n^{0,8} + \sqrt{3}n^{0,4} + 3)}{(n^{0,8} + 3) + \sqrt{3}n^{0,8}} - \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}n^{0,8} - 1) = n^{0,4} - \sqrt{3} - 3n^{0,4} + \sqrt{3} = -2n^{0,4}.$$

Найдём значение выражения при  $n = 32$ :

$$-2n^{0,4} = -2 \cdot 32^{\frac{2}{5}} = -2 \cdot 4 = -8.$$

*Ответ:*  $-8$ .

7. Вычислим сначала значение подкоренного выражения.

$$\frac{9^{-0,5} - 2}{1 - 9^{0,5} + 9^{-0,5}} = \frac{\frac{1}{3} - 2}{1 - 3 + \frac{1}{3}} = 1; \sqrt[9]{1} = 1.$$

*Ответ:* 1.

$$8. \frac{\sqrt[3]{75a^2 - 3a^5}}{\sqrt[3]{25 - a^3}} = \sqrt[3]{3a^2}. \text{ Подставляя } a = 3, \text{ получаем } \sqrt[3]{3 \cdot 3^2} = 3.$$

*Ответ:* 3.

$$9. \frac{\sqrt{35a^6 - 7a^5} - \sqrt{15a^2 - 3a}}{\sqrt{7a^5} - \sqrt{3a}} = \frac{\sqrt{7a^5} \cdot \sqrt{5a - 1} - \sqrt{3a} \cdot \sqrt{5a - 1}}{\sqrt{7a^5} - \sqrt{3a}} = \frac{\sqrt{5a - 1}(\sqrt{7a^5} - \sqrt{3a})}{\sqrt{7a^5} - \sqrt{3a}} = \sqrt{5a - 1}. \text{ Подставляя } a = 2, \text{ получаем } \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = 3.$$

*Ответ:* 3.

$$10. \sqrt[4]{(7 - 4\sqrt{3})^2} + \sqrt{3} = \sqrt[4]{((\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 4)^2} + \sqrt{3} = \sqrt[4]{(\sqrt{3} - 2)^4} + \sqrt{3} = |\sqrt{3} - 2| + \sqrt{3}. \text{ Так как } \sqrt{3} - 2 < 0, \text{ то } |\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}.$$

Окончательно имеем:  $2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2$ .

*Ответ:* 2.

11. Представим оба подкоренных выражения в виде полных квадратов:

$$6 - 2\sqrt{5} = (1 - \sqrt{5})^2 \text{ и } 9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2. \text{ Таким образом, } \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = |1 - \sqrt{5}| - |2 + \sqrt{5}|.$$

Так как  $\sqrt{5} > 1$  и  $2 + \sqrt{5} > 0$ , то эта разность модулей примет вид  $\sqrt{5} - 1 - (2 + \sqrt{5}) = -3$ .

*Ответ:*  $-3$ .

$$12. \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = |1 + \sqrt{2}| + |3 - \sqrt{2}|. \text{ Так как } 3 > \sqrt{2}, \text{ то сумма модулей примет вид:}$$

$$1 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 4.$$

Ответ: 4.

13. Представим подкоренные выражения в виде полных квадратов:  $29 - 4\sqrt{7} = (1 - 2\sqrt{7})^2$  и  $11 - 4\sqrt{7} = (2 - \sqrt{7})^2$ . Получим  $|1 - 2\sqrt{7}| - 2|2 - \sqrt{7}| = 2\sqrt{7} - 1 - 2\sqrt{7} + 4 = 3$ .

Ответ: 3.

14. Представим подкоренные выражения в виде полных квадратов:  $a - 4\sqrt{a - 4} = (2 - \sqrt{a - 4})^2$  и  $a + 4\sqrt{a - 4} = (2 + \sqrt{a - 4})^2$ . Тогда исходное выражение будет равно  $\sqrt{(2 - \sqrt{a - 4})^2} + \sqrt{(2 + \sqrt{a - 4})^2} = |2 - \sqrt{a - 4}| + |2 + \sqrt{a - 4}|$ . Так как  $a = 4,125$ , то  $2 - \sqrt{a - 4} > 0$  и  $2 + \sqrt{a - 4} > 0$ . Поэтому последнее выражение примет вид:  $2 - \sqrt{a - 4} + 2 + \sqrt{a - 4} = 4$ .

Ответ: 4.

15. Представим подкоренные выражения в виде полных квадратов:  $a + 6\sqrt{a - 9} = (\sqrt{a - 9} + 3)^2$  и  $a - 6\sqrt{a - 9} = (\sqrt{a - 9} - 3)^2$ . Тогда исходное выражение будет равно  $\sqrt{(\sqrt{a - 9} + 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{a - 9} - 3)^2} = |\sqrt{a - 9} + 3| + |\sqrt{a - 9} - 3|$ . Так как  $a = 9,75$ , то  $\sqrt{a - 9} + 3 > 0$  и  $\sqrt{a - 9} - 3 < 0$ . Поэтому последнее выражение примет вид:  $\sqrt{a - 9} + 3 + 3 - \sqrt{a - 9} = 6$ .

Ответ: 6.

16.  $\sqrt{4x^2 - 5(4x - 5)} + 2\sqrt{9 + x(x + 6)} = \sqrt{(2x - 5)^2} + 2\sqrt{(x + 3)^2} = |2x - 5| + 2|x + 3|$ . Учитывая, что  $x = 2,1283$ , получим  $|2x - 5| + 2|x + 3| = 5 - 2x + 2(x + 3) = 11$ .

Ответ: 11.

17. Подставляем  $a = 1$  в выражение:  $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{4 - 3} = 1$ .

Ответ: 1.

18.  $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14} + \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{14} - \sqrt{6}} = \frac{14 - \sqrt{14 \cdot 6} + \sqrt{14 \cdot 6} + 6}{14 - 6} = \frac{20}{8} = 2,5$ .

Ответ: 2,5.

19.  $\sqrt{33 - 12\sqrt{6}} - \sqrt{33 + 12\sqrt{6}} = \sqrt{(2\sqrt{6} - 3)^2} - \sqrt{(2\sqrt{6} + 3)^2} = 2\sqrt{6} - 3 - (2\sqrt{6} + 3) = -6$ .

Ответ: -6.

20.  $\sqrt{x + 1 - 4\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x + 1 + 4\sqrt{x - 3}} = \sqrt{(\sqrt{x - 3} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x - 3} + 2)^2} = |\sqrt{x - 3} - 2| + |\sqrt{x - 3} + 2|$ .

Так как  $x = 3,185$ , то  $|\sqrt{x-3} - 2| + |\sqrt{x-3} + 2| =$   
 $= 2 - \sqrt{0,185} + \sqrt{0,185} + 2 = 4.$

Ответ: 4.

$$21. \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{37} - \sqrt{33}} + \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{37} + \sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}(\sqrt{37} + \sqrt{33}) + \sqrt{37}(\sqrt{37} - \sqrt{33})}{37 - 33} =$$

$$= \frac{33 + 37}{4} = 17,5.$$

Ответ: 17,5.

$$22. (3-x)^{-1} \cdot \sqrt{(x-3)^2(x+1)} = \frac{1}{3-x} \cdot |x-3| \cdot \sqrt{x+1}. \text{ Если } x = 2,61, \text{ то}$$

$$|x-3| = 3-x \text{ и выражение примет вид } \frac{1}{3-x} \cdot (3-x) \cdot \sqrt{x+1} = \sqrt{x+1} =$$

$$= \sqrt{3,61} = 1,9.$$

Ответ: 1,9.

$$23. \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{65} - \sqrt{45}} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{65} + \sqrt{45}} = \frac{\sqrt{45}(\sqrt{65} + \sqrt{45}) + \sqrt{65}(\sqrt{65} - \sqrt{45})}{65 - 45} =$$

$$= \frac{45 + 65}{20} = 5,5.$$

Ответ: 5,5.

$$24. \frac{\log_5 50}{\log_2 5} = \log_5(25 \cdot 2) \cdot \log_5 2 = (\log_5 25 + \log_5 2) \cdot \log_5 2 =$$

$$= (2 + \log_5 2) \cdot \log_5 2 = \log_5^2 2 + 2 \log_5 2; \frac{\log_5 10}{\log_{10} 5} = \log_5 10 \cdot \log_5 10 =$$

$$= \log_5^2 10 = \log_5^2(2 \cdot 5) = (\log_5 2 + \log_5 5)^2 = (1 + \log_5 2)^2 =$$

$$= 1 + 2 \log_5 2 + \log_5^2 2; 5,5(\log_5^2 2 + 2 \log_5 2 - 1 - 2 \log_5 2 - \log_5^2 2) =$$

$$= 5,5 \cdot (-1) = -5,5.$$

Ответ: -5,5.

$$25. \log_7 21 \cdot \log_7 21 - \log_7(7 \cdot 21) \cdot \log_7 3 =$$

$$= (\log_7(7 \cdot 3))^2 - \log_7(7^2 \cdot 3) \cdot \log_7 3 =$$

$$= (\log_7 7 + \log_7 3)^2 - (\log_7 7^2 + \log_7 3) \cdot \log_7 3 =$$

$$= (1 + \log_7 3)^2 - (2 + \log_7 3) \cdot \log_7 3 =$$

$$= 1 + 2 \log_7 3 + \log_7^2 3 - 2 \log_7 3 - \log_7^2 3 = 1.$$

Ответ: 1.

$$26. \log_2^2 3 + \frac{\log_2 12}{\log_{12} 2} - \frac{\log_2 144}{\log_3 2} = \log_2^2 3 + \log_2^2 12 - \log_2 144 \cdot \log_2 3 =$$

$$= \log_2^2 3 + \log_2^2 12 - 2 \log_2 12 \cdot \log_2 3 = (\log_2 12 - \log_2 3)^2 = \log_2^2 4 = 2^2 = 4.$$

Ответ: 4.

$$\begin{aligned}
 27. & \sqrt{12} \frac{\log_2(3+\sqrt{5}) + \log_2(4-\sqrt{5})}{\log_2 2\sqrt{3}} - \sqrt{5} = \\
 & = \sqrt{12} \frac{\log_2(12+\sqrt{5}-5)}{\log_2 2\sqrt{3}} - \sqrt{5} = \sqrt{12}^{\log_2(7+\sqrt{5}) \cdot \log_{\sqrt{12}} 2} - \sqrt{5} = \\
 & = \left(\sqrt{12}^{\log_{\sqrt{12}} 2}\right)^{\log_2(7+\sqrt{5})} - \sqrt{5} = 2^{\log_2(7+\sqrt{5})} - \sqrt{5} = 7 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 7.
 \end{aligned}$$

Ответ: 7.

$$\begin{aligned}
 28. & 7,15 \left( \frac{\log_7 21}{\log_{21} 7} - \frac{\log_7 147}{\log_3 7} \right) = \\
 & = 7,15 \left( \log_7(3 \cdot 7) \cdot \log_7(3 \cdot 7) - \log_7(7^2 \cdot 3) \cdot \log_7 3 \right) = \\
 & = 7,15 \left( (\log_7 3 + 1)^2 - 2 \log_7 3 - \log_7^2 3 \right) = \\
 & = 7,15 \left( \log_7^2 3 + 2 \log_7 3 + 1 - 2 \log_7 3 - \log_7^2 3 \right) = 7,15.
 \end{aligned}$$

Ответ: 7,15.

$$\begin{aligned}
 29. & 2,3 \left( \frac{\log_5 45}{\log_{45} 5} - \frac{\log_5 225}{\log_9 5} \right) = 2,3 (\log_5^2 45 - \log_5 225 \cdot \log_5 9) = \\
 & = 2,3 ((\log_5 5 + \log_5 9)^2 - (\log_5 25 + \log_5 9) \cdot \log_5 9) = \\
 & = 2,3 ((1 + \log_5 9)^2 - (2 + \log_5 9) \cdot \log_5 9) = \\
 & = 2,3 (1 + 2 \log_5 9 + \log_5^2 9 - 2 \log_5 9 - \log_5^2 9) = 2,3 \cdot 1 = 2,3.
 \end{aligned}$$

Ответ: 2,3.

$$\begin{aligned}
 30. & (3 \log_{27} 3,5 - \log_3 10,5 - 1) \cdot 5^{3 \log_5 2} = \\
 & = (\log_3 3,5 - \log_3 10,5 - 1) \cdot 8 = \left( \log_3 \frac{1}{3} - 1 \right) \cdot 8 = -2 \cdot 8 = -16.
 \end{aligned}$$

Ответ: -16.

$$\begin{aligned}
 31. & 5 \log_3 49 \cdot \log_7 81 + 17^{\log_{17} 8} = 10 \log_3 7 \cdot 4 \log_7 3 + 8 = \\
 & = 40 \frac{\log_3 7}{\log_3 7} + 8 = 48.
 \end{aligned}$$

Ответ: 48.

$$32. \frac{1}{2} \ln a = 1; \ln a = 2.$$

$$\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} e^5 = \frac{1}{\log_{e^5} \frac{\sqrt{b}}{a^2}} = \frac{5}{\ln \sqrt{b} - \ln a^2} = \frac{5}{\frac{1}{2} \ln b - 2 \ln a} = \frac{5}{3 - 4} = -5.$$

Ответ: -5.

$$33. \log_a b = 12, \text{ тогда } \log_{a^6 \sqrt{b}} b = \frac{\log_a b}{\log_a (a^6 \cdot \sqrt{b})} =$$

$$= \frac{\log_a b}{6 \log_a a + \frac{1}{2} \log_a b} = \frac{12}{6+6} = 1.$$

Ответ: 1.

$$\begin{aligned} 34. \log_b a = 2, \text{ тогда } \log_{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}} a^2 &= \frac{\log_a a^2}{\log_a \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}} = \frac{2 \log_b a}{\frac{1}{2} \log_b a - \frac{1}{3} \log_b b} = \\ &= \frac{2 \cdot 2}{\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6. \end{aligned}$$

Ответ: 6.

$$\begin{aligned} 35. \log_a b = 4, \text{ тогда } 7 \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \frac{\sqrt{b}}{a} &= \frac{7 \log_a \frac{\sqrt{b}}{a}}{\log_a \frac{\sqrt{a}}{b}} = \frac{7(\log_a \sqrt{b} - \log_a a)}{\log_a \sqrt{a} - \log_a b} = \\ &= \frac{7\left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 4} = \frac{7 \cdot 2}{-7} = -2. \end{aligned}$$

Ответ: -2.

$$\begin{aligned} 36. \log_a b = 3, \text{ тогда } 5 \log_{\frac{b^2}{a}} \frac{a^2}{b} &= \frac{5 \log_a \frac{a^2}{b}}{\log_a \frac{b^2}{a}} = \frac{5(\log_a a^2 - \log_a b)}{\log_a b^2 - \log_a a} = \\ &= \frac{5(2-3)}{2 \cdot 3 - 1} = \frac{-5}{5} = -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1.

$$\begin{aligned} 37. \log_a b = 3, \text{ тогда } \log_{\frac{a^2}{b}} \frac{b^2}{a} &= \frac{\log_a b^2 - \log_a a}{\log_a a^2 - \log_a b} = \\ &= \frac{2 \log_a b - 1}{2 - \log_a b} = \frac{2 \cdot 3 - 1}{2 - 3} = \frac{5}{-1} = -5. \end{aligned}$$

Ответ: -5.

38. Воспользуемся следующим свойством логарифмов:

$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a b^{\log_b c} = \log_a c$ . Получим:

$$\log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_5 8 \cdot \log_7 9 = \log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_5 2^3 \cdot \log_7 3^2 =$$

$$= 6 \log_3 5 \cdot \log_5 2 \cdot \log_2 7 \cdot \log_7 3 = 6 \log_3 2 \cdot \log_2 3 = 6.$$

Ответ: 6.

39. Воспользуемся следующим свойством логарифмов:

$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a b^{\log_b c} = \log_a c$ . Получим:

$$\log_{36} 5 \cdot \log_8 3 \cdot \log_{25} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{3}} 6 = \log_{6^2} 5 \cdot \log_{2^3} 3 \cdot \log_{5^2} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{3}} 6 = \\ = 0,25 \log_6 5 \cdot \log_5 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 6 = 0,25 \log_6 2 \cdot \log_2 6 = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

$$40. \log_{p^2}(ab) = 12, ab = p^{24}; \log_{p^2} \frac{a}{b} = 4, \frac{a}{b} = p^8.$$

$$\begin{cases} ab = p^{24}, \\ \frac{a}{b} = p^8; \end{cases} \quad b = p^8, a = p^{16}; \quad \frac{\log_p p^{16}}{\log_p p^8} = \frac{16}{8} = 2.$$

Ответ: 2.

$$41. \log_t(ab) = 7, ab = t^7; \log_t \frac{a}{b} = 1, \frac{a}{b} = t.$$

$$\begin{cases} ab = t^7, \\ \frac{a}{b} = t; \end{cases} \quad a = t^4, b = t^3; \log_t t^4 \cdot \log_t t^3 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Ответ: 12.

42. Подставим значение  $a$  в данное выражение:

$$\frac{25^{-1} + \log_2 \frac{1}{a}}{5^{-1} - \log_4 a} - \frac{3}{a^{-0,5}} = \frac{25^{-1} + \log_2 \frac{1}{16}}{5^{-1} - 0,5 \log_2 16} - \frac{3}{16^{-0,5}} = \\ = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 2^2}{\frac{1}{5} - 2} - 12 = \frac{\left(\frac{1}{5} - 2\right)\left(\frac{1}{5} + 2\right)}{\frac{1}{5} - 2} - 12 = -9,8.$$

Ответ: -9,8.

$$43. 7^{4 \log_a 7 \cdot \log_{49} a} = 7^{2 \log_a 7 \cdot \log_7 a}. \text{ Так как } \log_a 7 \cdot \log_7 a = 1, \text{ то} \\ 7^{2 \log_a 7 \cdot \log_7 a} = 7^2 = 49.$$

Ответ: 49.

$$44. 3^{\sqrt{2}(\log_{0,2} a + \log_5 a)} = 3^{\sqrt{2}(-\log_5 a + \log_5 a)} = 3^0 = 1.$$

Ответ: 1.

$$45. \lg 2 \cdot \log_5 10 \cdot \log_2 5 = \left(\lg 2 \cdot \frac{1}{\lg 5}\right) \cdot \log_2 5 = \frac{\lg 2}{\lg 5} \cdot \log_2 5 = \log_5 2 \cdot \log_2 5 = 1.$$

Ответ: 1.

$$46. (7\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 7^2 = 49.$$

Ответ: 49.

$$47. 1) \text{ При } a = 5 \text{ имеем: } a - \frac{2 \log_{12}(8-a) + \frac{1}{\log_{2a} 12} + \log_{7+a} 1,6}{\log_{15-a} 2 + \lg a} =$$

$$= 5 - \frac{2 \log_{12} 3 + \frac{1}{\log_{10} 12} + \log_{12} 1,6}{\log_{10} 2 + \lg 5}.$$

$$2) 2 \log_{12} 3 = \log_{12} 3^2 = \log_{12} 9,$$

$$\frac{1}{\log_{10} 12} = \log_{12} 10, \log_{12} 9 + \log_{12} 10 + \log_{12} 1,6 = \log_{12}(9 \cdot 10 \cdot 1,6) = 2,$$

$$\log_{10} 2 = \lg 2, \lg 2 + \lg 5 = \lg(2 \cdot 5) = 1. \text{ Поэтому}$$

$$5 - \frac{2 \log_{12} 3 + \frac{1}{\log_{10} 12} + \log_{12} 1,6}{\log_{10} 2 + \lg 5} = 5 - \frac{2}{1} = 3.$$

Ответ: 3.

48. 1) При  $a = 7$  имеем

$$a + \frac{2 \log_{13+a}(a-2) + \frac{1}{\log_{32}(3a-1)} - \log_{20}(a-5)}{\log_{a+3} 20 + \lg(12-a)} =$$

$$= 7 + \frac{2 \log_{20} 5 + \frac{1}{\log_{32} 20} - \log_{20} 2}{\log_{10} 20 + \lg 5}.$$

2) В силу свойств и определений логарифмов справедливы равенства:  
 $2 \log_{20} 5 = \log_{20} 5^2 = \log_{20} 25,$

$$\frac{1}{\log_{32} 20} = \log_{20} 32, \log_{20} 25 + \log_{20} 32 - \log_{20} 2 = \log_{20} \frac{25 \cdot 32}{2} = 2,$$

$$\log_{10} 20 = \lg 20, \lg 20 + \lg 5 = \lg(20 \cdot 5) = 2. \text{ Поэтому}$$

$$7 + \frac{2 \log_{20} 5 + \frac{1}{\log_{32} 20} - \log_{20} 2}{\log_{10} 20 + \lg 5} = 7 + \frac{2}{2} = 8.$$

Ответ: 8.

49. Заметим, что подкоренное выражение является полным квадратом:

$$49^x - 10 \cdot 7^x + 25 = (7^x - 5)^2. \text{ Тогда исходное выражение принимает вид}$$

$$\sqrt{49^x - 10 \cdot 7^x + 25} + 7^x + 2,5 = \sqrt{(7^x - 5)^2} + 7^x + 2,5 = |7^x - 5| + 7^x + 2,5.$$

Поскольку  $6^x = 0,25 < 1$ , то  $x < 0$ . Значит,  $7^x < 1$  и  $|7^x - 5| = 5 - 7^x$ .

Отсюда имеем:  $|7^x - 5| + 7^x + 2,5 = 5 - 7^x + 7^x + 2,5 = 7,5$ .

Ответ: 7,5.

$$50. \frac{\ln((x+3)(x-2))}{\ln(x+3)} - \log_{x+3}(x-2) = \\ = \log_{x+3}(x-2) + 1 - \log_{x+3}(x-2) = 1.$$

Ответ: 1.

$$51. \frac{\lg((x-1)(x+4))}{\lg(x-1)} - \log_{x-1}(x+4) = \\ = \log_{x-1}(x+4) + 1 - \log_{x-1}(x+4) = 1.$$

Ответ: 1.

$$52. \frac{3 \lg 2 - \lg 0,25}{\lg 14 - \lg 7} = \frac{3 \lg 2 - \lg 2^{-2}}{\lg \frac{14}{7}} = \frac{5 \lg 2}{\lg 2} = 5.$$

Ответ: 5.

$$53. \frac{3 \log_7 2 - \log_7 24}{\log_7 3 + \log_7 27} = \frac{\log_7 \frac{2^3}{24}}{\log_7 81} = \frac{\log_7 \frac{1}{3}}{\log_7 81} = \frac{-\log_7 3}{4 \log_7 3} = -0,25.$$

Ответ: -0,25.

$$54. \frac{(7^p - 5^p)(7^p + 5^p)}{(7^p + 5^p)^2} = \frac{7^p - 5^p}{7^p + 5^p} = \frac{5^p}{5^p} \cdot \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^p - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^p + 1} = \frac{1}{2}, \text{ так как}$$

$$p = \log_{1,4} 3 = \log_{\frac{7}{5}} 3.$$

Ответ: 0,5.

$$55. \frac{\cos 71^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cos 19^\circ}{2 \cos 69^\circ \cos 8^\circ + 2 \cos 82^\circ \cos 21^\circ} = \\ = \frac{\cos 71^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \sin 71^\circ}{2(\cos 69^\circ \cos 8^\circ + \sin 8^\circ \sin 69^\circ)} = \frac{\cos 61^\circ}{2 \cos 61^\circ} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

$$56. \frac{3(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)}{2 \sin 70^\circ} = \\ = \frac{-3 \cdot 2 \sin 45^\circ \cos 35^\circ \cdot 2 \sin 45^\circ \sin 35^\circ}{2 \sin 70^\circ} = \frac{-3 \sin 70^\circ}{2 \sin 70^\circ} = -1,5.$$

Ответ: -1,5.

$$57. \frac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{9\sqrt{2} \cdot \cos 46^\circ + \sqrt{2} \cdot \sin 44^\circ} = \frac{2 \sin 45^\circ \cos 46^\circ}{\sqrt{2} \cos 46^\circ (9 + 1)} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{10\sqrt{2}} = 0,1.$$

Ответ: 0,1.

$$\begin{aligned} 58. & (\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ + (\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 5^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ = \\ & = \frac{(\sin 20^\circ \cos 5^\circ + \sin 5^\circ \cos 20^\circ) \cos 25^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ \sin 25^\circ} + \\ & + \frac{(\sin 20^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cos 20^\circ) \cos 15^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ \sin 15^\circ} = \\ & = \frac{\sin 25^\circ \cdot \cos 25^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ \sin 25^\circ} + \frac{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ \sin 15^\circ} = \frac{\cos 25^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ} = \\ & = \frac{2 \cos 20^\circ \cos 5^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

$$59. \sin 30^\circ (\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \sin 18^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

$$60. \cos 60^\circ (\cos 25^\circ \cos 35^\circ - \sin 25^\circ \sin 35^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

$$\begin{aligned} 61. & \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \\ & = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 10^\circ}{2 \cos 10^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{4 \cos 10^\circ} = \\ & = \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{8 \cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{8 \sin 80^\circ} = \frac{1}{8} = 0,125. \end{aligned}$$

Ответ: 0,125.

$$62. \cos^2 135^\circ - (\sin 80^\circ \cos 55^\circ + \cos 80^\circ \sin 55^\circ)^2 = \cos^2 135^\circ - \sin^2 135^\circ = \cos 270^\circ = 0.$$

Ответ: 0.

$$\begin{aligned} 63. & \frac{\cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 68^\circ \cdot \cos 8^\circ + \cos 82^\circ \cdot \cos 22^\circ} = \\ & = \frac{\cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\cos 68^\circ \cdot \cos 8^\circ + \sin 8^\circ \cdot \sin 68^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$64. \operatorname{tg} \left( 2 \cdot \operatorname{arccctg} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{tg} \left( 2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{tg} \pi = 0.$$

Ответ: 0.

$$\begin{aligned}
 65. & \frac{(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2}{\sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}} = \\
 & = \frac{\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta}{\sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}} = \\
 & = \frac{2 - 2 \cos(\alpha - \beta)}{2} = \frac{2 \cdot 2(1 - \cos(\alpha - \beta))}{2(1 - \cos(\alpha - \beta))} = 4.
 \end{aligned}$$

Ответ: 4.

$$\begin{aligned}
 66. & \cos 75^\circ + \cos 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\
 & = (\cos 75^\circ - \cos 15^\circ) + \cos 60^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\
 & = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,5.
 \end{aligned}$$

Ответ: 0,5.

$$\begin{aligned}
 67. & (\sin 35^\circ \cdot \cos 55^\circ + \cos 35^\circ \cdot \sin 55^\circ) + 6 \cdot \operatorname{tg}^2(55^\circ - 25^\circ) = \\
 & = \sin 90^\circ + 6 \cdot \operatorname{tg}^2 30^\circ = 1 + 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3.
 \end{aligned}$$

Ответ: 3.

$$\begin{aligned}
 68. & \left( \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} \right) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \\
 & = \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \\
 & = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = 2.
 \end{aligned}$$

Ответ: 2.

$$\begin{aligned}
 69. & \left( \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos^3(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} + 4 \operatorname{ctg} 2\alpha \right) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \\
 & = \left( \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 4 \operatorname{ctg} 2\alpha \right) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \\
 & = \left( -\frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + 4 \operatorname{ctg} 2\alpha \right) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = 2.
 \end{aligned}$$

Ответ: 2.

$$70. \frac{8 \sin 36^\circ (\cos 36^\circ - \sin 18^\circ)}{\cos 54^\circ} = \frac{4(\sin 72^\circ - 2 \sin 36^\circ \sin 18^\circ)}{\cos 54^\circ} =$$

$$= \frac{4(\cos 18^\circ - \cos 18^\circ + \cos 54^\circ)}{\cos 54^\circ} = 4.$$

Ответ: 4.

$$\begin{aligned} 71. \quad & \frac{\sqrt{3}}{\sin 40^\circ} + \frac{1}{\cos 40^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cos 40^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \\ & = \frac{2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 40^\circ + \frac{1}{2} \sin 40^\circ \right)}{\frac{1}{2} \sin 80^\circ} = \frac{2(\cos(40^\circ - 30^\circ))}{\frac{1}{2} \sin 80^\circ} = \frac{4 \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 4. \end{aligned}$$

Ответ: 4.

$$72. \text{ В силу формул } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \text{ справедлива цепочка равенств}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 75^\circ}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 105^\circ}} + \frac{\cos 75^\circ}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 105^\circ}} = \\ & = \sin 75^\circ \cdot |\cos 105^\circ| + \cos 75^\circ \cdot |\sin 105^\circ| = \\ & = -\sin 75^\circ \cos 105^\circ + \cos 75^\circ \sin 105^\circ = \\ & = \sin(105^\circ - 75^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5. \text{ При раскрытии модуля использовался} \\ & \text{ тот факт, что } \cos 105^\circ < 0, \text{ а } \sin 105^\circ > 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0,5.

$$\begin{aligned} 73. \quad & \left(1 - \frac{1}{\sin^2 63^\circ}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos^2 63^\circ}\right) = (1 - 1 - \operatorname{ctg}^2 63^\circ)(1 - 1 - \operatorname{tg}^2 63^\circ) = \\ & = \operatorname{ctg}^2 63^\circ \operatorname{tg}^2 63^\circ = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$\begin{aligned} 74. \quad & \cos 15^\circ \cos 45^\circ - \cos 45^\circ \cos 75^\circ = \cos 15^\circ \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \sin 15^\circ = \\ & = \cos 60^\circ = 0,5. \end{aligned}$$

Ответ: 0,5.

$$\begin{aligned} 75. \quad & \sqrt{3} \cos^2 75^\circ + \sqrt{3} \cos 165^\circ \sin 75^\circ = \sqrt{3} \cos^2 75^\circ - \sqrt{3} \sin^2 75^\circ = \\ & = \sqrt{3}(\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ) = \sqrt{3} \cos 150^\circ = -\sqrt{3} \cos 30^\circ = \\ & = -\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1,5. \end{aligned}$$

Ответ: -1,5.

$$76. \quad 16 \left( \cos^4 \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{6} \right) \sin^2 15^\circ =$$

$$\begin{aligned}
&= 16 \left( \frac{\left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right)^2}{4} + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{6} \right) \sin^2 15^\circ = \\
&= 4 \left( 1 + 2 \cos \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{6} \right) \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \\
&= 4 \left( 2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \right) = 4(2 + \sqrt{3}) \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \right) = 4 - 3 = 1.
\end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$\begin{aligned}
77. \quad &\frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 15^\circ \cos 105^\circ}{\sin 18^\circ \sin 63^\circ + \sin 108^\circ \sin 27^\circ} = \\
&= \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos 75^\circ \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ}{\sin 18^\circ \sin 63^\circ + \cos 18^\circ \cos 63^\circ} = \\
&= \frac{7 \cos 60^\circ}{\sqrt{2} \cos 45^\circ} = \frac{7 \cdot 1 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{7}{2} = 3,5.
\end{aligned}$$

Ответ: 3,5.

$$\begin{aligned}
78. \quad &\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \\
\cos 2\alpha &= \frac{1 - 0,04}{1 + 0,04} = \frac{0,96}{1,04} = \frac{12}{13}; \quad \frac{87}{3 + \frac{4 \cdot 12}{13}} = \frac{87 \cdot 13}{87} = 13.
\end{aligned}$$

Ответ: 13.

79. Из  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$  и  $0 < \alpha < \pi$  находим:

$$\alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}; \quad \alpha = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Тогда } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1.$$

Ответ: -1.

$$\begin{aligned}
80. \quad &\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \\
&= 2 \left( \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot \\
&\cdot \left( \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \right) \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left( \frac{2}{16} - \frac{2}{4} \cos^2 \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \\ & = \frac{1}{8} \left( 2 - 8 \left( 1 - \sin^2 \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right) = \frac{1}{8} \left( 2 - 8 \left( 1 - \frac{1}{4} \right) \right) = -0,5. \end{aligned}$$

Ответ:  $-0,5$ .

81.  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$ . Так как  $-\pi < x < 0$ , то  $\sin x < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin x = -\sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{-3}{\sqrt{13}}, \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-3}{\sqrt{13}} : \frac{-2}{\sqrt{13}} = 1,5,$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot 1,5}{1 - (1,5)^2} = \frac{3}{-1,25} = -2,4.$$

Ответ:  $-2,4$ .

82.  $1,2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 1,2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha = 1,2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1,2(1 - \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha} =$

$$= \frac{1,2 \left( 1 - \frac{1}{25} \right)}{\frac{1}{5}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 24}{5 \cdot 25} = 5,76.$$

Ответ:  $5,76$ .

83.  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}; 0 < x < \frac{\pi}{2}; \cos x = \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \operatorname{tg} x =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} : \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}; \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}; 3 \operatorname{tg} 2x = 4.$$

Ответ:  $4$ .

84.  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{17}}, 0 < x < \frac{\pi}{2}; \sin x = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}};$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{17}} : \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ:  $0,25$ .

85.  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}; 6\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha \cos(\pi - \alpha) = 6\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot (-\cos \alpha) =$

$$= -6\sqrt{3} \sin \alpha; \quad -6\sqrt{3} \sin(\operatorname{arctg} \sqrt{3}) = -6\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = -6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -9.$$

Ответ:  $-9$ .

$$\begin{aligned} 86. & \frac{(\cos 2x + 1) \cdot \operatorname{tg} x}{\cos 2x - 2 \sin(x + 4,5\pi) \cdot \sin(x + 9\pi)} = \\ & = \frac{2 \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}{\cos 2x + 2 \cos x \cdot \sin x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos 2x + \sin 2x} = \\ & = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \sin 2x} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}} = 0,5. \end{aligned}$$

Ответ:  $0,5$ .

$$\begin{aligned} 87. & \text{ При } \alpha = \frac{\pi}{4}: \quad \frac{\pi}{3} - \alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \text{ и } 2\alpha - \frac{5\pi}{12} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}. \\ & \text{ Тогда, используя формулу синуса двойного аргумента, получаем} \\ & 3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \cos\left(2\alpha - \frac{5\pi}{12}\right) = 3 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = \frac{3}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \\ & = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,75. \end{aligned}$$

Ответ:  $0,75$ .

$$\begin{aligned} 88. & \text{ При } \alpha = \frac{\pi}{3}: \quad \alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \text{ и } \frac{5\pi}{12} - \alpha = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}. \text{ Тогда,} \\ & \text{ используя формулу } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \text{ получаем} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (8 + 4\sqrt{3}) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) = (8 + 4\sqrt{3}) \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \\ & = (8 + 4\sqrt{3}) \sin^2 \frac{\pi}{12} = (8 + 4\sqrt{3}) \cdot \frac{1 - \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)}{2} = (8 + 4\sqrt{3}) \cdot \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \\ & = (4 + 2\sqrt{3}) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (4 + 2\sqrt{3}) \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1. \end{aligned}$$

Ответ:  $1$ .

$$\begin{aligned} 89. & \text{ Воспользовавшись формулами приведения и формулой синуса двойного аргумента, получаем } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(\pi - \alpha) = \\ & = -\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

**90.** Преобразуем выражение  $\frac{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha}{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}$ , используя формулы суммы синусов и суммы косинусов. Имеем,

$$\begin{aligned} & \frac{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha}{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha} = \\ & = \frac{(\cos \alpha + \cos 4\alpha) + (\cos 2\alpha + \cos 3\alpha)}{(\sin \alpha + \sin 4\alpha) + (\sin 2\alpha + \sin 3\alpha)} = \\ & = \frac{2 \cos \frac{5\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} + 2 \cos \frac{5\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{5\alpha}{2} \left(\cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)} = \\ & = \frac{2 \cos \frac{5\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} + 2 \sin \frac{5\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{5\alpha}{2} \left(\cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)} = \\ & = \operatorname{ctg} \frac{5\alpha}{2} = \operatorname{ctg} \frac{35\pi}{6} = \operatorname{ctg}\left(6\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}; (-\sqrt{3})^2 = 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

**91.** Применим формулу понижения степени и разности косинусов. Имеем,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{6} \left( \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{17\pi}{4} - \alpha\right) - 1 - \cos\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \left( \cos\left(\frac{17\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) \right) = \sqrt{6} \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \sin \frac{11\pi}{4}. \end{aligned}$$

Далее, воспользуемся формулами приведения и таблицей значений тригонометрических функций. Получим,

$$A = \sqrt{6} \cos \alpha \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \cos \alpha = \sqrt{3} \cos \frac{7\pi}{6} = -\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = -1,5.$$

Ответ: -1,5.

$$\begin{aligned} \mathbf{92.} \quad & (1 - \sqrt{3}) \sin 45^\circ \cos 15^\circ = (1 - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} (\sin 30^\circ + \sin 60^\circ) = \\ & = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}) \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{4} (1 - 3) = -\frac{2}{4} = -0,5. \end{aligned}$$

Ответ: -0,5.

$$\mathbf{93.} \quad 5(1 + \sin 2x) = 5(1 + 2 \sin x \cdot \cos x) = 5(1 + 2 \cdot 0,2) = 7.$$

Ответ: 7.

94. 1) Так как  $\operatorname{ctg} \alpha = 3$ , то  $\cos \alpha = 3 \sin \alpha$ . Пусть  $x = \sin \alpha (> 0)$ , тогда  $\sqrt{1-x^2} = 3x \Rightarrow 1-x^2 = 9x^2 \Rightarrow 10x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ .

$$\begin{aligned} 2) \sqrt{5} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha\right) = \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}}(3 \sin \alpha + \sin \alpha) = 4\sqrt{\frac{5}{2}} \sin \alpha = 4 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

$$95. \frac{1}{2} \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) - 3 \operatorname{tg} 9\pi = \frac{1}{2} \cdot 0 - (-1) - 0 = 1.$$

Ответ: 1.

$$96. \frac{16 \operatorname{tg} 18^\circ \cdot \cos^2(180^\circ - 18^\circ)}{-5(1 - 2 \sin^2 63^\circ)} = \frac{16 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ}{-5 \cos 126^\circ} = \frac{8 \sin 36^\circ}{5 \sin 36^\circ} = 1,6.$$

Ответ: 1,6.

97.  $\sin x = \frac{15}{17}$ ,  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . В силу  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  имеем  $\cos x < 0$  и тогда

$$\begin{aligned} \cos x &= -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{15^2}{17^2}} = -\frac{8}{17}; 1,5 - 3,4 \cos x = 1,5 + 1,6 = \\ &= 3,1. \end{aligned}$$

Ответ: 3,1.

$$\begin{aligned} 98. \frac{\operatorname{ctg} 21^\circ \cdot \sin^2(180^\circ + 21^\circ)}{2(1 - 2 \cos^2 24^\circ)} &= -\frac{\operatorname{ctg} 21^\circ \cdot \sin^2 21^\circ}{2 \cos 48^\circ} = \\ &= -\frac{\cos 21^\circ \cdot \sin 21^\circ}{2 \cos 48^\circ} = -\frac{\sin 42^\circ}{4 \cos 48^\circ} = -\frac{\sin 42^\circ}{4 \sin 42^\circ} = -0,25. \end{aligned}$$

Ответ: -0,25.

$$99. 1 - 5 \operatorname{ctg}^2 x \cdot \sin^2 x = 1 - 5 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \sin^2 x = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

$$100. 4 + 5 \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x} = 4 + \frac{5}{\cos^2 x} = 4 + \frac{5}{0,5^2} = 24.$$

Ответ: 24.

101. Так как  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , то  $\cos \alpha > 0$  и  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} =$

$$= \sqrt{1 - 0,36} = 0,8; \operatorname{tg}(\alpha + 7\pi) - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} \alpha + \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{0,6}{0,8} + 2 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 1,71.$$

Ответ: 1,71.

$$102. 5 \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + 2 \cos(\alpha + 3\pi) = 5 \cos \alpha - 2 \cos \alpha = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

103. Так как  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ , то  $\sin \alpha < 0$ .

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= -\sqrt{1 - \frac{5^2}{13^2}} = -\frac{12}{13}; 2 \operatorname{tg}(\alpha - 5\pi) + \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5} = -2,4. \end{aligned}$$

Ответ: -2,4.

$$104. 3 \sin(\alpha + 9\pi) + 4 \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -3 \sin \alpha + 4 \sin \alpha = \sin \alpha = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

$$\begin{aligned} 105. 2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 3 \sin^2(\alpha - \pi) &= -2 \sin \alpha + 3 \sin^2 \alpha = \\ &= -2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5^2 = -1 + 0,75 = -0,25. \end{aligned}$$

Ответ: -0,25.

$$\begin{aligned} 106. \sin 2\alpha - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(\pi - \alpha) + \cos^2(\alpha + \pi) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha - \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0,75. \end{aligned}$$

Ответ: 0,75.

$$107. 5 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = 5 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{\operatorname{tg} \alpha} = 1.$$

Ответ: 1.

$$108. \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + 3 \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha = 4.$$

Ответ: 4.

$$\begin{aligned} 109. 3 \cos(\pi - 2\alpha) - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -3 \cos 2\alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = \\ &= -3(1 - 2 \sin^2 \alpha) - \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -3(1 - 2 \cdot 0,4^2) - \frac{1 - 0,4^2}{0,4^2} = -7,29. \end{aligned}$$

Ответ: -7,29.

$$110. \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin 2x} = -\frac{\cos 2x}{\sin 2x} =$$

$$= -\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = 1.$$

Ответ: 1.

$$111. \text{ОДЗ: } x > 0. \text{ Преобразуем выражение: } 4^{\log_2 \sqrt{x}} + \frac{1}{x} = 2^{\log_2 x} + \frac{1}{x} =$$

$$= x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}. \text{ Подставим значение } x = 2 - \sqrt{3}: \frac{(2 - \sqrt{3})^2 + 1}{2 - \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{4(2 - \sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}} = 4.$$

Ответ: 4.

$$112. \frac{\sin x - \cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x} = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \sin x \cos x} = \frac{2}{2 + \sin 2x} = \frac{2}{2 + \sin \frac{\pi}{6}} = 0,8.$$

Ответ: 0,8.

$$113. \log_2 \cos \frac{\pi}{12} + \log_2 \cos \frac{\pi}{3} + \log_2 \cos \frac{5\pi}{12} =$$

$$= \log_2 \left( \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12} \right) + \log_2 \cos \frac{\pi}{3} =$$

$$= \log_2 \left[ \frac{1}{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) + \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) \right) \right] + \log_2 \frac{1}{2} =$$

$$= \log_2 \left[ \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{2} \right) \right] - 1 = \log_2 \frac{1}{4} - 1 = -3.$$

Ответ: -3.

$$114. \log_2 \sin 25^\circ - \log_2 \operatorname{tg} 45^\circ + \log_2 \sin 65^\circ - \log_2 \cos 40^\circ =$$

$$= \log_2 \frac{\sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ} - \log_2 1 = \log_2 \frac{\cos(25^\circ - 65^\circ) - \cos(25^\circ + 65^\circ)}{2 \cos 40^\circ} =$$

$$= \log_2 \frac{\cos 40^\circ - \cos 90^\circ}{2 \cos 40^\circ} = \log_2 \frac{1}{2} = -1.$$

Ответ: -1.

115. Запишем выражение в виде:

$$\log_{32} \sin \frac{5\pi}{8} + \log_{32} \sin \frac{6\pi}{8} + \log_{32} \sin \frac{7\pi}{8} = \log_{32} \left( \sin \frac{5\pi}{8} \cdot \sin \frac{6\pi}{8} \cdot \sin \frac{7\pi}{8} \right) =$$

$$= \log_{2^5} \left( \sin \frac{5\pi}{8} \cdot \sin \frac{6\pi}{8} \cdot \sin \frac{7\pi}{8} \right) = \frac{1}{5} \log_2 \left( \sin \frac{5\pi}{8} \cdot \sin \frac{6\pi}{8} \cdot \sin \frac{7\pi}{8} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Значение выражения } \sin \frac{5\pi}{8} \cdot \sin \frac{6\pi}{8} \cdot \sin \frac{7\pi}{8} &= \sin \frac{5\pi}{8} \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \sin \frac{7\pi}{8} = \\ &= \sin \frac{5\pi}{8} \cdot \sin \frac{7\pi}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \left( \cos \left( \frac{7\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} \right) - \cos \left( \frac{7\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} \right) \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Получим:

$$\frac{1}{5} \log_2 \left( \sin \frac{5\pi}{8} \cdot \sin \frac{6\pi}{8} \cdot \sin \frac{7\pi}{8} \right) = \frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \log_2 ((2)^{-2}) = -\frac{2}{5} = -0,4.$$

Ответ:  $-0,4$ .

116.  $5^{3x-1} \cdot 25^{7-5x} = 0,2$ ;  $5^{3x-1+14-10x} = 5^{-1}$ ;  $-7x + 13 = -1$ ;  $x = 2$ .

Ответ: 2.

117.  $8^{2x+3} - 4^{3x+2} = 62$ ;  $2^{6x+9} - 2^{6x+4} = 62$ ;  $2^{6x+4}(2^5 - 1) = 62$ ;  
 $2^{6x+4} \cdot 31 = 62$ ;  $2^{6x+4} = 2$ ;  $6x + 4 = 1$ ;  $x = -0,5$ .

Ответ:  $x = -0,5$ .

118.  $3^{x+3} - 2 \cdot 3^x = 675$ ;  $3^x(3^3 - 2) = 675$ ;  $3^x \cdot 25 = 675$ ;  $3^x = 27$ ;  $x = 3$ .

Ответ: 3.

119.  $725 - 4 \cdot 5^x = 5^{x+2}$ ;  $5^{x+2} + 4 \cdot 5^x = 725$ ;  $5^x(5^2 + 4) = 725$ ;  
 $5^x \cdot 29 = 725$ ;  $5^x = 25$ ;  $x = 2$ .

Ответ: 2.

120.  $3^{\log_5 6} = 6^{\log_5 x + \log_5 4}$ . ОДЗ:  $x > 0$ .

Так как  $3^{\log_5 6} = 6^{\log_5 3}$ , то  $6^{\log_5 3} = 6^{\log_5 4x}$ ;  $4x = 3$ ;  $x = \frac{3}{4}$ .

Ответ: 0,75.

121.  $8^{\ln \pi} = \pi^{\ln x - \ln 2}$ , ОДЗ:  $x > 0$ .  $8^{\ln \pi} = \pi^{\ln \frac{x}{2}}$ ;  $\pi^{\ln 8} = \pi^{\ln \frac{x}{2}}$ ;  $\frac{x}{2} = 8$ ;

$x = 16$ .

Ответ: 16.

122.  $2^{\log_3 6} \cdot x^{\log_3 2} = 8$ ;  $x > 0$ ,  $2^{\log_3 6} \cdot 2^{\log_3 x} = 2^3$ ;  $2^{\log_3 6 + \log_3 x} = 2^3$ ;  
 $2^{\log_3 6x} = 2^3$ ;  $\log_3 6x = 3$ ;  $6x = 27$ ;  $x = \frac{27}{6}$ ;  $x = 4,5$ .

Ответ: 4,5.

123.  $4^{x-2} + 2 \cdot 4^{x-1} = 9$ ;  $4^{x-2} \cdot (1 + 2 \cdot 4) = 9$ ;  $4^{x-2} \cdot 9 = 9$ ;  $4^{x-2} = 1$ ;  
 $4^{x-2} = 4^0 \Rightarrow x - 2 = 0$ ,  $x = 2$ .

Ответ: 2.

$$124. 13 \cdot 6^{x-2} = 30 + 32 \cdot 3^{x-2} \cdot 2^{x-4}, 13 \cdot 6^{x-2} = 30 + 32 \cdot 3^{x-2} \cdot 2^{x-2} \cdot 2^{-2},$$

$$13 \cdot 6^{x-2} = 30 + \frac{32}{4} \cdot (3 \cdot 2)^{x-2}, 13 \cdot 6^{x-2} = 30 + 8 \cdot 6^{x-2}, 5 \cdot 6^{x-2} = 30,$$

$$6^{x-2} = 6 \Rightarrow x - 2 = 1, x = 3.$$

Ответ: 3.

$$125. 9^x = 8 \cdot 3^{x+1} + 81; (3^2)^x - 8 \cdot 3 \cdot 3^x - 81 = 0; (3^x)^2 - 24 \cdot 3^x - 81 = 0.$$

Сделаем замену  $t = 3^x > 0$ . Тогда уравнение записывается в виде  $t^2 - 24t - 81 = 0$ ;  $t_{1,2} = 12 \pm \sqrt{144 + 81} = 12 \pm 15 \Rightarrow t_1 = 27, t_2 = -3 < 0 \Rightarrow t = 27$ . Следовательно,  $3^x = 27$ ;  $3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$ .

Ответ: 3.

$$126. 0,7^{2x} \cdot 0,7^{2-5x} - 4 \cdot 0,7^{1-3x} = -\frac{330}{49}; 0,7^{2x+2-5x} - 4 \cdot 0,7^{1-3x} = -\frac{330}{49};$$

$$0,7^{2-3x} - 4 \cdot 0,7^{1-3x} = -\frac{330}{49}; 0,7^{1-3x} \cdot 0,7 - 4 \cdot 0,7^{1-3x} = -\frac{330}{49};$$

$$0,7^{1-3x} \cdot \left(\frac{7}{10} - 4\right) = -\frac{330}{49}; 0,7^{1-3x} \cdot \left(-\frac{33}{10}\right) = -\frac{330}{49}; 0,7^{1-3x} = \frac{100}{49};$$

$$0,7^{1-3x} = \left(\frac{10}{7}\right)^2; 0,7^{1-3x} = 0,7^{-2} \Rightarrow 1 - 3x = -2; 3x = 3; x = 1.$$

Ответ:  $x = 1$ .

$$127. \text{Вынесем за скобку } 2^{2x+1}. \text{ Имеем: } 2^{2x+1}(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) = 240;$$

$$2^{2x+1}(1 + 2 + 4 + 8) = 240; 2^{2x+1} = 16; 2x + 1 = 4; x = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

$$128. \text{Представим каждое слагаемое в правой части в виде степени 5. Получим, } 5^{8x-4} + 5^{8x-3} + 5^{8x-2} + 5^{8x-1} = 6,24.$$

$$\text{Вынесем за скобку } 5^{8x-4}. \text{ Имеем: } 5^{8x-4}(1 + 5^1 + 5^2 + 5^3) = 6,24;$$

$$5^{8x-4}(1 + 5 + 25 + 125) = 6,24; 5^{8x-4} = \frac{1}{25}; 8x - 4 = -2; x = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

$$129. \text{ОДЗ: } 7 - 4x > 0, 4x < 7, x < \frac{7}{4}, x < 1,75.$$

Перейдём от уравнения к совокупности:

$$\left[ \begin{array}{l} \left(\frac{7}{13}\right)^{28x^2-5} = \left(\frac{7}{13}\right)^{127-5x^2}, \\ 7 - 4x = 1; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} 28x^2 - 5 = 127 - 5x^2, \\ 4x = 6; \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} 33x^2 = 132, \\ x = 1,5; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x^2 = 4, \\ x = 1,5; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x_1 = 2, x_2 = -2, \\ x = 1,5. \end{array} \right.$$

Из последней совокупности и ОДЗ следует, что корнями исходного уравнения являются только числа  $-2$  и  $1,5$ . Их произведение равно  $-2 \cdot 1,5 = -3$ .

*Ответ:*  $-3$ .

**130.** ОДЗ:  $2 - 2x^2 > 0$ ;  $x^2 < 1$ ;  $-1 < x < 1$ .

1)  $245 \cdot 5^{x-1} + 5 - 2 \cdot 5^{2x+1} = 0$ ;  $10 \cdot 5^{2x} - 49 \cdot 5^x - 5 = 0$ ;  
 $5^{2x} - 4,9 \cdot 5^x - 0,5 = 0$ . Замена:  $5^x = t$ ,  $t > 0$ ;  $t^2 - 4,9t - 0,5 = 0$ . По теореме, обратной теореме Виета  $t_1 = 5$ ,  $t_2 = -0,1$ .  $t_2 = -0,1$  не удовлетворяет условию  $t > 0$ .

Вернёмся к замене  $5^x = 5 \Rightarrow x = 1$ , но  $x = 1$  не входит в ОДЗ, значит не является корнем данного уравнения.

2)  $\log_{0,5}(2 - 2x^2) = 0$ ;  $2 - 2x^2 = 1$ ;  $x^2 = 0,5$ ;  $x_1 = \sqrt{0,5}$ ,  $x_2 = -\sqrt{0,5}$ . Числа  $\sqrt{0,5}$  и  $-\sqrt{0,5}$  принадлежат ОДЗ, следовательно, являются корнями данного уравнения. Их произведение равно  $-\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{0,5} = -0,5$ .

*Ответ:*  $-0,5$ .

**131.**  $\left(\frac{1}{81}\right)^{x-18} = (9^{-2})^{x-18} = 9^{36-2x}$ , поэтому исходное уравнение равносильно уравнению  $x^2 + x + 2 = 36 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 34 = 0$  — это уравнение имеет два корня, произведение которых по теореме Виета равно  $-34$ .

*Ответ:*  $-34$ .

**132.**  $\lg(x+3) = 2\lg 2 - \lg x \Rightarrow \lg(x+3) + \lg x = \lg 2^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \lg(x(x+3)) = \lg 4 \Rightarrow x^2 + 3x = 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1$ .  
*Проверка:*  $x = 1$ ,  $\lg(3+1) = \lg 4 = 2\lg 2 = 2\lg 2 - 0 = 2\lg 2 - \lg 1$ .  
 $x = -4$  не является корнем исходного уравнения, так как  $\lg(-4)$  не определён. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень  $x = 1$ .

*Ответ:*  $1$ .

**133.**  $\log_7 36 - \log_7(3x - 12) = \log_7 4$ ;  $\log_7(3x - 12) = \log_7 36 - \log_7 4$ ;  
 $\log_7(3x - 12) = \log_7 9$ ;  $3x - 12 = 9$ ;  $3x = 21$ ;  $x = 7$ .

*Проверка:*  $\log_7 36 - \log_7(3 \cdot 7 - 12) = \log_7 4$ ;  $\log_7 36 - \log_7 9 = \log_7 4$ ;  
 $\log_7 4 = \log_7 4$ .  $x = 7$  является корнем уравнения.

*Ответ:*  $7$ .

**134.**  $\log_5(8 - 24x) - \log_5 8 = \log_5 7$ ;  $\log_5(8 - 24x) = \log_5 56$ ;  $8 - 24x = 56$ ;  
 $24x = -48$ ;  $x = -2$ .

*Проверка:*  $\log_5(8 + 24 \cdot 2) - \log_5 8 = \log_5 7$ ;  $\log_5 56 - \log_5 8 = \log_5 7$ ;  $\log_5 56 - \log_5 8 = \log_5 7$ ;  $\log_5 7 = \log_5 7$ .  $x = -2$  является корнем уравнения.

*Ответ:*  $-2$ .

**135.**  $2 \cdot 16^x - 3 \cdot 4^x = 2$ ;  $2 \cdot (4^x)^2 - 3 \cdot 4^x = 2$ . Пусть  $4^x = t$ ,  $t > 0$ . Тогда  $2t^2 - 3t - 2 = 0$ ;  $t_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4}$ ;  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = -0,5$ . Заметим, что  $t_2$  не удовлетворяют условию  $t > 0$ .  $4^x = 2$ ;  $x = 0,5$ .

*Ответ:*  $0,5$ .

**137.**  $3^{2x+1} = 28 \cdot 3^x - 9$ . Сделаем замену  $3^x = t$ ,  $t > 0$ . Тогда  $3t^2 = 28t - 9$ ;  $3t^2 - 28t + 9 = 0$ ;  $t_{1,2} = \frac{14 \pm 13}{3}$ ;  $t_1 = 9$ ,  $t_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = 2$ ,  $x_2 = -1$ .

Произведение корней равно:  $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot (-1) = -2$ .

*Ответ:*  $-2$ .

**138.**  $\begin{cases} -\log_3 x + 3 \log_3 y = 1, \\ \log_3 x - \log_3 y = 1. \end{cases}$  Пусть  $\log_3 x = a$ ,  $\log_3 y = b$ , тогда система примет вид

$$\begin{cases} -a + 3b = 1, \\ a - b = 1; \end{cases} \quad a = 2, b = 1; \quad x = 9, y = 3.$$

Значение искомого выражения  $x - 2y = 3$ .

*Ответ:*  $3$ .

**139.** Из второго уравнения системы  $y = 3 \cdot 9^x$ . Подставим это значение в первое уравнение:  $5 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 3 \cdot 9^x = 0$ . Разделим это уравнение на  $9^x \neq 0$ . Получим  $5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 3 = 0$ . Обозначим  $\left(\frac{5}{3}\right)^x = t > 0$ .

Тогда  $5t^2 - 8t + 3 = 0$ . Корни этого уравнения  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = \frac{3}{5}$ . Значит,

$\left(\frac{5}{3}\right)^x = 1$ ,  $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5}$ ;  $x_1 = 0$  или  $x_2 = -1$ . Им соответствуют значения

$y_1 = 3$  и  $y_2 = \frac{1}{3}$ . Итак, имеем два решения  $(0; 3)$  и  $(-1; \frac{1}{3})$ . Наибольшей

суммой  $x + y$  будет  $0 + 3 = 3$ .

*Ответ:*  $3$ .

**140.** ОДЗ:  $x > 0$ .

$$9 \log_3 x - x^2 \log_3 x = 0; (9 - x^2) \log_3 x = 0;$$

а)  $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$ ,  $x_2 = 3$ . Заметим, что  $x_1 = -3$  не удовлетворяет ОДЗ.

б)  $\log_3 x = 0$ ;  $x_3 = 1$ .

Сумма корней равна:  $x_2 + x_3 = 4$ .

*Ответ:* 4.

**141.** Из второго уравнения найдём  $y = -4^{x+1}$  и подставим это значение в первое:  $14 \cdot 49^x - 18 \cdot 14^x + 4^{x+1} = 0$ ;  $14 \cdot 7^{2x} - 18 \cdot 7^x \cdot 2^x + 4 \cdot 2^{2x} = 0$ .

Разделим на  $2^{2x} \neq 0$ . Получим  $14 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{2x} - 18 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^x + 4 = 0$ . Обозначим

$\left(\frac{7}{2}\right)^x = t > 0$ . Тогда  $14t^2 - 18t + 4 = 0$ . Корни этого уравнения  $t_1 = 1$ ,

$t_2 = \frac{2}{7}$ . Значит:  $\left(\frac{7}{2}\right)^x = 1, x_1 = 0$ ;  $\left(\frac{7}{2}\right)^x = \frac{2}{7}; x_2 = -1$ . Им соответствуют

значения  $y_1 = -4$  и  $y_2 = -1$ . Итак, имеем два решения исходной системы  $(0; -4)$  и  $(-1; -1)$ . Наибольшей суммой  $x + y$  будет  $-2$ .

*Ответ:*  $-2$ .

**142.** Замена  $3^y = z$  приводит к системе  $\begin{cases} 9x^2 + z^2 = 6zx, \\ 7x + z = 30. \end{cases}$  Подставляя выраженное из второго уравнения  $z = 30 - 7x$  в первое уравнение системы, получим после преобразований уравнение  $x^2 - 6x + 9 = 0$ . Тогда  $x = 3$  и  $z = 30 - 7 \cdot 3 = 9$ . Итак,  $x + 3^y = x + z = 12$ .

*Ответ:* 12.

**143.** ОДЗ:  $x > 3$ .

$$2x \log_2(x-3) - 3 \log_2(x^2 - 6x + 9) = 4x - 12;$$

$$2x \log_2(x-3) - 6 \log_2(x-3) - 4(x-3) = 0; 2(x-3)(\log_2(x-3) - 2) = 0;$$

$x_1 = 3, x_2 = 7$ .  $x_1$  не принадлежит ОДЗ.

*Ответ:* 7.

**144.** ОДЗ:  $x > -2$ .

$$x^2 \log_3(x+2) - 9 \log_3(x+2) = 0; (x^2 - 9) \log_3(x+2) = 0.$$

а)  $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3$ . Заметим, что  $x_1 = -3$  не удовлетворяет ОДЗ.

$$\text{б) } \log_3(x+2) = 0 \Rightarrow x_3 = -1.$$

Сумма корней:  $x_2 + x_3 = 2$ .

*Ответ:* 2.

**145.** ОДЗ:  $x < 3$ .

$$25x \log_2(3-x) - x^3 \log_2(3-x) = 0; (25x - x^3) \log_2(3-x) = 0;$$

а)  $25x - x^3 = 0; x(25 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -5, x_3 = 5$ . Заметим, что  $x_3$  не удовлетворяет ОДЗ.

$$\text{б) } \log_2(3-x) = 0; 3-x = 1; x_4 = 2.$$

Сумма корней:  $x_1 + x_2 + x_4 = 0 - 5 + 2 = -3$ .

Ответ:  $-3$ .

$$146. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 3x + 1 > 0, \\ 3x + 1 \neq 1; \end{cases} \quad x \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty).$$

На области определения преобразуем уравнение к виду

$$4 \cdot \frac{1}{\log_2(3x+1)} - \log_2(3x+1) + 3 = 0. \text{ Выполнив замену } \log_2(3x+1) = t,$$

$$\text{получаем } t^2 - 3t - 4 = 0; t_1 = -1, t_2 = 4. \text{ Тогда } \begin{cases} \log_2(3x+1) = -1, \\ \log_2(3x+1) = 4; \end{cases}$$

$x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = 5$ . Оба корня принадлежат ОДЗ, но наибольшим является корень  $x = 5$ .

Ответ:  $5$ .

$$147. \log_4 \log_2\left(\frac{1}{x}\right) = 1; \log_2\left(\frac{1}{x}\right) = 4; \frac{1}{x} = 16; x = \frac{1}{16}.$$

Проверка:  $\log_4 \log_2 16 = \log_4 4 = 1$ . Таким образом,  $x = \frac{1}{16} = 0,0625$ .

Ответ:  $0,0625$ .

$$148. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$$\frac{2}{\log_3(x+1)} - 3 \log_3(x+1) + 5 = 0. \text{ Пусть } \log_3(x+1) = t, \text{ тогда}$$

$$\frac{2}{t} - 3t + 5 = 0, 3t^2 - 5t - 2 = 0; t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$\log_3(x+1) = 2, x+1 = 9, x = 8;$$

$$\log_3(x+1) = -\frac{1}{3}, x+1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, x = -1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}. \text{ Наибольший корень}$$

уравнения  $x = 8$ .

Ответ:  $8$ .

$$149. \lg(x^2 - 3x + 1) \lg(x - 1) = 0;$$

$$\text{а) } \lg(x^2 - 3x + 1) = 0; x^2 - 3x + 1 = 1; x_1 = 0, x_2 = 3.$$

$$\text{б) } \lg(x - 1) = 0; x - 1 = 1; x_3 = 2.$$

Проверка:

Для  $x_1 = 0$  не определено значение  $\lg(x - 1)$ , для  $x_2 = 3$ :

$\lg(9 - 9 + 1) \lg(3 - 1) = \lg 1 \cdot \lg 2 = 0$ ; для  $x_3 = 2$  не определено значение  $\lg(x^2 - 3x + 1)$ . Единственный корень  $x_2 = 3$ .

Ответ:  $3$ .

150.  $2^x \log_2 7 \cdot 7^{x^2+x} = 1$ ;  $7^x \cdot 7^{x^2+x} = 1$ ;  $7^{x^2+2x} = 7^0$ ;  $x^2 + 2x = 0$ ;  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$ . Наибольший корень  $x_1 = 0$ .

Ответ: 0.

151.  $\log_3(x-1) + \log_9(x-1) = 3$ ;  $\log_3(x-1) + \frac{1}{2}\log_3(x-1) = 3$ ;  
 $\log_3(x-1) = 2$ ;  $x-1 = 9$ ;  $x = 10$ .

Ответ: 10.

152. Перемножив уравнения системы, получим:  $21^{2x} = 21$ , откуда  $x = \frac{1}{2}$ .

Первое уравнение сводится к уравнению  $3^{x+y} = 7^{1-x}$ ; с учётом  $x = \frac{1}{2}$

получаем  $3^{x+y} = 7^{\frac{1}{2}}$ ;  $9^{x+y} = (3^{x+y})^2 = 7$ .

Ответ: 7.

153.  $2^{3x} \cdot 50^{3x} = 0,1 \cdot 10^{x^2+3}$ ;  $100^{3x} = 10^{x^2+2}$ ;  $10^{6x} = 10^{x^2+2}$ ;  $6x = x^2 + 2$ ;  
 $x^2 - 6x + 2 = 0$ ;  $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{7}$ ;  $x_1 + x_2 = 3 + \sqrt{7} + 3 - \sqrt{7} = 6$ ;

Ответ: 6.

154. Пусть  $2^x = t$ ,  $t > 0$ . Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 3y = 10 - t, \\ 3t^2 - 12y = 24. \end{cases}$$
 Подставим  $3y = 10 - t$  во второе уравнение системы:

$3t^2 + 4t - 64 = 0$ ;  $t_1 = -\frac{16}{3}$  — не удовлетворяет условию  $t > 0$ ;  $t_2 = 4$ .

Отсюда  $x = 2$ ,  $y = 2$ .  $4^{1,5x} - 6^y = 4^3 - 6^2 = 28$ .

Ответ: 28.

155. ОДЗ:  $\begin{cases} 2x + 6 > 0, \\ \frac{x-1}{x+3} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 > 0, \\ x - 1 > 0; \end{cases} \Rightarrow x > 1$ .

$\log_2 \frac{x-1}{x+3} + \log_2(2x-6) = 0$ ;  $\log_2 \frac{(x-1)(2x+6)}{x+3} = 0$ ;  $2(x-1) = 1$ ;  
 $x = 1,5$ .  $x = 1,5$  принадлежит ОДЗ.

Ответ: 1,5.

156.  $\begin{cases} 12^{x-y} \cdot 6^y = 10, \\ 2^{x-y} = \frac{5}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12^x}{10} = 2^y, \\ 2^y = \frac{3}{5} \cdot 2^x. \end{cases}$

Подставим  $2^y = \frac{3}{5} \cdot 2^x$  в первое уравнение системы:  $\frac{12^x}{10} = \frac{3}{5} \cdot 2^x$ , откуда  $x = 1$ . Имеем:  $12^{2x-y} \cdot 6^y = 12^{x-y} \cdot 6^y \cdot 12 = 120$ .

*Ответ:* 120.

**157.** По определению логарифма имеем:

$$\begin{cases} 1 - x > 0, \\ \log_{0,5}^2(1 - x) - \log_{0,5}(1 - x)^2 + \log_{0,5}|x - 1| = 2, \\ x < 1, \\ \log_{0,5}^2(1 - x) - 2\log_{0,5}(1 - x) + \log_{0,5}(1 - x) - 2 = 0, \\ x < 1, \\ \log_{0,5}^2(1 - x) - \log_{0,5}(1 - x) - 2 = 0. \end{cases}$$

Обозначив  $\log_{0,5}(1 - x) = t$ , получим  $t^2 - t - 2 = 0$ , откуда  $t = 2$  или  $t = -1$ . Тогда

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x < 1, \\ \log_{0,5}(1 - x) = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1, \\ 1 - x = \frac{1}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1, \\ x = \frac{3}{4}, \end{cases} \quad x = \frac{3}{4}. \\ 2) & \begin{cases} x < 1, \\ \log_{0,5}(1 - x) = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1, \\ 1 - x = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1, \\ x = -1, \end{cases} \quad x = -1. \end{aligned}$$

Наименьший корень равен  $-1$ .

*Ответ:*  $-1$ .

**158.**  $\cos 3x + \operatorname{ctg} x \cdot \sin 3x = \sin 4x$  на  $[0; 2\pi]$ .

ОДЗ:  $\sin x \neq 0$ ,  $x \neq \pi n$ .

$$\cos 3x + \frac{\sin 3x \cos x}{\sin x} = \sin 4x; \quad \sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x = \sin 4x \sin x;$$

$$\sin 4x(1 - \sin x) = 0;$$

$$1) \sin 4x = 0; \quad 4x = \pi n; \quad x = \frac{\pi n}{4}, \quad n \in Z.$$

$$2) \sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Объединение этих корней  $x = \frac{\pi n}{4}$ ,  $n \in Z$ . Выберем корни из  $[0; 2\pi]$ :

$0 \leq \frac{\pi n}{4} \leq 2\pi$ ;  $0 \leq \frac{n}{4} \leq 2$ ;  $0 \leq n \leq 8$ . Так как  $n \in Z$ , то  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ . Так как  $x \neq \pi n$ , то  $n \neq 0, 4, 8$ . Таким образом, при  $n = 1, 2, 3, 5, 6, 7$  корни принадлежат промежутку  $[0; 2\pi]$ . Всего 6 корней.

*Ответ:* 6.

**159.**  $\operatorname{tg} 2x \cos x + \sin x = \sin 3x$  на  $(0; 2\pi)$ .

ОДЗ:  $\cos 2x \neq 0$ ;  $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\frac{\sin 2x \cos x}{\cos 2x} + \sin x = \sin 3x; \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = \sin 3x \cos 2x;$$

$$\sin 3x(1 - \cos 2x) = 0;$$

$$1) \sin 3x = 0; 3x = \pi n; x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos 2x = 1; 2x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Общее решение } x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Выберем корни из промежутка  $(0; 2\pi)$ :  $0 < \frac{\pi n}{3} < 2\pi$ ;  $0 < \frac{n}{3} < 2$ ;

$0 < n < 6$ . Так как  $n$  — целое, то  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , то есть корни  $x_1 = \frac{\pi}{3}$ ;

$x_2 = \frac{2\pi}{3}$ ;  $x_3 = \pi$ ;  $x_4 = \frac{4\pi}{3}$ ;  $x_5 = \frac{5\pi}{3}$ . Полученные корни принадлежат

ОДЗ.

*Ответ:* 5 корней.

**160.** Пусть  $x_0$  — наименьший положительный корень данного уравнения.  $1 - 5 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 0$ ;  $\sin^2 x + \cos^2 x - 5 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 0$ ;  $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0$ . Разделим обе части уравнения на  $\cos^2 x \neq 0$ :  $\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x - 6 = 0$ . Обозначим  $\operatorname{tg} x = t$ .  $t^2 - 5t - 6 = 0$ ;  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 6$ .  $\operatorname{tg} x = -1$ ,  $\operatorname{tg} x = 6$ . Из рисунка 1 видно, что наименьшим положительным корнем является угол  $x_0$ , при котором  $\operatorname{tg} x_0 = 6$ .

*Ответ:* 6.

**161.** Пусть  $x_0$  — наименьший положительный корень данного уравнения.  $\sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 2 = 0$ ;  $\sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 0$ ;  $2 \cos^2 x - 7 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x = 0$ . Разделим обе части уравнения на  $\sin^2 x \neq 0$ :  $2 \operatorname{ctg}^2 x - 7 \operatorname{ctg} x + 3 = 0$ . Обозначим  $\operatorname{ctg} x = t$ .  $2t^2 - 7t + 3 = 0$ ;  $t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$ ,  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$ .  $\operatorname{ctg} x = 3$ ;  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$ .

Из рисунка 2 видно, что наименьшим положительным корнем является острый угол  $x_0$ , при котором  $\operatorname{ctg} x_0 = 3$ .

*Ответ:* 3.

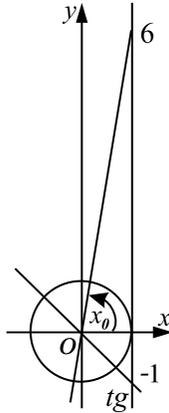


Рис. 1.

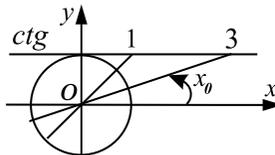


Рис. 2.

**162.** Пусть  $x_0$  — наименьший положительный,  $x_1$  — наибольший отрицательный корни данного уравнения.  $2 \cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$ ;  
 $2(1 + \cos 2x) - 3 \cos x = 0$ ;  $4 \cos^2 x - 3 \cos x = 0$ ;  $\cos x(4 \cos x - 3) = 0$ ;  
 $\cos x = \frac{3}{4}$ ,  $x = \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $\cos x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Из рисунка 3 видно, что  $x_0$  — наименьший положительный,  $x_1$  — наибольший отрицательный корни уравнения.  $x_0 = \arccos \frac{3}{4}$ ;  $x_1 = -\arccos \frac{3}{4}$ , тогда  $x_0 + x_1 = 0$ .

*Ответ:* 0.

**163.** Пусть  $x_0$  — наименьший положительный,  $x_1$  — наименьший положительный, лежащий во второй четверти, корни данного уравнения.  $2 \sin x + 3 \cos 2x - 3 = 0$ ;  $2 \sin x - 3(1 - \cos 2x) = 0$ ;  $2 \sin x - 3 \cdot 2 \sin^2 x = 0$ ;  
 $2 \sin x(1 - 3 \sin x) = 0$ ;  
 1)  $\sin x = 0$ ;  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  
 2)  $\sin x = \frac{1}{3}$ ;  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Из рисунка 4 видно,

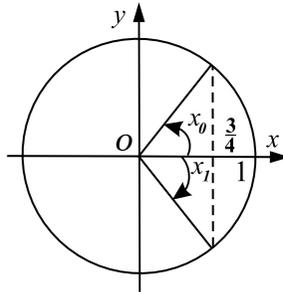


Рис. 3.

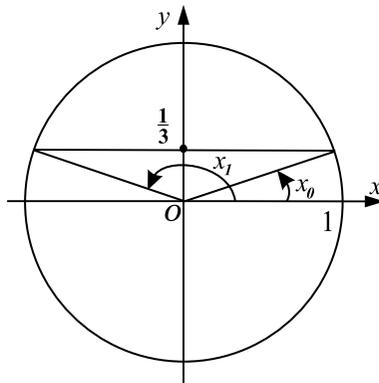


Рис. 4.

что  $x_0$  — наименьший положительный,  $x_1$  — наименьший положительный, лежащий во второй четверти, корни уравнения.

$$x_0 + x_1 = x_0 + (\pi - x_0) = \pi \approx 3.$$

*Ответ:* 3.

**164.** Задача сводится к нахождению количества корней данного уравнения, принадлежащих множеству  $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$ .

Решим уравнение.  $\cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x = 0;$   
 $\sin^2 x - \sin x = 0; \sin x(\sin x - 1) = 0.$

1)  $\sin x = 0; x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Из полученной серии корней принадлежат указанному множеству корни:  $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$ .

2)  $\sin x - 1 = 0; \sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Из этой серии корней принадлежит указанному множеству лишь  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Всего 4 корня.

*Ответ:* 4.

**165.** Задача сводится к нахождению количества корней данного уравнения, принадлежащих множеству  $\left[-\frac{7\pi}{3}; \frac{9\pi}{5}\right)$ .

$2 \cos 2x + 5 = 7 \cos x - 2 \sin^2 x$ ;  $2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 5 = 7 \cos x - 2 \sin^2 x$ ;  
 $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 5 = 0$ . Обозначим  $\cos x = t$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ .

$2t^2 - 7t + 5 = 0$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2,5$ ; 2,5 не принадлежит отрезку  $[-1; 1]$ .  
 $\cos x = 1$ ;  $x = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Из полученной серии принадлежат указанному множеству  $x = -2\pi$ ;  $x = 0$ . Всего 2 корня.

*Ответ:* 2.

**166.** Задача сводится к нахождению количества корней данного уравнения, принадлежащих множеству  $\left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ .

$\cos 4x + 2 \cos 2x + 1 = 0$ ;  $2 \cos^2 2x - 1 + 2 \cos 2x + 1 = 0$ ;

$2 \cos^2 2x + 2 \cos 2x = 0$ ;  $2 \cos 2x(\cos 2x + 1) = 0$ ;

1)  $\cos 2x = 0$ ;  $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Из получен-

ной серии корней указанному множеству принадлежат:  $x = -\frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ ,

$x = \frac{3\pi}{4}$ .

2)  $\cos 2x = -1$ ;  $2x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Из этой

серии указанному множеству принадлежат  $x = -\frac{\pi}{2}$ ;  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Всего 5 корней.

*Ответ:* 5.

**167.** Фактически требуется найти количество различных корней уравнения  $f(x) = g(x)$  на промежутке  $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ .

$4 \sin^4 x = 1 - 3 \cos 2x$ ;  $4 \sin^4 x = 1 - 3(1 - 2 \sin^2 x)$ ;

$4 \sin^4 x - 6 \sin^2 x + 2 = 0$ ;  $2 \sin^4 x - 3 \sin^2 x + 1 = 0$ .

Обозначим  $\sin^2 x = t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .  $2t^2 - 3t + 1 = 0$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$ .

1)  $\sin^2 x = 1$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Из полученной серии корней указанному промежутку принадлежат  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .

2)  $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ ;  $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Из полученной серии промежутку  $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$  принадлежат  $x = -\frac{3\pi}{4}$ ,  $x = -\frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Всего 5 корней.

*Ответ:* 5.

**168.** Фактически требуется найти количество различных корней уравнения  $f(x) = g(x)$  на промежутке  $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{4}\right)$ .

$$4 \cos^4 x = 3 \cos 2x + 1; \quad 4 \cos^4 x = 3(2 \cos^2 x - 1) + 1;$$

$$4 \cos^4 x - 6 \cos^2 x + 2 = 0; \quad 2 \cos^4 x - 3 \cos^2 x + 1 = 0.$$

Обозначим  $\cos^2 x = t$ ,  $t \in [0; 1]$ .  $2t^2 - 3t + 1 = 0$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$ .

1)  $\cos^2 x = 1$ ;  $\cos x = \pm 1$ ;  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Из этой серии корней указанному промежутку принадлежат:  $x = -4\pi$ ,  $x = -3\pi$ ,  $x = -2\pi$ .

2)  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ ;  $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Из этой серии промежутку  $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{4}\right)$  принадлежат  $x = -\frac{15\pi}{4}$ ,  $x = -\frac{13\pi}{4}$ ,  $x = -\frac{11\pi}{4}$ ,  
 $x = -\frac{9\pi}{4}$ ,  $x = -\frac{7\pi}{4}$ .

Всего 8 корней.

*Ответ:* 8.

**169.** Фактически требуется найти количество различных корней уравнения  $f(x) = g(x)$  на промежутке  $\left(-\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]$ .

$$8 \sin^4 x = \cos 2x + 2; \quad 8 \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x + 2; \quad 8 \sin^4 x + 2 \sin^2 x - 3 = 0.$$

Обозначим  $\sin^2 x = t$ ,  $t \in [0; 1]$ .  $8t^2 + 2t - 3 = 0$ ;  $t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{16} =$   
 $= \frac{-2 \pm 10}{16}$ ;  $t_1 = -\frac{3}{4}$ ;  $t_2 = \frac{1}{2}$ .  $t = -\frac{3}{4}$  не принадлежит отрезку  $[0; 1]$ .

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$ ;  $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Из этой серии корней

указанному промежутку принадлежат  $x = -\frac{3\pi}{4}$ ;  $x = -\frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

Всего 4 корня.

Ответ: 4.

170. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \pi x \neq \pi n, n \in Z, \\ -1 \leq \frac{x^2}{3} \leq 1, \\ \begin{cases} \sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg} \pi x - 1 = 0, \\ \arccos\left(\frac{x^2}{3}\right) - \frac{\pi}{3} = 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq n, n \in Z, \\ \frac{x^2}{3} \leq 1, \\ \begin{cases} \operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \arccos\left(\frac{x^2}{3}\right) = \frac{\pi}{3}; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq n, n \in Z, \\ -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \\ \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z, \\ \frac{x^2}{3} = \frac{1}{2}; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq n, n \in Z, \\ -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \\ \begin{cases} x = \frac{1}{3} + k, k \in Z, \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Из последней системы находим 6 корней исходного уравнения:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}, x_3 = -\frac{5}{3}, x_4 = -\frac{2}{3}, x_5 = \frac{1}{3}, x_6 = \frac{4}{3}.$$

Ответ: 6.

171.  $\cos 2x - \cos x + 1 = 2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = \cos x \cdot (2 \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Таким образом, на отрезке  $[-\pi; \pi]$  уравнение имеет 4 корня:  $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$ ,

$$x_{3,4} = \pm \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: 4.

172.  $\cos(\cos \pi x) = 1$ ;  $\cos \pi x = 2\pi k$ ,  $k \in Z$ . Так как множеством значений косинуса является промежуток  $[-1; 1]$ , то  $\cos \pi x = 0$ ;  $\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in Z$ ;

$$x = \frac{1}{2} + k, k \in Z.$$

Указанному промежутку принадлежит только  $x = 1,5$ .

Ответ: 1,5.

173.  $\sin \sin \pi x = 0$ ;  $\sin \pi x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Так как множеством значений синуса является промежуток  $[-1; 1]$ , то  $\sin \pi x = 0$ ;  $\pi x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $x = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Указанному промежутку принадлежит только  $x = 3$ .

Ответ: 3.

174. ОДЗ.  $\cos x \neq 0$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Запишем исходное уравнение в виде:  $\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} - 2 \sin x \cos x = 0$ .

Последнее уравнение на области определения ( $\cos x \neq 0$ ) равносильно уравнению:

$$\sin x (\cos x + 1 - 2 \cos^2 x) = 0;$$

$$\sin x (\cos x - 1) \left( \cos x + \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1, \\ \cos x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Их корни принадлежат ОДЗ исходного уравнения ( $\cos x \neq 0$ ). Найдём эти корни, построив графики (см. рис. 5):

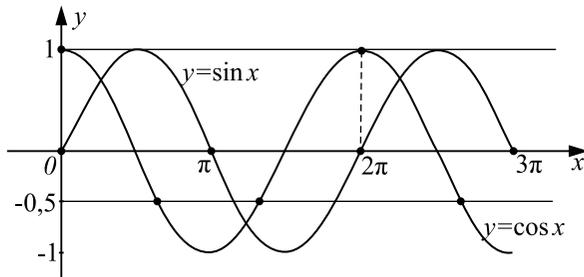


Рис. 5.

Делаем вывод: исходное уравнение на отрезке  $x \in [0; 3\pi]$  имеет 7 различных корней.

Ответ: 7.

175. ОДЗ:  $\sin x \neq 0$ . Решим исходное уравнение:

$$\frac{\cos x}{\sin x} - 2 \sin x \cos x = \cos x, \cos x (1 - 2 \sin^2 x - \sin x) = 0. \text{ Отсюда}$$

$\cos x = 0$  или  $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ . Из второго уравнения получим:  $\sin x = -1$ ,  $\sin x = \frac{1}{2}$ . Решения всех трех простейших тригонометрических уравнений удовлетворяют ОДЗ. Для того, чтобы ответить на поставленный в задаче вопрос, воспользуемся геометрической иллюстрацией (см. рис. 6).

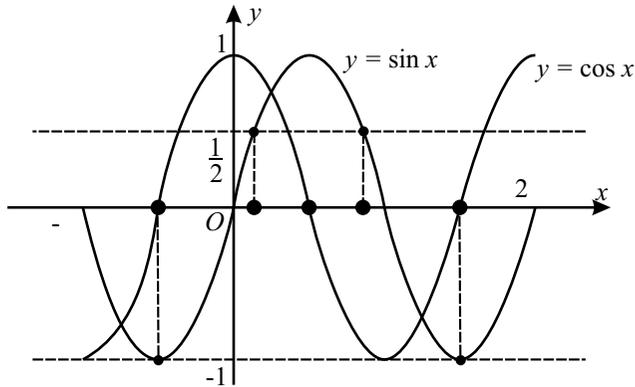


Рис. 6.

Вывод: на отрезке  $x \in [-\pi; 2\pi]$  исходное уравнение имеет 5 различных корней.

Ответ: 5.

**176.** Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin x(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \operatorname{tg} x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Отрезку  $[-2\pi; 2\pi]$  принадлежат следующие корни:  $x_1 = -2\pi$ ,  $x_2 = -\pi$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = \pi$ ,  $x_5 = 2\pi$ ,  $x_6 = -\frac{5\pi}{4}$ ,  $x_7 = -\frac{\pi}{4}$ ,  $x_8 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $x_9 = \frac{7\pi}{4}$ .

Ответ: 9.

**177.** Запишем исходное уравнение в виде:

$$(\sin x - \cos x)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \cos x = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, & n \in Z, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, & k \in Z. \end{cases}$$

Отрезку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$  принадлежат следующие корни:  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ ,  $x_3 = \frac{7\pi}{4}$ ,  $x_4 = \frac{9\pi}{4}$ ,  $x_5 = -\frac{\pi}{3}$ ,  $x_6 = \frac{\pi}{3}$ ,  $x_7 = \frac{7\pi}{3}$ .

*Ответ:* 7.

**178.** Сделаем замену  $\sin^2 x = t$ . Тогда имеем из ОДЗ:  $t \neq 0$ ,  $t \neq 1$ . Получим уравнение  $1 + \frac{t}{1-t} = 4t$ . После преобразований:  $4t^2 - 4t + 1 = 0$ ;

$(2t - 1)^2 = 0$ ;  $t = \frac{1}{2}$ . Теперь  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2t = 0$ .

*Ответ:* 0.

**179.** Сделаем замену  $\cos x = t$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ . Тогда ОДЗ:  $t \neq 0$ . Получим уравнение  $t + 1 = \frac{2}{t}$ . После преобразований:  $t^2 + t - 2 = 0$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = -2$ .  $t_2$  не удовлетворяет условию  $-1 \leq t \leq 1$ . Если  $\cos x = 1$ , то  $\sin x = 0$ , тогда  $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$ .

*Ответ:* 0.

**180.** Так как  $x = 0$  не является корнем данного уравнения, можно умножить уравнение на  $x^2$ :

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ,  $(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$ ,  $x^2 = 4$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ ;  $x^2 = 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ .  $x = -2$  — наименьший корень данного уравнения.

*Ответ:* -2.

**181.** Так как  $x = 0$  не является корнем данного уравнения, можно умножить уравнение на  $x^2$ :

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ ,  $(x^2 - 9)(x^2 - 1) = 0$ ,  $x^2 = 9$ ,  $x = -3$ ,  $x = 3$ ;  $x^2 = 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ .  $x = -3$  — наименьший корень данного уравнения.

*Ответ:* -3.

**182.**  $\sqrt{12x^2 + 4} = 6x + 10$ ;  $\sqrt{3x^2 + 1} = 3x + 5$ ;

$$\begin{cases} 3x^2 + 1 = 9x^2 + 30x + 25, \\ 3x + 5 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 30x + 24 = 0, \\ x \geq -\frac{5}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 4 = 0, \\ x \geq -\frac{5}{3}; \end{cases} \Rightarrow x = -1.$$

Ответ:  $-1$ .

$$183. \sqrt{0,5x^2 + 2} = \frac{x+2}{2}; \sqrt{2x^2 + 8} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 8 = x^2 + 4x + 4, \\ x + 2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0, \\ x \geq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0, \\ x \geq -2; \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

Ответ:  $2$ .

184.  $3x + 2\sqrt{2x^2 + 3x - 5} = 12$ ;  $2\sqrt{2x^2 + 3x - 5} = 12 - 3x$ ;  $12 - 3x \geq 0$ ,  $x \leq 4$ ;  $(2\sqrt{2x^2 + 3x - 5})^2 = (12 - 3x)^2$ ;  $4(2x^2 + 3x - 5) = 144 - 72x + 9x^2$ ;  $8x^2 + 12x - 20 = 144 - 72x + 9x^2$ ;  $x^2 - 84x + 164 = 0$ . По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 82$ ,  $x_2 = 2$ .  $x_1 = 82$  — не удовлетворяет условию  $x \leq 4$ . Проверка показывает:  $x_2 = 2$  — корень данного уравнения.

Ответ:  $2$ .

$$185. 3 + \sqrt{3x^2 - 8x + 14} = 2x; \sqrt{3x^2 - 8x + 14} = 2x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x + 14 = 4x^2 - 12x + 9, \\ 2x - 3 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0, \\ x \geq 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 5, \end{cases} \\ x \geq 1,5; \end{cases} \Rightarrow x = 5.$$

Ответ:  $5$ .

$$186. \sqrt{x^4 - 11x^2 - x + 30} = 6 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 11x^2 - x + 30 = 36 - 12x^2 + x^4, \\ 6 - x^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ |x| \leq \sqrt{6}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 3, \end{cases} \\ |x| \leq \sqrt{6}; \end{cases} \Rightarrow x = -2.$$

Ответ:  $-2$ .

$$187. \sqrt{5x+4} - \sqrt{x+3} = 1; (\sqrt{5x+4})^2 = (1 + \sqrt{x+3})^2;$$

$$5x+4 = 1 + 2\sqrt{x+3} + x+3; 2\sqrt{x+3} = 4x; \sqrt{x+3} = 2x; \begin{cases} x \geq 0, \\ x+3 = 4x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 4x^2 - x - 3 = 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 1, x = -\frac{3}{4}; \end{cases} x = 1.$$

Ответ:  $x = 1$ .

188.  $\sqrt{15x^2 - 7x + 8} = 4x$ . Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 15x^2 - 7x + 8 = 16x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + 7x - 8 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \begin{cases} x = -8, \\ x = 1; \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \\ x = 1. \end{array}$$

Ответ: 1.

**189.**  $\sqrt{x^2 + x} = 2 - x$ ;  $x^2 + x = 4 - 4x + x^2$ ;  $5x = 4$ ;  $x = 0,8$ .

Проверка:  $\sqrt{0,64 + 0,8} = 2 - 0,8$ ;  $\sqrt{1,44} = 1,2$  — верное равенство.

Ответ:  $x = 0,8$ .

**190.**  $2x - \sqrt{x^4 - 45} = 0$ ;  $\sqrt{x^4 - 45} = 2x$ . При  $x \geq 0$  имеем  $x^4 - 45 = 4x^2$ ;  $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$ . Пусть  $x^2 = t$ , где  $t \geq 0$ ;  $t^2 - 4t - 45 = 0$ ;  $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 45} = 2 \pm 7$ ;  $t_1 = 9$ ,  $t_2 = -5$ .  $t_2 = -5$  не удовлетворяет условию  $t \geq 0$ .  $x^2 = 9$ ;  $x_{1,2} = \pm 3$ ;  $x_2 = -3$  не удовлетворяет условию  $x \geq 0$ .

При  $x = 3$ :  $2 \cdot 3 - \sqrt{3^4 - 45} = 0$ ;  $0 = 0$ , значит,  $x = 3$  является корнем исходного уравнения.

Ответ: 3.

**191.** Исходное уравнение равносильно системе  $\begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ -x + 3 = (1 - x)^2, \end{cases}$  откуда  $\begin{cases} x \leq 1, \\ -x + 3 = x^2 - 2x + 1; \end{cases}$   $\begin{cases} x \leq 1, \\ x^2 - x - 2 = 0; \end{cases}$   $\begin{cases} x \leq 1, \\ x = -1; x = 2; \end{cases}$   $x = -1$ .

Ответ: -1.

**192.**  $3 - \sqrt{6x + 19} = 2x$ ;  $3 - 2x = \sqrt{6x + 19} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x \geq 0, \\ (3 - 2x)^2 = 6x + 19; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1,5, \\ 9 - 12x + 4x^2 = 6x + 19; \end{cases} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1,5, \\ 4x^2 - 18x - 10 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1,5, \\ 2x^2 - 9x - 5 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1,5, \\ x_{1,2} = \frac{9 \pm 11}{4}; \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1,5, \\ \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = -0,5; \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x = -0,5.$

Ответ: -0,5.

**193.** Сделаем замену  $t = \sqrt{\frac{5x + 4}{3x - 2}}$ , тогда  $t > 0$  и  $\sqrt{\frac{3x - 2}{5x + 4}} = \frac{1}{t}$ . Уравнение примет вид  $4t - \frac{5}{t} = 8$ . Решаем уравнение и получаем корни  $t = \frac{5}{2}$

и  $t = -\frac{1}{2}$ . Второй корень не удовлетворяет условию  $t > 0$ . Вернёмся к

переменной  $x$ . Получим  $\sqrt{\frac{5x+4}{3x-2}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{5x+4}{3x-2} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = 1,2$ .

*Ответ:* 1,2.

**194.**  $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+3} = -1$ ;  $\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{2x+3}$ ;  
 $x+1+2\sqrt{x+1}+1 = 2x+3$ ;  $2\sqrt{x+1} = x+1$ ;  $\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-2) = 0$ ;  
 $x = -1$ ,  $x = 3$ . Сумма корней равна  $-1+3 = 2$ .

*Ответ:* 2.

**195.** Возведём обе части первого уравнения в квадрат, выразим  $x$  через  $y$  и подставим полученное выражение во второе уравнение.

$$x - 2y + 2 = 4; x = 2y + 2.$$

$$\sqrt{y-2(2y+2)+11} = 2y+2-5;$$

$$\sqrt{-3y+7} = 2y-3 \quad (1); \quad 7-3y = 4y^2-12y+9; \quad 4y^2-9y+2 = 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{8}; \quad y_1 = 2, \quad y_2 = \frac{1}{4}. \quad y_1 = 2 \text{ является корнем урав-}$$

нения (1);  $y_2 = \frac{1}{4}$  не является корнем уравнения (1), так как его правая

часть отрицательна при  $y_2 = \frac{1}{4}$ .  $x = 2y + 2$ ;  $x = 2 \cdot 2 + 2 = 6$ .

*Проверка:*  $x = 6$ ,  $y = 2$ .

$$1) \sqrt{6-2 \cdot 2+2} = 2; 2 = 2; \text{ верно.}$$

$$2) \sqrt{2-2 \cdot 6+11} = 1; 1 = 1; \text{ верно.}$$

Таким образом,  $(6; 2)$  — решение данной системы уравнений.  $x_0 \cdot y_0 = 6 \cdot 2 = 12$ .

*Ответ:* 12.

**196.** Возведём обе части первого уравнения в квадрат, выразим  $x$  через  $y$  и подставим полученное выражение во второе уравнение.

$$x + y - 1 = 1; x = 2 - y.$$

$$\sqrt{2-y-y+2} = 2y-2; \sqrt{4-2y} = 2y-2.$$

Левая часть уравнения неотрицательна, тогда для правой части выполняется неравенство  $2y-2 \geq 0$ ,  $y \geq 1$ .

$$4-2y = 4y^2-8y+4; 4y^2-6y = 0; y_1 = 0, y_2 = 1,5.$$

$y_1 = 0$  не удовлетворяет условию  $y \geq 1$ .

$y_2 = 1,5$  удовлетворяет условию  $y \geq 1$ .

*Проверка:*  $x = 0,5$ ,  $y = 1,5$ .

$$1) \sqrt{0,5+1,5-1} = 1; 1 = 1; \text{ верно.}$$

$$2) \sqrt{0,5 - 1,5 + 2} = 1; 1 = 1; \text{ верно.}$$

Таким образом,  $(0,5; 1,5)$  — решение данной системы уравнений.

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{1,5}{0,5} = 3.$$

Ответ: 3.

$$197. \begin{cases} 2x = -\sqrt{y^2 - 5}, \\ |x - 1| = y - 3; \end{cases}$$

Из первого уравнения системы:  $x \leq 0$ . Тогда  $x - 1 < 0$ ;  $x < 1$ ;  
 $x - 1 = 3 - y$ ;  $x = 4 - y$ . Подставляем это выражение в первое уравнение системы:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 - 5} = 2y - 8 &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 5 = 4y^2 - 32y + 64, \\ 2y - 8 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 32y + 69 = 0, \\ y \geq 4; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 207}}{3}, \\ y \geq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y_1 = 3, \\ y_2 = \frac{23}{3}, \\ y \geq 4; \end{cases} &\Rightarrow y = \frac{23}{3}; x = 4 - y = -\frac{11}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

$x = -\frac{11}{3}$  — удовлетворяет условию  $x < 1$ .

Проверка:  $x = -\frac{11}{3}$ ,  $y = \frac{23}{3}$ .

$$1) \sqrt{\frac{529}{9} - 5} - \frac{22}{3} = \sqrt{\frac{484}{9} - \frac{22}{3}} = 0; 0 = 0; \text{ верно.}$$

$$2) \sqrt{\frac{121}{9} + \frac{22}{3} + 1} = \sqrt{\frac{121 + 66 + 9}{9}} = \frac{14}{3}; \frac{23}{3} - 3 = \frac{14}{3}; \frac{14}{3} = \frac{14}{3}; \text{ верно.}$$

Таким образом,  $(-\frac{11}{3}; \frac{23}{3})$  — решение данной системы уравнений.

$$x_0 + y_0 = -\frac{11}{3} + \frac{23}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Ответ: 4.

$$198. \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} + y = 1, \\ |y + 3| + x = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3 = 4 - \sqrt{25 - x^2}, \\ |y + 3| = 5 - x. \end{cases}$$

$$1) y + 3 \geq 0, y \geq -3.$$

$$y + 3 = 5 - x, 5 - x = 4 - \sqrt{25 - x^2}.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{25-x^2} = x-1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 25-x^2 = x^2-2x+1, \\ x-1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-2x-24=0, \\ x \geq 1; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-12=0, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3, x_2 = 4, \\ x \geq 1; \end{cases} &\Rightarrow x = 4. \\ y+3 = 5-4, &y = -2. \end{aligned}$$

$y = -2$  удовлетворяет условию  $y \geq -3$ .

2)  $y+3 < 0$ ;  $y < -3$ .

$$y+3 = x-5; x-5 = 4 - \sqrt{25-x^2}.$$

$$\sqrt{25-x^2} = 9-x \Leftrightarrow \begin{cases} 25-x^2 = 81-18x+x^2, \\ 9-x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-18x+56=0, \\ x \leq 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9x+28=0, \\ x \leq 9; \end{cases} \text{ решений нет, так как}$$

уравнение  $x^2-9x+28=0$  не имеет действительных корней ( $D = 81 - 28 \cdot 4$ ,  $D < 0$ ). Проверка:  $x = 4$ ,  $y = -2$ .

1)  $\sqrt{25-16} - 2 = 1$ ;  $1 = 1$ ; верно.

2)  $\sqrt{4-12+9} + 4 = 5$ ;  $5 = 5$ ; верно.

Таким образом,  $(4; -2)$  — решение данной системы уравнений.

$$x_0 + y_0 = 4 - 2 = 2.$$

Ответ: 2.

$$199. \begin{cases} \sqrt{8-x^2} - y = 0, \\ |y+1| = x+5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{8-x^2} = y, \\ |y+1| = x+5. \end{cases}$$

Из первого уравнения:  $y \geq 0$ . Следовательно,  $y+1 > 0$  и  $|y+1| = y+1$ .

$$y+1 = x+5; \sqrt{8-x^2} + 1 = x+5.$$

$$\sqrt{8-x^2} = x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x^2 = x^2+8x+16, \\ x+4 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+8x+8=0, \\ x+4 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+4=0, \\ x+4 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x \geq -4; \end{cases} \Rightarrow x = -2.$$

$$y+1 = -2+5, y = 2.$$

$y = 2$  удовлетворяет условию  $y \geq -1$ .

Проверка:  $x = -2$ ,  $y = 2$ .

1)  $\sqrt{8-4} - 2 = 0$ ;  $0 = 0$ ; верно.

2)  $\sqrt{4+4+1} = 3$ ;  $3 = 3$ ; верно.

Таким образом,  $(-2; 2)$  — решение данной системы уравнений.

$$x_0 + y_0 = -2 + 2 = 0.$$

Ответ: 0.

$$200. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Замена:  $\sqrt{x} = a, a \geq 0; \sqrt{y} = b, b \geq 0.$

$$\begin{cases} a + b = 5, \\ 2a^2 - 3b^2 = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - b, \\ 2(5 - b)^2 - 3b^2 = 6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - b, \\ 50 - 20b + 2b^2 - 3b^2 = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - b, \\ b^2 + 20b - 44 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - b, \\ \begin{cases} b_1 = -22, \\ b_2 = 2. \end{cases} \end{cases}$$

Заметим, что  $b_1 = -22$  не удовлетворяет условию  $b \geq 0$ ,  $b_2 = 2$  удовлетворяет условию  $b \geq 0$ .

$a = 5 - 2 = 3$ .  $a = 3$  удовлетворяет условию  $a \geq 0$ .

Вернёмся к замене.

$\sqrt{x} = 3, x = 9; \sqrt{y} = 2, y = 4.$

Оба числа 4 и 9 принадлежат ОДЗ.

Итак,  $(9; 4)$  — решение данной системы уравнений.

$$x_0 - y_0 = 9 - 4 = 5.$$

Ответ: 5.

$$201. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Замена:  $\sqrt{x} = a, a \geq 0; \sqrt{y} = b, b \geq 0.$

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ 4a^2 - 8b^2 = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ 4(1 + b)^2 - 8b^2 = 7; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ 4 + 8b + 4b^2 - 8b^2 = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ 4b^2 - 8b + 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ b_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ \begin{cases} b_1 = 0,5, \\ b_2 = 1,5. \end{cases} \end{cases}$$

Оба числа 0,5 и 1,5 удовлетворяют условию  $b \geq 0$ .

$a_1 = 1 + 0,5 = 1,5; a_2 = 1 + 1,5 = 2,5.$

Вернёмся к замене.

1)  $\sqrt{x} = 1,5; x = 2,25; \sqrt{y} = 0,5; y = 0,25.$

Пара  $(2,25; 0,25)$  принадлежит ОДЗ, но не удовлетворяет условию

$x_0 \cdot y_0 > 1.$

2)  $\sqrt{x} = 2,5; x = 6,25; \sqrt{y} = 1,5; y = 2,25.$

Числа 6,25 и 2,25 принадлежат ОДЗ и удовлетворяют условию  $x_0 \cdot y_0 > 1$ .

$$x_0 - y_0 = 6,25 - 2,25 = 4.$$

Ответ: 4.

**202.**  $\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{(5-3x)^2}$ ;  $|x-2| = |5-3x|$ ;  $x-2 = 3x-5$  или  $x-2 = 5-3x \Leftrightarrow -2x = -3$ ,  $x_1 = \frac{3}{2}$ ;  $4x = 7$ ,  $x_2 = \frac{7}{4}$ ;

$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{7}{4} - \frac{6}{4} \right| = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

**203.**  $\sqrt{(3-x)^2} = \sqrt{(4x-1)^2}$ ;  $|3-x| = |4x-1|$ ;  $\begin{cases} 3-x = 4x-1, \\ 3-x = 1-4x; \end{cases} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+x=4, \\ 3x=-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0,8, \\ x=-\frac{2}{3}; \end{cases} \quad 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 0,8 = -1,6.$

Ответ: -1,6.

**204.** Возведём обе части уравнения в квадрат:  $128 - x^2 = (-x)^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 128 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 128 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8.$

Проверка:  $x = -8$ ,  $\sqrt{128 - (-8)^2} = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8 = -(-8).$

$x = 8$  не является корнем, так как  $\sqrt{128 - 8^2} = \sqrt{128 - 64} = 8 \neq -8.$

Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень  $x = -8.$

Ответ: -8.

**205.**  $x - 6 = \sqrt{8-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6 \geq 0, \\ x^2 - 12x + 36 = 8-x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6, \\ x^2 - 11x + 28 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6, \\ \begin{cases} x_1 = 7, \\ x_2 = 4; \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x = 7.$$

Ответ: 7.

**206.**  $x - 3 = \sqrt{9-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x^2 - 6x + 9 = 9-x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2 - 5x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 5; \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x = 5.$$

Ответ: 5.

**207.** ОДЗ:  $x \geq 1.$

$x\sqrt{x-1} = x^2\sqrt{x-1}$ ;  $(x^2 - x)\sqrt{x-1} = 0$ ;  $x(x-1)\sqrt{x-1} = 0$ ;  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ .  $x_1 = 0$  не удовлетворяет ОДЗ, значит исходное уравнение имеет

единственный корень  $x = 1$ .

Ответ: 1.

**208.** Возведём исходное уравнение в квадрат:  $5x^3 + 4x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$ ;  
 $5x^3 + 3x^2 - 2x = 0$ ;  $x(5x^2 + 3x - 2) = 0$ ;  $5x(x + 1)\left(x - \frac{2}{5}\right) = 0$ . Отсюда

$x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = \frac{2}{5}$ . Если  $x$  — корень исходного уравнения, то должно выполняться условие  $-x - 1 \geq 0$ . Этому условию удовлетворяет только  $x = -1$ .

Ответ: -1.

**209.** ОДЗ:  $\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x^2 + x - 6 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ (x + 3)(x - 2) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3, \\ \left[ \begin{array}{l} x \leq -3, \\ x \geq 2; \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \{-3\} \cup [2; +\infty).$

$x\sqrt{x+3} - 3\sqrt{x^2+x-6} = 0$ ;

1)  $\sqrt{x+3}(x - 3\sqrt{x-2}) = 0$ ;  $x_1 = -3$  — принадлежит ОДЗ и является корнем.

2)  $\sqrt{x+3} = 0$ ;  $x - 3\sqrt{x-2} = 0$ ;  $x^2 = 9(x-2)$ ;

$x^2 - 9x + 18 = 0$ ;  $x_{2,3} = \frac{9 \pm 3}{2}$ ;  $x_2 = 6$ ,  $x_3 = 3$ . Заметим, что оба корня входят в ОДЗ. Сумма корней равна  $x_1 + x_2 + x_3 = -3 + 6 + 3 = 6$ .

Ответ: 6.

**210.**  $3\sqrt{x+2} + \sqrt{x(x+4)+4} = 10$ ;  $3\sqrt{x+2} + \sqrt{(x+2)^2} = 10$ . Пусть  $t = \sqrt{x+2} \geq 0$ , тогда  $t^2 + 3t - 10 = 0$ ;  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = -5$ . Условию  $t \geq 0$  удовлетворяет только корень  $t_1 = 2$ . Тогда  $\sqrt{x+2} = 2$ ,  $x = 2$ .

Ответ: 2.

**211.** ОДЗ:  $\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 6x + 8 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ (x - 2)(x - 4) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ \left[ \begin{array}{l} x \leq 2, \\ x \geq 4; \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \{2\} \cup [4; +\infty).$

$5\sqrt{x^2 - 6x + 8} - x\sqrt{x-2} = 0$ ;

$5\sqrt{x-2}\sqrt{x-4} - x\sqrt{x-2} = 0$ ;  $\sqrt{x-2}(5\sqrt{x-4} - x) = 0$ .

1)  $\sqrt{x-2} = 0$ ,  $x = 2$ .  $x = 2$  принадлежит ОДЗ и является корнем исходного уравнения.

2)  $5\sqrt{x-4} = x$ ;  $x^2 - 25x + 100 = 0$ ;  $x_2 = 20$ ,  $x_3 = 5$ . Оба корня принадлежат ОДЗ.

Сумма корней равна  $x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 20 + 5 = 27$ .

Ответ: 27.

212. ОДЗ:  $x \geq 0$ .

$(2\sqrt{3x})^2 + 3x = 45; 4 \cdot 3x + 3x = 45; x = 3$  — принадлежит ОДЗ.

Ответ: 3.

213. ОДЗ:  $\begin{cases} 2x - 3 \geq 3, \\ x + 1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 3, \\ x \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1,5$ .

$$\sqrt{2x-3}(\sqrt{x+1}-2) = 5\sqrt{x+1}-10;$$

$$\sqrt{2x-3}(\sqrt{x+1}-2) = 5(\sqrt{x-1}-2);$$

$$(\sqrt{2x-3}-5)(\sqrt{x+1}-2) = 0;$$

а)  $\sqrt{2x-3} = 5; 2x - 3 = 25; x_1 = 14$ .  $x_1 = 14$  принадлежит ОДЗ.

б)  $\sqrt{x+1} = 2; x_2 = 3$  — принадлежит ОДЗ.

Сумма корней равна  $x_1 + x_2 = 14 + 3 = 17$ .

Ответ: 17.

214. ОДЗ:  $\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ x - 1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$ .

$$\sqrt{x+2}(\sqrt{x-1}-2) = 3\sqrt{x-1}-6;$$

$$\sqrt{x+2}(\sqrt{x-1}-2) = 3(\sqrt{x-1}-2); (\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x-1}-2) = 0;$$

а)  $\sqrt{x+2} = 3; x_1 = 7$  — принадлежит ОДЗ.

б)  $\sqrt{x-1} = 2; x_2 = 5$  — принадлежит ОДЗ.

Сумма корней равна  $x_1 + x_2 = 7 + 5 = 12$ .

Ответ: 12.

215. ОДЗ:  $x \geq -3$ .

$$x^2\sqrt{x+3} + 5x\sqrt{x+3} = 0; (x^2 + 5x)\sqrt{x+3} = 0; x(x+5)\sqrt{x+3} = 0;$$

$x_1 = 0, x_2 = -3$  — принадлежат ОДЗ,  $x_3 = -5$  — не принадлежит в ОДЗ.

Сумма корней равна  $x_1 + x_2 = 0 - 3 = -3$ .

Ответ: -3.

216. ОДЗ:  $x > -3$ . Сделаем замену  $\sqrt{x+3} = t, t > 0$ , получим  $3t^2 - 8t - 3 = 0$ ;

$t_1 = 3, t_2 = -\frac{1}{3}$  — не удовлетворяет условию  $t > 0$ .  $\sqrt{x+3} = 3, x = 6$ .

Ответ: 6.

217. ОДЗ.  $2x - 1 \geq 0; x \geq \frac{1}{2}$ .  $(3x^2 - 2)\sqrt{2x-1} - x\sqrt{2x-1} = 0$ ;

$$\sqrt{2x-1}(3x^2 - x - 2) = 0; \sqrt{2x-1}(3x+2)(x-1) = 0;$$

$$\left[ \begin{array}{l} \sqrt{2x-1} = 0; \\ (3x+2)(x-1) = 0; \end{array} \right. \left[ \begin{array}{l} 2x-1 = 0; \\ 3x+2 = 0; \\ x-1 = 0; \end{array} \right. ; \left[ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}, \\ x = -\frac{2}{3}, \\ x = 1. \end{array} \right. \quad x = -\frac{2}{3} \text{ не удовлетв-}$$

воряет ОДЗ, значит не является корнем исходного уравнения.

Сумма корней равна  $\frac{1}{2} + 1 = 1,5$ .

*Ответ:* 1,5.

**218.** ОДЗ:  $x > 1,5$ . Сделав замену  $\sqrt{2x-3} = t, t \geq 0$ , получим:

$$t - \frac{6}{t} + 1 = 0; \quad t^2 + t - 6 = 0; \quad t_1 = -3 \text{ — не удовлетворяет условию } t \geq 0, \quad t_2 = 2. \quad \sqrt{2x-3} = 2, \quad x = 3,5.$$

*Ответ:* 3,5.

**219.** Запишем уравнение в виде  $\sqrt{x-3} = x-3$  и возведём его в квадрат:  $x-3 = (x-3)^2$ ;  $(x-3)^2 - (x-3) = 0$ ;  $(x-3)(x-4) = 0$ . Отсюда:  $x_1 = 3, x_2 = 4$ . Оба корня удовлетворяют исходному уравнению. Сумма корней  $3 + 4 = 7$ .

*Ответ:* 7.

**220.** ОДЗ:  $x \geq 5$ .

$$x^2(x-5)^{\frac{1}{4}} - 49(x-5)^{\frac{1}{4}} = 0; \quad (x^2-49)(x-5)^{\frac{1}{4}} = 0; \quad (x+7)(x-7)(x-5)^{\frac{1}{4}} = 0; \quad x_1 = -7 \text{ — не принадлежит ОДЗ; } x_2 = 7 \text{ и } x_3 = 5 \text{ — принадлежат ОДЗ.}$$

Произведение корней равно  $x_2 \cdot x_3 = 7 \cdot 5 = 35$ .

*Ответ:* 35.

**221.** ОДЗ:  $x \geq \frac{1}{2}$ .

$$2x - 1 - 3\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1} - 3) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 0, \quad \sqrt{2x-1} = 3, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 5; \quad x_1 \cdot x_2 = 2,5.$$

*Ответ:* 2,5.

**222.** ОДЗ:  $x \geq 4$ .

$$(x^2 - 2x + 1)(x-4)^{\frac{1}{2}} - 16(x-4)^{\frac{1}{2}} = 0; \quad ((x-1)^2 - 4^2)(x-4)^{\frac{1}{2}} = 0; \quad (x-5)(x+3)(x-4)^{\frac{1}{2}} = 0; \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 4 \text{ — принадлежат ОДЗ, } x_3 = -3 \text{ — не принадлежит ОДЗ.}$$

Сумма корней равна  $x_1 + x_2 = 5 + 4 = 9$ .

*Ответ:* 9.

223. Построим график функции  $y = |x^2 - 4|$  (см. рис. 7).

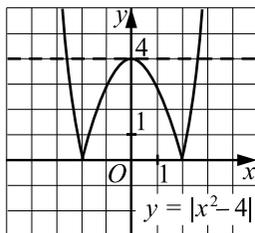


Рис. 7.

Этот график имеет три точки пересечения с графиком функции  $y = a + 1$  тогда и только тогда, когда  $a = 3$ . Значит, исходное уравнение имеет три различных корня только при  $a = 3$ .

Ответ: 3.

224. Задача сводится к нахождению значений  $a$ , при которых прямая  $y = 3$  имеет только три общие точки с графиком функции  $y = |2a - 5 + 3|x||$ .

Построим график функции  $y = |2a - 5 + 3|x||$ . Могут представиться два случая.

1)  $2a - 5 < 0$  (см. рис. 8).

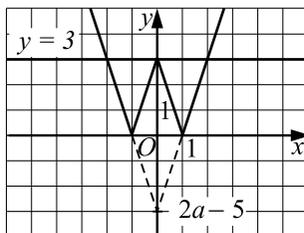


Рис. 8.

Прямая  $y = 3$  пересекает график функции только в трёх точках при  $-(2a - 5) = 3$ , то есть при  $a = 1$ .

2)  $2a - 5 > 0$  (см. рис. 9).

Прямая  $y = 3$  пересекает график функции не более, чем в двух точках, что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 1.

$$225. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 1 - 2x > 0, \\ 25 - 6x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x < 0,5, \\ x \leq \frac{25}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow x < 0,5.$$

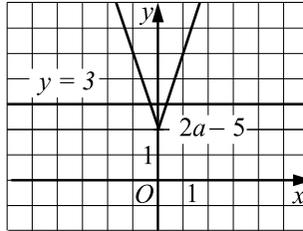


Рис. 9.

Разделим исходное неравенство на  $\sqrt{25-6x}$  ( $\sqrt{25-6x} > 0$  на ОДЗ), тем самым приведём уравнение к виду  $\log_3(1-2x) = \frac{14}{\sqrt{25-6x}}$ . Так как

функции  $f(t) = \log_3 t$  и  $y(t) = \sqrt{t}$  строго возрастают на своей области определения, а функции  $g(x) = 1-2x$  и  $h(x) = 25-6x$  строго убывают на своей области определения, то композиции  $f(g(x)) = \log_3(1-2x)$  и  $y(h(x)) = \sqrt{25-6x}$  строго убывают на своей области определения. Так как функция  $z(x) = \sqrt{25-6x}$  положительна на ОДЗ и строго убывает на ОДЗ, то функция  $\frac{1}{z(x)}$  строго возрастает на ОДЗ. Таким образом, полу-

чаем, что левая часть уравнения  $\log_3(1-2x) = \frac{14}{\sqrt{25-6x}}$  является строго убывающей функцией на ОДЗ, а правая часть — строго возрастающей. Так как графики строго возрастающей и строго убывающей функций не могут пересекаться более чем в одной точке, то исходное уравнение либо не имеет корней, либо имеет единственный корень. Подбором находим корень  $x = -4$ .

Ответ:  $-4$ .

226. ОДЗ:  $\begin{cases} 3x+4 > 0, \\ x > 0, x \neq 1; \end{cases} x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ .

Разделим исходное уравнение на  $\log_x 5$  ( $\log_x 5 \neq 0$ ), тем самым приведём уравнение к виду  $\log_5 \sqrt{3x+4} = \frac{1}{\log_x 5}$ ;  $\log_5 \sqrt{3x+4} = \log_5 x \Rightarrow$

$$\sqrt{3x+4} = x; 3x+4 = x^2; x^2 - 3x - 4 = 0; x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}.$$

$x = -\frac{1}{2}$  не принадлежит ОДЗ,  $x = 4$  — принадлежит.

Ответ: 4.

$$227. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 0,5x + 0,5 > 0, \\ -x > 0, -x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

$\log_{11} \sqrt{0,5x + 0,5} \cdot \log_{-x} 11 = 1$ . Разделим исходное неравенство на  $\log_{-x} 11$  ( $\log_{-x} 11 \neq 0$ ), тем самым приведём уравнение к виду

$$\log_{11} \sqrt{0,5x + 0,5} = \frac{1}{\log_{-x} 11};$$

$$\log_{11} \sqrt{0,5x + 0,5} = \log_{11}(-x) \Leftrightarrow \sqrt{0,5x + 0,5} = -x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,5x + 0,5 = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}, & \Rightarrow x = -0,5, x = 1. x = -0,5 \text{ принад-} \\ x < 0; \end{cases}$$

лежит ОДЗ,  $x = 1$  — не принадлежит.

Ответ:  $-0,5$ .

$$228. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ \log_9^2 x + \log_3 x^2 \geq 0. \end{cases}$$

Если  $x \in \text{ОДЗ}$ , то  $\log_3 x^2 = 2 \log_3 |x| = 2 \log_3 x$ , так как  $x > 0$ . Применяя свойства логарифмов в ОДЗ, получаем уравнение, равносильное исходному.

$$\begin{aligned} \sqrt{(\log_3^2 x)^2 + 2 \log_3 x} &= \log_3(9\sqrt{3}) - \log_3 x; \sqrt{\frac{1}{4} \log_3^2 x + 2 \log_3 x} = \\ &= \frac{5}{2} - \log_3 x. \end{aligned}$$

Сделаем замену  $t = \log_2 x$ , тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{\frac{1}{4}t^2 + 2t} = \frac{5}{2} - t \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 8t = (5 - 2t)^2, \\ \frac{5}{2} - t \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 - 28t + 25 = 0, \\ t \leq \frac{5}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} t = 1, \\ t = \frac{25}{3}, \end{cases} \\ t \leq \frac{5}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Вернёмся к исходной переменной:  $\log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$ . Все сделанные преобразования равносильны, поэтому проверка не нужна.

Ответ: 3.

$$229. \text{ ОДЗ: } -1 \leq 0,5x \leq 1, -2 \leq x \leq 2.$$

1)  $\arcsin(0,5x) = 0$ ;  $0,5x = 0$ ;  $x = 0$  — принадлежит в ОДЗ, значит является корнем данного уравнения.

2)  $\sin^6 x - \cos^6 x = 0$ ;  $(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = 0$ ;  
 $\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x > 0$ , значит  $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ ;  $\cos 2x = 0$ ;  
 $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . С учётом ОДЗ корнями данного

уравнения являются числа  $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ .

Таким образом, исходное уравнение имеет 3 корня.

Ответ: 3.

$$230. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} x \in [-2; 0) \cup (0; 2].$$

$$\left(\frac{1}{\sin x} - 1\right)\sqrt{4 - x^2} = 0; \begin{cases} 4 - x^2 = 0, \\ \frac{1}{\sin x} - 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 4, \\ \sin x = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 2, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ, получаем корни  $x = -2, x = 2, x = \frac{\pi}{2}$ , то есть всего три корня.

Ответ: 3.

$$231. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 5 - x^2 \geq 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}, \\ x \neq 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[-\sqrt{5}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{5}\right].$$

$$1) \frac{\sqrt{5 - x^2}}{x} = 0; \sqrt{5 - x^2}; x = \pm\sqrt{5} \text{ — принадлежат ОДЗ.}$$

2)  $\operatorname{tg} x = 0$ ;  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Из этой серии ни одно число не принадлежит ОДЗ.

Ответ: 2.

$$232. \text{ ОДЗ: } 9 - x^2 \geq 0, -3 \leq x \leq 3. \\ (2 \sin 2x - 1)\sqrt{9 - x^2} = 0.$$

$$1) 2 \sin 2x - 1 = 0; \sin 2x = \frac{1}{2}; 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Из полученной серии корней ОДЗ принадлежат только числа  $-\frac{11\pi}{12}$ ,  $-\frac{7\pi}{12}$ ,

$$\frac{\pi}{12} \text{ и } \frac{5\pi}{12}.$$

$$2) \sqrt{9-x^2} = 0; 9-x^2 = 0; x = \pm 3.$$

Всего 6 корней.

*Ответ:* 6.

$$233. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} \sin^2 x \neq 0, \\ 9-x^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ -3 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) \sqrt{9-x^2} = 0.$$

$$1) 1 - \frac{1}{\sin^2 x} = 0; \sin^2 x = 1; \sin x = \pm 1; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \text{ Из}$$

полученной серии корней ОДЗ принадлежит только число  $-\frac{\pi}{2}$ .

$$2) \sqrt{9-x^2} = 0; 9-x^2 = 0; x = \pm 3.$$

Всего 4 корня.

*Ответ:* 4.

$$234. \text{ ОДЗ: } x \geq -\frac{7}{4}.$$

$$1) \sqrt{4x+7} = 0; x = -\frac{7}{4} \text{ — принадлежит ОДЗ.}$$

$$2) \left(\frac{2}{3}\right)^{5x^2-29} - \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+5} = 0; \left(\frac{3}{2}\right)^{29-5x^2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+5}; 29-5x^2 = x^2+5;$$

$$6x^2 = 24; x^2 = 4; x = 2 \text{ — принадлежит ОДЗ, } x = -2 \text{ — не принадлежит ОДЗ.}$$

$$x = -1,75 \text{ и } x = 2 \text{ — корни данного уравнения, их сумма равна: } -1,75+2 = 0,25.$$

*Ответ:* 0,25.

235. ОДЗ:  $0 < x \leq 3$ .

$\sin x \cdot \log_3 x \cdot \sqrt{3-x} = 0$ ;  $\sqrt{3-x} = 0$ ,  $x_1 = 3$ ;  $\log_3 x = 0$ ,  $x_2 = 1$ ;  $\sin x = 0$ ,  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $0 < \pi n \leq 3$ ,  $0 < n < 1$ , на интервале  $(0; 1)$  нет целых чисел, значит уравнение  $\sin x = 0$  не имеет корней на промежутке  $(0; 3]$ . Сумма корней равна  $x_1 + x_2 = 4$ .

Ответ: 4.

236. ОДЗ:  $\begin{cases} x \leq 2,5, \\ x^2 < 17; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2,5, \\ -\sqrt{17} < x < \sqrt{17}; \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{17} < x \leq 2,5$ .

1)  $\sqrt{5-2x} = 0$ ;  $5-2x = 0$ ;  $x = 2,5$ ,  $2,5 \in (-\sqrt{17}; 2,5]$ .

2)  $\ln(17-x^2) = 0$ ;  $17-x^2 = 1$ ;  $x^2 = 16$ ;  $x_{1,2} = \pm 4$ ,  $4 \notin (-\sqrt{17}; 2,5]$ ,  $-4 \in (-\sqrt{17}; 2,5]$ .

Итак,  $x = 2,5$  и  $x = -4$  являются корнями данного уравнения.  $2,5 - 4 = -1,5$ .

Ответ:  $-1,5$ .

237. ОДЗ:  $0 < x \leq 3$ .

$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \log_3 3x \cdot \sqrt{3-x} = 0$ .

1)  $3-x = 0$ ;  $x_1 = 3$ .

2)  $\log_3 3x = 0$ ;  $3x = 1$ ;  $x_2 = \frac{1}{3}$ .

3)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ ;  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ ;  $\sin x = 0$ ;  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $0 < \pi n \leq 3$ ,  $0 < n < 1$ . На интервале  $(0; 1)$  нет целых чисел, значит уравнение  $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$  не имеет корней на промежутке  $(0; 3]$ .

Произведение корней равно  $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ .

Ответ: 1.

238. ОДЗ:  $2-x > 0$ ;  $x < 2$ .

Выразим  $y$  через  $x$  из второго уравнения системы и подставим значение этого выражения в первое уравнение:

$y = |x-1| - 2$ ;  $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = |x-1| - 2$ .

а)  $1 \leq x < 2$ .  $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = x-3$ . На промежутке  $[1; 2)$

$\log_{\frac{1}{2}}(2-x) \geq 0$ ,  $x-3 < 0$ . Следовательно, решений нет.

б)  $x < 1$ .  $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -x+1-2$ ;  $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -x-1$ . Функция  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2-x)$  монотонно возрастает при  $x < 1$ , а функция  $g(x) = -x-1$  монотонно убывает. Поэтому уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет

не более одного корня при  $x < 1$ . Решая это уравнение перебором, находим  $x_0 = 0$ . Тогда  $y_0 = -1$ . Проверка показывает, что  $(0; -1)$  — решение данной системы уравнений.

$$x_0 \cdot y_0 = 0 \cdot (-1) = 0.$$

*Ответ:* 0.

**239.** ОДЗ:  $4 - x > 0, x < 4$ .

Учитывая ОДЗ имеем,  $|x - 4| = 4 - x$ . Выразим  $y$  через  $x$  из второго уравнения системы и подставим в первое:

$y = 3 - |x - 4|$ ;  $y = 3 - 4 + x$ ;  $y = x - 1$ .  $\log_2(4 - x) = x - 1$ . Функция  $f(x) = \log_2(4 - x)$  монотонно убывает при  $x < 4$ , а функция  $g(x) = x - 1$  монотонно возрастает. Поэтому уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет не более одного корня при  $x < 4$ . Решая это уравнение перебором, находим  $x_0 = 2$ . Тогда  $y_0 = 1$ . Проверка показывает, что  $(2; 1)$  — решение данной системы уравнений.  $x_0 \cdot y_0 = 2 \cdot 1 = 2$ .

*Ответ:* 2.

$$240. \begin{cases} \sqrt{(3x-1)^2} = -7-4y, \\ y = 5x-13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3x-1| = -7-4y, \\ y = 5x-13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3x-1| = -7-4(5x-13), \\ y = 5x-13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3x-1| + 20x = 45, \\ y = 5x-13. \end{cases}$$

Решим первое уравнение последней системы:

$$|3x - 1| + 20x = 45.$$

1)  $3x - 1 \geq 0, x \geq \frac{1}{3}$ . Тогда  $3x - 1 + 20x = 45$ ;  $x = 2$ .  $x = 2$  удовлетворяет

условию  $x \geq \frac{1}{3}$ .

2)  $3x - 1 < 0, x < \frac{1}{3}$ . Тогда  $1 - 3x + 20x = 45$ ;  $x = \frac{44}{17}$ .  $x = \frac{44}{17}$  не

удовлетворяет условию  $x < \frac{1}{3}$ .

$$y = 5x - 13; y = 5 \cdot 2 - 13 = -3.$$

Таким образом,  $(2; -3)$  — решение данной системы уравнений.

$$x_0 + y_0 = 2 - 3 = -1.$$

*Ответ:* -1.

$$241. \begin{cases} \sqrt{(2x-1)^2} = 4+3y, \\ y = 1-2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-1| = 4+3y, \\ y = 1-2x. \end{cases}$$

Подставим  $y = 1 - 2x$  в первое уравнение последней системы:

$$|2x - 1| = 4 + 3(1 - 2x); |2x - 1| = 7 - 6x.$$

1)  $2x - 1 \geq 0$ ,  $x \geq \frac{1}{2}$ . Тогда  $2x - 1 = 7 - 6x$ ;  $x = 1$ .  $x = 1$  удовлетворяет условию  $x \geq \frac{1}{2}$ .

2)  $2x - 1 < 0$ ,  $x < \frac{1}{2}$ . Тогда  $1 - 2x = 7 - 6x$ ;  $x = 1,5$ .  $x = 1,5$  не удовлетворяет условию  $x < \frac{1}{2}$ .

$$y = 1 - 2x; y = 1 - 2 \cdot 1 = -1.$$

Таким образом,  $(1; -1)$  — решение данной системы уравнений.

$$x_0 + y_0 = 1 - 1 = 0.$$

*Ответ:* 0.

$$242. \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2} + 5y = -3, \\ y + 2x - 7 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| = -3 - 5y, \\ y = 7 - 2x. \end{cases}$$

Подставим  $y = 7 - 2x$  в первое уравнение последней системы:

$$|x - 2| = -3 - 5(7 - 2x); |x - 2| = -38 + 10x.$$

1)  $x - 2 \geq 0$ ,  $x \geq 2$ . Тогда  $x - 2 = -38 + 10x$ ;  $9x = 36$ ;  $x = 4$ .  $x = 4$  удовлетворяет условию  $x \geq 2$ .

2)  $x - 2 < 0$ ,  $x < 2$ . Тогда  $2 - x = -38 + 10x$ ;  $11x = 40$ ;  $x = \frac{40}{11}$ .  $x = \frac{40}{11}$

не удовлетворяет условию  $x < 2$ .

$$y = 7 - 2x; y = 7 - 2 \cdot 4 = -1.$$

Таким образом,  $(4; -1)$  — решение данной системы уравнений.

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{4}{-1} = -4.$$

*Ответ:* -4.

$$243. \begin{cases} \sqrt{(x+2)^2} - 2y = -1, \\ y + 3x - 5 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2| = 2y - 1, \\ y = 5 - 3x. \end{cases}$$

Подставим  $y = 5 - 3x$  в первое уравнение последней системы:

$$|x + 2| = 2 \cdot (5 - 3x) - 1; |x + 2| = 9 - 6x.$$

1)  $x + 2 \geq 0$ ,  $x \geq -2$ .

$x + 2 = 9 - 6x$ ;  $7x = 7$ ;  $x = 1$ .  $x = 1$  удовлетворяет условию  $x \geq -2$ .

$$2) x + 2 < 0, x < -2.$$

$-x - 2 = 9 - 6x; 5x = 11; x = \frac{11}{5}$ .  $x = \frac{11}{5}$  не удовлетворяет условию  $x < -2$ .

$$y = 5 - 3x; y = 5 - 3 \cdot 1 = 2.$$

Таким образом,  $(1; 2)$  — решение данной системы уравнений.

$$y_0 - x_0 = 2 - 1 = 1.$$

Ответ: 1.

244. ОДЗ:  $x > 0, y > 0$ . Выразим  $x$  через  $y$  из первого уравнения системы и подставим во второе:

$$\lg x = 2 \lg y; x = y^2. \sqrt{y^2 + 8} = 2y - 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 + 8 = 4y^2 - 4y + 1, \\ 2y - 1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 4y - 7 = 0, \\ y \geq \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -1, y_2 = \frac{7}{3}, \\ y \geq \frac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow y = \frac{7}{3}. \text{ Тогда } x = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}. \text{ Числа } \frac{49}{9} \text{ и } \frac{7}{3}$$

принадлежат ОДЗ.

$\left(\frac{49}{9}; \frac{7}{3}\right)$  — решение данной системы уравнений.

$$\frac{3x_0}{y_0} = \frac{3 \cdot 49 \cdot 3}{9 \cdot 7} = 7.$$

Ответ: 7.

245. ОДЗ:  $x \geq -1,8$ .

$$1) \left(\frac{2}{5}\right)^{4x^2-23} - \left(\frac{5}{2}\right)^{5x^2-13} = 0; \left(\frac{2}{5}\right)^{4x^2-23} = \left(\frac{2}{5}\right)^{13-5x^2}; 4x^2 - 23 = 13 - 5x^2; 9x^2 = 36; x^2 = 4, x_1 = 2, x_2 = -2. x = 2 \text{ принадлежит ОДЗ, } x = -2 \text{ — не принадлежит.}$$

2)  $\sqrt[6]{5x+9} = 0; x_3 = -1,8$  — принадлежит ОДЗ, значит, является корнем данного уравнения.

Произведение корней исходного уравнения:  $2 \cdot (-1,8) = -3,6$ .

Ответ:  $-3,6$ .

246. ОДЗ:  $4 - x^2 > 0; -2 < x < 2$ .

$$1) \sin^2 x - 1 = 0; -\cos^2 x = 0, \cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \text{ Проме-}$$

жутку  $(-2; 2)$  принадлежат корни  $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = -\frac{\pi}{2}$ .

2)  $\log_{0.5}(4 - x^2) = 0$ ;  $4 - x^2 = 1$ ;  $x^2 = 3$ ;  $x_3 = \sqrt{3}$ ,  $x_4 = -\sqrt{3}$ . Оба числа принадлежат ОДЗ, значит, являются корнями данного уравнения. Исходное уравнение имеет 4 корня.

Ответ: 4.

247. ОДЗ:  $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$ .

$$1) 4 \cos^2 \pi x - 3 = 0; 2(1 + \cos 2\pi x) - 3 = 0; \cos 2\pi x = \frac{1}{2};$$

$2\pi x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{1}{6} + n, n \in \mathbb{Z}$ . Из полученной серии корней ОДЗ принадлежат

$$x_1 = -2\frac{1}{6}, x_2 = -1\frac{5}{6}, x_3 = -1\frac{1}{6},$$

$$x_4 = -\frac{5}{6}, x_5 = -\frac{1}{6}, x_6 = \frac{1}{6}, x_7 = \frac{5}{6},$$

$$x_8 = 1\frac{1}{6}, x_9 = 1\frac{5}{6}, x_{10} = 2\frac{1}{6}.$$

2)  $\log_2(7 - x^2) - 1 = 0$ ;  $7 - x^2 = 2$ ;  $x^2 = 5$ ;  $x_{11} = \sqrt{5}$ ,  $x_{12} = -\sqrt{5}$ . Оба числа  $\sqrt{5}$  и  $-\sqrt{5}$  принадлежат ОДЗ, значит, являются корнями исходного уравнения.

Данное уравнение имеет 12 корней.

Ответ: 12.

$$248. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 3x > 0, \\ -1 \leq \frac{x}{5} - \frac{5}{6} \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 3) > 0, \\ -\frac{1}{6} \leq \frac{x}{5} \leq \frac{11}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, x > 3, \\ -\frac{5}{6} \leq x \leq \frac{55}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{6} \leq x < 0, \\ 3 < x \leq \frac{55}{6}. \end{cases}$$

Исходное уравнение равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_2(x^2 - 3x) - 2 = 0, \\ \arcsin\left(\frac{x}{5} - \frac{5}{6}\right) = 0, \\ -\frac{5}{6} \leq x < 0, \\ 3 < x \leq \frac{55}{6}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3x = 4, \\ \frac{x}{5} - \frac{5}{6} = 0, \\ -\frac{5}{6} \leq x < 0, \\ 3 < x \leq \frac{55}{6}; \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ \frac{x}{5} = \frac{5}{6}, \\ -\frac{5}{6} \leq x < 0, \\ 3 < x \leq \frac{55}{6}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = \frac{25}{6}, \\ -\frac{5}{6} \leq x < 0, \\ 3 < x \leq \frac{55}{6}; \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = 4, x_3 = \frac{25}{6}.$$

Минимальный корень  $x_{\min} = 4$ ,  $3x_{\min} = 3 \cdot 4 = 12$ .

Ответ: 12.

$$249. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 12x - x^2 - 26 > 0, \\ -1 \leq 0,5x - 4 \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 12x + 26 < 0, \\ 3 \leq 0,5x \leq 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 - \sqrt{10} < x < 6 + \sqrt{10}, \\ 6 \leq x \leq 10; \end{cases} \Rightarrow 6 \leq x \leq 6 + \sqrt{10}.$$

Исходное уравнение равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_3(12x - x^2 - 26) - 2 = 0, \\ \arccos(0,5x - 4) = 0, \\ 6 \leq x < 6 + \sqrt{10}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 12x - x^2 - 26 = 9, \\ 0,5x - 4 = 1, \\ 6 \leq x < 6 + \sqrt{10}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 12x + 35 = 0, \\ 0,5x = 5, \\ 6 \leq x < 6 + \sqrt{10}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 5, x_2 = 7, x_3 = 10, \\ 6 \leq x < 6 + \sqrt{10}; \end{array} \right. \Rightarrow x = 7.$$

Ответ:  $x = 7$ .

$$250. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 5x - 2x^2 - 1 > 0, \\ -1 \leq 3x - 2 \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 < 0, \\ 1 \leq 3x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5 - \sqrt{17}}{4} < x < \frac{5 + \sqrt{17}}{4}, \\ \frac{1}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Сравним  $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$  и  $\frac{1}{3}$ :  $4,1 < \sqrt{17} < 4,2$ ;  $-4,2 < -\sqrt{17} < -4,1$ ;

$0,8 < 5 - \sqrt{17} < 0,9$ ;  $0,2 < \frac{5-\sqrt{17}}{4} < 0,225 \Rightarrow \frac{5-\sqrt{17}}{4} < \frac{1}{3}$

(см. рис. 10).

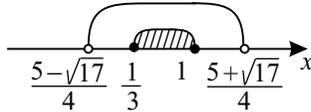


Рис. 10.

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \begin{cases} \log_2(5x - 2x^2 - 1) = 0, \\ \arccos(3x - 2) = 0, \end{cases} \\ \frac{1}{3} \leq x \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5x - 2x^2 - 1 = 1, \\ 3x - 2 = 1, \end{cases} \\ \frac{1}{3} \leq x \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 5x + 2 = 0, \\ 3x = 3, \end{cases} \\ \frac{1}{3} \leq x \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4}, \\ x_3 = 1, \end{cases} \\ \frac{1}{3} \leq x \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = \frac{1}{2}, \\ x_3 = 1, \end{cases} \\ \frac{1}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Из последней системы следует, что данное уравнение имеет только два корня:  $\frac{1}{2}$  и 1. Их сумма равна  $\frac{1}{2} + 1 = 1,5$ .

Ответ: 1,5.

$$251. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 6x - 8x^2 + 26 > 0, \\ -1 \leq 3 - 3x \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 6x - 26 < 0, \\ -4 \leq -3x \leq -2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 3x - 13 < 0, \\ \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{217}}{8} < x < \frac{3 + \sqrt{217}}{8}, \\ \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}; \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$ . Исходное уравнение равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \log_3(6x - 8x^2 + 26) - 3 = 0, \\ \arcsin(3 - 3x) = 0, \end{array} \right. \\ \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 6x - 8x^2 + 26 = 27, \\ 3 - 3x = 0, \end{array} \right. \\ \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}; \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 8x^2 - 6x + 1 = 0, \\ 3x = 3, \end{array} \right. \\ \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{8}, \\ x_3 = 1, \end{array} \right. \\ \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}; \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = 1, \\ \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}; \end{array} \right. \Rightarrow x = 1.$$

Ответ:  $x = 1$ .  
252. 1. ОДЗ:  $x - 4x^2 \geq 0$ ,  $x(4x - 1) \leq 0$ ,  $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ . При этом отметим, что

только числа 0 и  $\frac{1}{4}$  обращают выражение  $\sqrt{x - 4x^2}$  в нуль, следовательно,

$x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{1}{4}$  — корни данного уравнения

$$2. \left\{ \begin{array}{l} \cos(2x + 1) - \sin x = 0, \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \cos(2x + 1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 2x + 1 = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, n \in Z, \\ 2x + 1 = -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k, k \in Z, \end{array} \right. \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi n, n \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi k, k \in Z, \end{array} \right. \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi k, k \in Z, \end{array} \right. \Rightarrow x_3 = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}. \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \end{array} \right.$$

Данное уравнение имеет 3 корня.

Ответ: 3.

253. ОДЗ:  $-x^2 + 5x \geq 0$ ;  $x^2 - 5x \leq 0$ ;  $x(x-5) \leq 0$ ;  $0 \leq x \leq 5$ . Отметим, что числа 0 и 5 обращают выражение  $\sqrt{-x^2 + 5x}$  в нуль, следовательно,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 5$  — корни данного уравнения.

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \cos x + \cos(1 + 3x) = 0, \\ 0 \leq x \leq 5; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cos \frac{4x+1}{2} \cos \frac{2x+1}{2} = 0, \\ 0 \leq x \leq 5; \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(2x + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ \cos\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ 0 \leq x \leq 5; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} 2x + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \end{array} \right. \\ 0 \leq x \leq 5; \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z, \\ x = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \end{array} \right. \\ 0 \leq x \leq 5; \end{array} \right. \Rightarrow \end{aligned}$$

$$x_3 = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}, x_4 = -\frac{1}{4} + \frac{3\pi}{4}, x_5 = -\frac{1}{4} + \frac{5\pi}{4}, x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}, x_7 = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{2}.$$

Данное уравнение имеет 7 корней.

Ответ: 7.

$$\begin{aligned} 254. \text{ ОДЗ: } & \left\{ \begin{array}{l} 5 - x^2 > 0, \\ 3 - 2x - x^2 \geq 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}, \\ x^2 + 2x - 3 \leq 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}, \\ (x-1)(x+3) \leq 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}, \\ -3 \leq x \leq 1; \end{array} \right. \Rightarrow -\sqrt{5} < x \leq 1. \end{aligned}$$

Данное уравнение равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \log_3(5 - x^2) = 0, \\ \sqrt[4]{3 - 2x - x^2} = 0, \end{array} \right. \\ -\sqrt{5} < x \leq 1; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} x_1 = -2, x_2 = 2, \\ x_3 = -3, x_4 = 1, \end{array} \right. \\ -\sqrt{5} < x \leq 1. \end{array} \right.$$

Из последней системы следует, что данное уравнение имеет только два корня  $x = -2$  и  $x = 1$ . Их сумма равна:  $-2 + 1 = -1$ .

Ответ:  $-1$ .

$$255. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 6x^2 + 3x - \frac{2}{3} > 0, \\ 9x^2 - 6x - 8 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x + 2)(6x - 1) > 0, \\ (3x + 2)(3x - 4) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[ \begin{array}{l} x < -\frac{2}{3}, \\ x > \frac{1}{6}, \\ x \leq -\frac{2}{3}, \\ x \geq \frac{4}{3}; \end{array} \right. & \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{2}{3}, \\ x \geq \frac{4}{3}. \end{cases} \end{cases}$$

1)  $\sqrt{9x^2 - 6x - 8} = 0$ ;  $x_1 = \frac{4}{3}$ ;  $x_2 = -\frac{2}{3}$ . Из чисел  $\frac{4}{3}$  и  $-\frac{2}{3}$  области определения принадлежит только  $\frac{4}{3}$ , следовательно,  $x_1 = \frac{4}{3}$  — корень данного уравнения.

2)  $\log_{0,7} \left( 6x^2 + 3x - \frac{2}{3} \right) = 0$ ;  $6x^2 + 3x - \frac{2}{3} = 1$ ;  $6x^2 + 3x - \frac{5}{3} = 0$ ;

$18x^2 + 9x - 5 = 0$ ;  $x_2 = -\frac{5}{6}$ ,  $x_3 = \frac{1}{3}$ . Из чисел  $-\frac{5}{6}$  и  $\frac{1}{3}$  в область опре-

деления входит только  $-\frac{5}{6}$ , следовательно  $x_2 = -\frac{5}{6}$  — корень данного

уравнения. Сумма корней:  $\frac{4}{3} - \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$ .

Ответ:  $0,5$ .

256. ОДЗ:  $7x - 2x^2 - 5 > 0$ .

1)  $3x - 8 = 0$ ,  $x = 2\frac{2}{3}$ .  $x = 2\frac{2}{3}$  не принадлежит ОДЗ.

2)  $\log_5 (7x - 2x^2 - 5) = 0$ ;  $7x - 2x^2 - 5 = 1$ ;  $2x^2 - 7x + 6 = 0$ ;

$D = 49 - 48 = 1$ ;  $x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{4}$ ;  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1,5$ .

Произведение корней:  $2 \cdot 1,5 = 3$ .

Ответ:  $3$ .

257. ОДЗ:  $3x - 2x^2 > 0$ ;  $x(1,5 - x) > 0$ ;  $0 < x < 1,5$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \pi x = -\frac{1}{2}, \\ 3x - 2x^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2}{3} + 2k, k \in Z, \\ x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4}. \end{cases}$$

Из последней совокупности и ОДЗ следует, что корнями исходного уравнения являются числа  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}$  и только они. Их сумма равна

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} = 3,5.$$

Ответ: 3,5.

$$258. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} \sin 2\pi x \neq 0, \\ 3 - 2x - 5x^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi x \neq \pi n, n \in Z, \\ 5x^2 + 2x - 3 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{n}{2}, n \in Z, \\ (x+1)\left(x - \frac{3}{5}\right) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{n}{2}, n \in Z, \\ -1 \leq x \leq 0,6. \end{cases}$$

1)  $\operatorname{ctg} 2\pi x = 0$ ;  $2\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ;  $k \in Z$ ;  $x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$ ,  $k \in Z$ . С учётом ОДЗ

корнями данного уравнения являются числа  $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ .

2)  $\sqrt[4]{3 - 2x - 5x^2} = 0$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0,6$ . С учётом ОДЗ корнем данного уравнения является только число 0,6. Сумма корней:  
 $-0,75 - 0,25 + 0,25 + 0,6 = -0,15$ .

Ответ: -0,15.

$$259. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} \cos \pi x \neq 0, \\ 2 + 3x - 2x^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x^2 - 1,5x - 1 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} + n, n \in Z, \\ (x-2)(x+0,5) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} + n, n \in Z, \\ -0,5 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

1)  $\operatorname{tg} \pi x + 1 = 0$ ;  $x = -\frac{1}{4} + k$ ,  $k \in Z$ .

С учётом ОДЗ корнями данного уравнения являются числа  $-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{3}{4}$ .

$$2) \sqrt{2 + 3x - 2x^2} = 0; x = -0,5, x = 2.$$

С учётом ОДЗ корнем данного уравнения является число 2.

$$\text{Сумма корней: } -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} + 2 = 4,25.$$

*Ответ:* 4,25.

$$260. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} \neq 0, \\ 13x - x^2 - 40 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{2} \neq \pi n, n \in Z, \\ x^2 - 13x + 40 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} \neq n, n \in Z, \\ (x - 5)(x - 8) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2n, n \in Z, \\ 5 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

$$1) \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2} - 1 = 0; \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2} = 1; \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; x = \frac{1}{2} + 2k, k \in Z.$$

С учётом ОДЗ корнем данного уравнения является число 6,5.

$$2) \sqrt{13x - x^2 - 40} = 0; x_1 = 5, x_2 = 8. \text{ С учётом ОДЗ корнем данного уравнения является число 5.}$$

$$\text{Сумма корней: } 5 + 6,5 = 11,5.$$

*Ответ:* 11,5.

$$261. \text{ ОДЗ: } 4 - x^2 \geq 0; x^2 \leq 4; -2 \leq x \leq 2.$$

$$1) 5^{2x-7} = 5^2; 2x - 7 = 2; x = 4,5 \text{ — не принадлежит в ОДЗ.}$$

$$2) \sqrt{4 - x^2} = 0; x_1 = 2, x_2 = -2. \text{ Оба числа принадлежат ОДЗ, значит являются корнями данного уравнения.}$$

$$\text{Сумма корней: } 2 - 2 = 0.$$

*Ответ:* 0.

$$262. \left[ \begin{cases} 7^{9-2x} - 49 = 0, \\ 9 - x^2 \geq 0, \\ 9 - x^2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{cases} 9 - 2x = 2, \\ -3 \leq x \leq 3, \\ x_1 = 3, x_2 = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{cases} x = 3,5, \\ -3 \leq x \leq 3, \\ x_1 = 3, x_2 = -3. \end{cases} \right. \right.$$

Из последней совокупности следует, что данное уравнение имеет только два корня:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -3$ .

Сумма корней:  $3 - 3 = 0$ .

*Ответ:* 0.

$$263. \text{ ОДЗ: } 7x^2 - 62 > 0; \quad x < -\sqrt{\frac{62}{7}}, \quad x > \sqrt{\frac{62}{7}}.$$

От уравнения перейдём к совокупности

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 15 = 5, \\ 7x^2 - 62 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0, \\ x^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \\ x_3 = -3, \quad x_4 = 3. \end{cases}$$

Из последней совокупности и ОДЗ следует, что корнями данного уравнения являются числа  $-3$ ,  $3$ ,  $5$ . Их сумма равна  $-3 + 3 + 5 = 5$ .

*Ответ:* 5.

$$264. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 3, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

От уравнения перейдём к совокупности

$$\begin{cases} 9 - x^2 = 1, \\ \operatorname{tg} x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{2}, \quad x_2 = -2\sqrt{2}, \\ x = \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Из последней совокупности и ОДЗ следует, что корнями данного уравнения являются числа  $2\sqrt{2}$ ,  $-2\sqrt{2}$ ,  $0$  и только они, следовательно, уравнение имеет 3 корня.

*Ответ:* 3.

$$265. \text{ ОДЗ: } x^2 - 2x - 2 > 0; \quad (x - (1 - \sqrt{3}))(x - (1 + \sqrt{3})) > 0; \quad x < 1 - \sqrt{3}, \\ x > 1 + \sqrt{3}.$$

$$1) 9^{3x} - \frac{108 \cdot 3^{6x}}{27} + 1 = 0; \quad 3^{6x} - 4 \cdot 3^{6x} + 1 = 0; \quad 3 \cdot 3^{6x} = 1; \quad 3^{6x} = \frac{1}{3};$$

$$6x = -1; \quad x = -\frac{1}{6} \text{ — не принадлежит ОДЗ.}$$

2)  $x^2 - 2x - 2 = 1$ ;  $x^2 - 2x - 3 = 0$ ;  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$ . Оба числа принадлежат ОДЗ, значит являются корнями данного уравнения.

Сумма корней  $-1 + 3 = 2$ .

*Ответ:* 2.

$$266. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 9 - x^2 \geq 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

1)  $\sqrt{9 - x^2} = 0$ ;  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -3$ . Оба числа принадлежат ОДЗ, значит являются целыми корнями данного уравнения.

2)  $\operatorname{tg} x = 0$ ;  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Только число 0 принадлежит ОДЗ, значит  $x = 0$  — целый корень данного уравнения. Уравнение не содержит нецелых корней.

*Ответ:* 0.

267. ОДЗ:  $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

а)  $\sqrt{4 - x^2} = 0$ ;  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$ . Оба числа принадлежат ОДЗ, значит они являются целыми корнями исходного.

б)  $\operatorname{ctg} x = 0$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . С учётом ОДЗ имеем  $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{2}$  — корни данного уравнения.

Уравнение имеет 2 нецелых корня.

*Ответ:* 2.

268. ОДЗ:  $\begin{cases} -1 \leq x^2 - 4 \leq 1, \\ 9 - x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x^2 \leq 5, \\ -3 < x < 3. \end{cases}$

1)  $\arcsin(x^2 - 4) = 0$ ;  $x^2 - 4 = 0$ ;  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$ . Оба числа принадлежат ОДЗ, а значит  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$  — корни данного уравнения.

2)  $\ln(9 - x^2) = 0$ ;  $9 - x^2 = 1$ ;  $x_3 = 2\sqrt{2}$ ,  $x_4 = -2\sqrt{2}$ . Оба числа не принадлежат ОДЗ.

Произведение корней:  $-2 \cdot 2 = -4$ .

*Ответ:* -4.

269. ОДЗ:  $49 - 4x^2 > 0$ ;  $-\frac{7}{2} < x < \frac{7}{2}$ .

1)  $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = 0$ ;  $\cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$ ;

$\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = 0$ ;  $\sin 4x = 0$ ;  $4x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \frac{\pi k}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . С учётом

ОДЗ имеем корни данного уравнения:  $x_1 = -\pi$ ,  $x_2 = -\frac{3\pi}{4}$ ,  $x_3 = -\frac{\pi}{2}$ ,

$x_4 = -\frac{\pi}{4}$ ,  $x_5 = 0$ ,  $x_6 = \frac{\pi}{4}$ ,  $x_7 = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_8 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $x_9 = \pi$ .

2)  $\log_2(49 - 4x^2) = 0$ ;  $49 - 4x^2 = 1$ ;  $4x^2 = 48$ ;  $x^2 = 12$ ;  $x_{10} = -2\sqrt{3}$ ,  $x_{11} = 2\sqrt{3}$ . Оба числа принадлежат ОДЗ, а значит являются корнями данного уравнения. Исходное уравнение имеет 11 корней.

*Ответ:* 11.

270. ОДЗ:  $9 - 5x - 4x^2 \geq 0$ ;  $4x^2 + 5x - 9 \leq 0$ ;  $(x - 1)(4x + 9) \leq 0$ ;

$$-\frac{9}{4} \leq x \leq 1.$$

1)  $2 \cos x - 1 = 0$ ;  $\cos x = \frac{1}{2}$ ;  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in Z$ . С учётом ОДЗ имеем

$x_1 = -\frac{\pi}{3}$  — корень данного уравнения.

2)  $\sqrt{9 - 5x - 4x^2} = 0$ ;  $x_2 = -\frac{9}{4}$ ,  $x_3 = 1$  принадлежат ОДЗ, значит являются корнями данного уравнения. Исходное уравнение имеет 3 корня.

Ответ: 3.

$$271. 1) \begin{cases} 1 - 2 \sin^2 x = 0, \\ 18 + x - 4x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ 4x^2 - x - 18 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ (4x - 9)(x + 2) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ -2 < x < \frac{9}{4}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{4}.$$

$$2) \log_7(18 + x - 4x^2) = 0; 18 + x - 4x^2 = 1; 4x^2 - x - 17 = 0;$$

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 272}}{8}; x_3 = \frac{1 - \sqrt{273}}{8}, x_4 = \frac{1 + \sqrt{273}}{8}.$$

Данное уравнение имеет 4 корня.

Ответ: 4.

$$272. 1) \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0, \\ 10x - x^2 - 21 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 1, \\ x^2 - 10x + 21 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ 3 \leq x \leq 7; \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{5\pi}{4}, x_2 = \frac{7\pi}{4}.$$

$$2) \begin{cases} 10x - x^2 - 21 = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 3, x_4 = 7, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \Rightarrow x_3 = 3, x_4 = 7.$$

Данное уравнение имеет 4 корня.

Ответ: 4.

$$273. 1) \begin{cases} 3 - \operatorname{ctg}^2 x = 0, \\ -8 - 17x - 2x^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x = \pm \sqrt{3}, \\ 2x^2 + 17x + 8 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, \\ x = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \\ (2x+1)(x+8) \leq 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, \\ x = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \\ -8 \leq x \leq -\frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Решением системы являются значения:

$$x_1 = -\frac{13\pi}{6}, x_2 = -\frac{11\pi}{6}, x_3 = -\frac{7\pi}{6}, x_4 = -\frac{5\pi}{6}, x_5 = -\frac{\pi}{6}.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{-8-17x-2x^2} = 0, \\ \sin x \neq 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_6 = -\frac{1}{2}, x_7 = -8, \\ x \neq \pi n, n \in Z; \end{array} \right. \Rightarrow x_6 = -\frac{1}{2},$$

$x_7 = -8$ . Данное уравнение имеет 7 корней.

Ответ: 7.

**274.** Ключевая идея: если  $f(x) \geq a$  и  $g(x) \leq a$ , то уравнение  $f(x) = g(x)$  равносильно системе уравнений  $\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$

План решения:

- 1) Оценим снизу левую часть уравнения.
- 2) Оценим сверху правую часть уравнения.
- 3) Воспользуемся ключевой идеей.

$$1) 0 \leq \cos^2 4\pi x \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{\cos^2 4\pi x} \geq 2.$$

$$2) 4 - (4x - 1)^2 \leq 4 \Rightarrow \log_2(4 - (4x - 1)^2) \leq 2.$$

3) Таким образом, если  $x_0$  является корнем данного уравнения, то левая и правая части в этой точке равны 2. Имеем,  $\log_2(4 - (4x - 1)^2) = 2 \Leftrightarrow 4 - (4x - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0,25$ . Проверкой убеждаемся, что при  $x = 0,25$  левая часть также равна 2. Следовательно,  $x = 0,25$  — корень исходного уравнения.

Ответ: 0,25.

**275.** 1) Оценим левую часть уравнения. Имеем,  $\frac{3}{\cos^2 5\pi x} \geq 3$ .

2) Оценим правую часть уравнения. Получаем,  $27 - (5x + 1)^2 \leq 27 \Rightarrow \log_3(27 - (5x + 1)^2) \leq 3$ .

3) Таким образом, если  $x_0$  является корнем данного уравнения, то левая и правая части в этой точке равны 3. Имеем,  $\log_3(27 - (5x + 1)^2) = 3 \Leftrightarrow 27 - (5x + 1)^2 = 27 \Leftrightarrow x = -0,2$ . Проверкой убеждаемся, что при  $x = -0,2$  левая часть также равна 3. Следовательно,  $x = -0,2$  — корень исходного

уравнения.

*Ответ:*  $-0,2$ .

**276.** 1) Оценим левую часть уравнения. Имеем,  $\frac{3}{\sin^2 6\pi x} \geq 3$ .

2) Оценим правую часть уравнения. Получаем,  
 $(4x - 5)^2 + 0,125 \geq 0,125 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}((4x - 5)^2 + 0,125) \leq 3$ .

3) Таким образом, если  $x_0$  является корнем данного уравнения, то левая и правая части в этой точке равны 3. Имеем,  
 $\log_{\frac{1}{2}}((4x - 5)^2 + 0,125) = 3 \Leftrightarrow (4x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,25$ . Проверкой убеждаемся, что при  $x = 1,25$  левая часть также равна 3. Следовательно,  $x = 1,25$  — корень исходного уравнения.

*Ответ:*  $1,25$ .

**277.** 1)  $(\sqrt{3} - \cos 20\pi x) \cdot (\sqrt{3} + \cos 20\pi x) = 3 - \cos^2 20\pi x \leq 3$ ;  
 $3^{3 - \cos^2 20\pi x} \leq 27$ ;  $27 + (40x - 3)^2 \geq 27$ .

2) Следовательно, данное уравнение равносильно системе:  

$$\begin{cases} (40x - 3)^2 = 0, \\ \cos^2 20\pi x = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень  $x = \frac{3}{40} = 0,075$ ,

проверкой убеждаемся, что  $x = \frac{3}{40}$  удовлетворяет второму уравнению.

*Ответ:*  $0,075$ .

**278.** Умножив обе части уравнения на  $\sqrt{10 - 3x}$ ,  $10 - 3x > 0$  представим его в виде:

$\log_3(5x - 6) = 2 \cdot \sqrt{10 - 3x}$ . Левая часть последнего уравнения является строго возрастающей функцией аргумента  $x$ , а правая часть — строго убывающей, поэтому равенство может достигаться лишь в одной точке. Подбором легко найти, что  $x = 3$  удовлетворяет данному равенству и равенству  $10 - 3x > 0$ .

*Ответ:*  $3$ .

**279.** ОДЗ.  $x \neq 0$ . Заметим, что левая и правая части уравнения являются чётными функциями, поэтому если  $x_0$  — корень уравнения, то и  $-x_0$  — его корень. Значит, достаточно найти лишь положительные корни уравнения ( $x = 0$  не является корнем, так как принадлежит ОДЗ). На интервале  $(0; +\infty)$  левая часть уравнения является монотонно возрастающей, а правая часть — монотонно убывающей функцией. Следовательно, данное уравнение может иметь лишь один положительный корень. Подбором на-

ходим, что  $x = 4$  является его корнем, и, значит,  $x = -4$  также его корень. Таким образом, произведение всех корней уравнения равно  $4 \cdot (-4) = -16$ .

*Ответ:*  $-16$ .

**280.** Левая часть уравнения не меньше единицы, а правая не больше единицы. Поэтому равенство возможно, только если правая и левая части уравнения равны единице. Решая уравнение  $2^{\sqrt{x-3}} = 1$ , имеем  $\sqrt{x-3} = 0$ , то есть  $x = 3$ . Подставляя в исходное уравнение, убеждаемся, что  $x = 3$  является корнем.

*Ответ:*  $3$ .

**281.** В левой части уравнения стоит нечётная функция. У нечётной функции каждому корню  $x_1 = a$  соответствует корень  $x_2 = -a$ , таким образом все корни, кроме, быть может, нулевого, разбиваются на пары корней, дающих в сумме ноль. Поэтому сумма всех корней равна нулю.

*Ответ:*  $0$ .

**282.** В левой части уравнения стоит нечётная функция. У нечётной функции каждому корню  $x_1 = a$  соответствует корень  $x_2 = -a$ , таким образом все корни, кроме, быть может, нулевого, разбиваются на пары корней, дающих в сумме ноль. Поэтому сумма всех корней равна нулю.

*Ответ:*  $0$ .

**283.**  $3^{2x+1}x - 3 \cdot 9^{x+1} = 0$ ;  $3^{2x+1}x - 3^{2x+3} = 0$ ;  $3^{2x+1}(x - 9) = 0$ , то есть  $x = 9$ .

*Ответ:*  $9$ .

**284.** Левая часть уравнения не больше единицы, потому что аргумент тангенса принимает значения  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$ . Правая часть уравнения равна

$1 + (x + 7)^2$ , она не меньше единицы. Поэтому равенство возможно, только если правая и левая части уравнения равны единице. Решая уравнение  $1 + (x + 7)^2 = 1$ , находим  $x = -7$ . Подставляя в исходное уравнение, убеждаемся, что  $x = -7$  — его корень.

*Ответ:*  $-7$ .

**285.** Функция  $f$  чётна. Пусть у нашего уравнения есть корень  $x_1 = a$ , то есть  $f(\log_2 a) = 0$ , тогда  $f\left(\log_2 \frac{1}{a}\right) = f(-\log_2 a) = f(\log_2 a) = 0$ ,

это значит, что  $\frac{1}{a}$  — тоже корень нашего уравнения. Таким образом, все корни, кроме, быть может,  $x = 1$ , разбиваются на пары корней, дающих в произведении  $1$ . Тогда произведение всех корней равно единице.

*Ответ:*  $1$ .

286.  $3^x + 2^{x \log_2 3} \cdot x = 0$ ;  $3^x + 3^x \cdot x = 0$ ;  $3^x(x + 1) = 0$ , то есть  $x = -1$ .

Ответ:  $-1$ .

287. Левая часть уравнения не больше единицы, а правая часть равна  $1 + (x + 1)^2$ , она не меньше единицы. Поэтому равенство возможно, только если правая и левая части уравнения равны единице. Решая уравнение  $1 + (x + 1)^2 = 1$ , находим  $x = -1$ .

Подставляя в исходное уравнение, убеждаемся, что  $x = -1$  является его корнем.

Ответ:  $-1$ .

288. 1) Воспользуемся формулой двойного косинуса аргумента и преобразуем заданное уравнение к виду:  $\left(\frac{1}{10}\right)^{\cos(12\pi x)-1} = -4x^2 + 12x - 8$ .

$-1 \leq \cos(12\pi x) \leq 1$ ;  $-2 \leq \cos(12\pi x) - 1 \leq 0$ . Поскольку функция вида  $y = a^x$  при  $0 < a < 1$  убывает на  $R$ , то

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{-2} \geq \left(\frac{1}{10}\right)^{\cos(12\pi x)-1} \geq \left(\frac{1}{10}\right)^0, \quad 1 \leq \left(\frac{1}{10}\right)^{\cos(12\pi x)-1} \leq 100.$$

2) График функции  $y = -4x^2 + 12x - 8$  — парабола с вершиной в точке  $x_0 = 1,5$ ,  $y(x_0) = 1$ . Поскольку у рассматриваемой параболы ветви направлены вниз, то найденная вершина является её точкой максимума, тогда  $-4x^2 + 12x - 8 \leq 1$ . Следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение  $x = 1,5$ , которое является решением уравнений  $-4x^2 + 12x - 8 = 1$  и  $\left(\frac{1}{10}\right)^{\cos(12\pi x)-1} = 1$ .

Ответ:  $1,5$ .

289. 1)  $0 \leq \sin^2(10\pi x) \leq 1$ ;  $-1 \leq -\sin^2(10\pi x) \leq 0$ . Поскольку график функции вида  $y = a^x$  при  $a > 1$  возрастает, то  $5^{-1} \leq 5^{-\sin^2(10\pi x)} \leq 1$ .

2) Рассмотрим функцию  $y = 4x^2 - 12x + 10$ . График этой функции есть парабола с вершиной в точке  $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1,5$ ,  $y(x_0) = 1$ . Поскольку у рассматриваемой параболы ветви направлены вверх, то найденная вершина является её точкой минимума. Следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение  $x = 1,5$ , которое является решением уравнений  $5^{\sin^2(10\pi x)} = 1$ ,  $4x^2 - 12x + 10 = 1$ .

Ответ:  $1,5$ .

290. ОДЗ:  $x > 0$ .

$x^2 + x - 6 = 0$ ;  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 2$ . Учитывая ОДЗ, получим, что  $x = 2$ .

Ответ:  $2$ .

$$291. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \neq -\frac{1}{28}. \end{cases}$$

Из второго уравнения  $x = 1 + 7y$ , из первого уравнения  $\sqrt{x} = -1 - 28y$ , откуда  $1 + 7y = (-1 - 28y)^2 = (1 + 28y)^2$ ;  $16y^2 + y = 0$ ;  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = -\frac{1}{16}$ .

Подставляя  $y = 0$  в первое уравнение, убеждаемся, что  $y = 0$  не является его решением.  $y = -\frac{1}{16}$ ,  $x = 1 + 7y = \frac{9}{16}$ .  $x + y = 0,5$ .

*Ответ:* 0,5.

292. Замена  $4^{2x} = t$ ,  $0 < t \leq 8,5$ , приводит уравнение к виду

$$\left(3 - \frac{1}{4}t\right)^2 = 17 - 2t; \quad 9 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{16}t^2 + 2t - 17 = 0; \quad t^2 + 8t - 128 = 0;$$

$t_1 = 8$ ,  $t_2 = -16$  — не удовлетворяет условию  $t \in (0; 8,5]$ . Итак,  $4^{2x} = 8$ ;  $2^{4x} = 2^3$ ;  $x = 0,75$ .

*Ответ:* 0,75.

293. Сделаем замену  $t = 2^{2x-2}$ ,  $t > 0$ . Тогда  $2^{2x} = 4t$ . Получим уравнение:  $3 - t = \sqrt{9 - 4t}$ . Возведя обе части уравнения в квадрат ( $9 - 4t \geq 0$ ), имеем  $9 - 6t + t^2 = 9 - 4t$ ;  $t^2 - 2t = 0$ ;  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 2$ . Так как  $t > 0$ , то  $t = 2$ . Отсюда  $2^{2x-2} = 2$ ;  $2x - 2 = 1$ ;  $2x = 3$ ;  $x = 1,5$ .  $t = 2$  удовлетворяет условию  $9 - 4t \geq 0$ .

*Ответ:* 1,5.

294. Сделаем замену  $t = 5^{2x-1}$ ,  $t > 0$ . В результате получим уравнение  $1 + t = \sqrt{9 - 5t}$ . Возведя обе части уравнения в квадрат ( $9 - 5t \geq 0$ ), имеем  $1 + 2t + t^2 = 9 - 5t$ ;  $t^2 + 7t - 8 = 0$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = -8$ . Так как  $t > 0$ , то  $t = 1$ .  $t = 1$  удовлетворяет условию  $9 - 5t \geq 0$ . Отсюда  $5^{2x-1} = 1$ ;  $2x - 1 = 0$ ;  $x = 0,5$ .

*Ответ:* 0,5.

295. ОДЗ.  $y - 3x \geq 0$ .

Выразим из первого уравнения  $x = y - 2$  и подставим его во второе:  $y - \sqrt{y - 3(y - 2)} = 3$ ;  $\sqrt{6 - 2y} = y - 3$ ; (1)  
 $6 - 2y = y^2 - 6y + 9$ ;  $y^2 - 4y + 3 = 0$ ,  $y_1 = 3$ ;  $y_2 = 1$ . Проверка показывает,  $y = 1$  не является корнем уравнения (1) (правая часть при  $y < 3$  отрицательна).

$y = 3$  — корень уравнения (1). Тогда  $x = y - 2 = 3 - 2 = 1$ . Пара (1; 3) удовлетворяет ОДЗ. Вычислим искомое значение  $y + 2x = 3 + 2 = 5$ .

*Ответ:* 5.

296. ОДЗ:  $x > 2$ .

Решая уравнение  $x(x^2 - 4) \log_3(x - 2) = 0$ , получим, что  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$ . С учётом ОДЗ корнем исходного уравнения является только  $x = 3$ .

*Ответ:* 3.

**297.** ОДЗ.  $y + 2x \geq 0$  Из второго уравнения системы  $y = 5 - 3x$ . Подставим значение  $y$  в первое уравнение:  $3x - \sqrt{5 - 3x + 2x} = 1$ ;  $\sqrt{5 - x} = 3x - 1$  (\*).

Тогда  $5 - x = 9x^2 - 6x + 1$ ;  $9x^2 - 5x - 4 = 0$ ;  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -\frac{4}{9}$ .  $x = -\frac{4}{9}$

не является решением уравнения (\*), так как при этом  $x$  значение выражения  $3x - 1$  отрицательно. Имеем:  $x = 1$ ,  $y = 5 - 3x = 2$ . Пара (1; 2) удовлетворяет ОДЗ. Значение искомого выражения  $y - x = 2 - 1 = 1$ .

*Ответ:* 1.

$$298. \frac{x^2 - 5x + 6}{5^{x-1} - 25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ 5^{x-1} \neq 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3, \end{cases} \\ x \neq 3; \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

*Ответ:* 2.

**299.**  $9^x + 50 = 5 + 14 \cdot 3^x$ . Пусть  $3^x = t$ , тогда  $t^2 - 14t + 45 = 0$ ;  $t_{1,2} = 7 \pm 2$ ;  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = \log_3 5$ ;  $x_1 > x_2$ .

*Ответ:* 2.

**300.** ОДЗ:  $x \neq 2$ .

Из первого уравнения  $y_1 = \frac{1}{2}$ ,  $y_2 = -3$ . Подставим  $y = \frac{1}{2}$  во второе уравнение:  $5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 25 = 0$ . Пусть  $5^x = t$ ,  $t > 0$ , тогда  $t^2 - 26t + 25 = 0$ ;  $t_1 = 25$ ,  $t_2 = 1$ ;  $x = 2$ ,  $x = 0$ .  $x = 2$  не принадлежит в ОДЗ, значит  $x = 0$ .

Аналогично при  $y = -3$  получим, что решений нет.  $y - x = \frac{1}{2} - 0 = 0,5$ .

*Ответ:* 0,5.

**301.**  $\begin{cases} 3^x - 3^y = 6, \\ x + y = 3. \end{cases}$   $x = 3 - y$  подставим в первое уравнение. Получим:

$3^{3-y} - 3^y = 6$ . Замена  $3^y = z$ ,  $z > 0$ .  $\frac{27}{z} - z = 6$ , откуда:  $z_1 = -9$  (не удовлетворяет условию  $z > 0$ ),  $z_2 = 3$ . После вычислений  $y = 1$ ,  $x = 2$ . Итак,  $3^y - 2x = -1$ .

*Ответ:* -1.

$$302. 5^{3x+7} = 25^{2|x|}; 5^{3x+7} = 5^{4|x|}; 3x + 7 = 4|x|; \begin{cases} 3x + 7 = 4x, \\ x \geq 0, \\ 3x + 7 = -4x, \\ x < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7, \\ x = -1. \end{cases}$$

Наибольший из корней равен 7.

Ответ: 7.

**303.** Так как  $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$ , то система примет вид  $\begin{cases} y = |x - 4|, \\ y = |x + 3|, \end{cases}$  откуда  $|x - 4| = |x + 3|$ . Возведём обе части последнего равенства в квадрат:  $x^2 - 8x + 16 = x^2 + 6x + 9$ , получим  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = \left| \frac{1}{2} + 3 \right| = \frac{7}{2}$ . Решение системы  $\left( \frac{1}{2}; \frac{7}{2} \right)$ . Искомое выражение равно  $x_0 + y_0 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$ .

Ответ: 4.

**304.**  $\begin{cases} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - y = 0, \\ y - |2x + 3| = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 1| = y, \\ y = |2x + 3|; \end{cases} \quad |2x - 1| = |2x + 3|;$   
 $x = -\frac{1}{2}, y = 2; x - y = -\frac{1}{2} - 2 = -2,5$ .

Ответ:  $-2,5$ .

**305.** ОДЗ исходного уравнения:  $-5 \leq x \leq 5$ . При  $x = -5$  и  $x = 5$  левая часть обращается в ноль. Это два решения. Остальные будем искать из уравнения  $3 - 3\sin x - \cos^2 x = 0$  при  $-5 < x < 5$ . Получаем:  $3 - 3\sin x - (1 - \sin^2 x) = 0$  или  $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$ . Обозначим  $\sin x = t$ , тогда  $-1 \leq t \leq 1$ :  $t^2 - 3t + 2 = 0$ . Решения этого уравнения:  $t_1 = 1$ ;  $t_2 = 2$ . Второе решение  $t = 2$  не удовлетворяет неравенству  $-1 \leq t \leq 1$ . Остаётся  $t = 1$ . Тогда  $\sin x = 1$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in Z$ . Так как  $-5 < x < 5$ , то это равенство возможно только в случаях  $n = -1$  и  $n = 0$ . Получим ещё два решения. Таким образом, исходное уравнение имеет четыре корня.

Ответ: 4.

**306.** ОДЗ:  $4 \leq x \leq 6$ . Найдём область значений (на ОДЗ) левой и правой части данного уравнения. Для нахождения области значения левой части уравнения исследуем функцию  $y(x) = \sqrt{6 - x} + \sqrt{x - 4}$ .

$$y'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{6-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-4}} = \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{x-4}}{2\sqrt{6-x} \cdot \sqrt{x-4}} = 0; \sqrt{6-x} = \sqrt{x-4};$$

$$x = 5; 5 \in [4; 6].$$

$y(4) = \sqrt{2}$ ,  $y(5) = 2$ ,  $y(6) = \sqrt{2}$ . Поэтому область значений левой части исходного уравнения  $y \in [\sqrt{2}; 2]$ . Для нахождения области значений правой части исходного уравнения построим график функции  $y(x) = 2 +$

+  $|x - 5|$ . Из рисунка 11 видим, что область значений функции  $y(x) = 2 + |x - 5|$  на ОДЗ есть  $y \in [2; 3]$ .

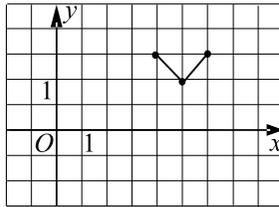


Рис. 11.

Из проведённых исследований видим, что область значений (на ОДЗ) левой части исходного уравнения есть  $[\sqrt{2}; 2]$ , а правой части  $[2; 3]$ . Значит, равенство может быть только в случае  $\begin{cases} \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4} = 2, \\ 2 + |x-5| = 2. \end{cases}$  Отсюда  $x = 5$ .

Ответ: 5.

**307.** Так как должно выполняться условие  $-x > 0$ , то  $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ . Поэтому данное уравнение равносильно уравнению  $\sqrt{2 \lg(-x)} = \lg(-x)$ .

Решая последнее уравнение, получаем:  $\begin{cases} 2 \lg(-x) = \lg^2(-x), \\ \lg(-x) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lg(-x)(2 - \lg(-x)) = 0, \\ \lg(-x) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(-x) = 0, \\ \lg(-x) = 2, \\ \lg(-x) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = -100. \end{cases}$$

Оба найденных значения удовлетворяют исходному уравнению, но  $x = -1$  — корень, модуль которого наименьший.

Ответ:  $-1$ .

**308.**  $7^{2x} - 49 \cdot 7^x - 50 \leq 0$ . Замена:  $7^x = t, t > 0$ .  $t^2 - 49t - 50 \leq 0$ ,  $(t+1)(t-50) \leq 0$ . Так как  $t > 0$ , то  $t+1 > 0$ , тогда  $t-50 \leq 0, t \leq 50$ . Вернёмся к замене  $7^x \leq 50, 7^2 = 49 < 50$ . Наибольшее целое решение  $x = 2$ .

Ответ: 2.

**309.**  $2^{2x} - 18 \cdot 2^x + 32 < 0$ . Замена:  $2^x = t, t > 0$ .  $t^2 - 18t + 32 < 0$ ,  $(t-16)(t-2) < 0, 2 < t < 16$ . Вернёмся к замене  $2 < 2^x < 16, 2 < 2^x < 2^4$ . Так как показательная функция  $y = 2^t$  возрастающая, то  $1 < x < 4$ .

Наибольшее целое решение 3, наименьшее целое 2. Их произведение:  $2 \cdot 3 = 6$ .

Ответ: 6.

310.  $3^{2x} - \frac{3^x}{3} - 27 \cdot 3^x + 9 < 0$ ,  $3 \cdot 3^{2x} - 82 \cdot 3^x + 27 < 0$ . Замена:  $3^x = t$ ,

$t > 0$ .  $3t^2 - 82t + 27 < 0$ .  $3t^2 - 82t + 27 = 0$ ,  $t_{1,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 81}}{3}$ ,

$t_{1,2} = \frac{41 \pm 40}{3}$ ,  $t_1 = \frac{1}{3}$ ,  $t_2 = \frac{2}{7}$ ,  $3t^2 - 82t + 27 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)(t - 27)$ .

$\left(t - \frac{1}{3}\right)(t - 27) < 0$ ,  $\frac{1}{3} < t < 27$ . Вернёмся к замене:  $\frac{1}{3} < 3^x < 27$ ,

$3^{-1} < 3^x < 3^3$ . Показательная функция  $y = 3^t$  возрастает, значит,  $-1 < x < 3$ . Наибольшее целое решение 2, наименьшее целое 0. Их произведение:  $2 \cdot 0 = 0$ .

Ответ: 0.

311. Используя свойства степеней, находим, что  $8^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$ , а  $4^{\frac{5}{6}} = (2^2)^{\frac{5}{6}} = 2^{2 \cdot \frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{3}}$ . Так как  $\frac{5}{3} > \frac{3}{2}$ , то  $2^{\frac{5}{3}} > 2^{\frac{3}{2}}$ , а потому

$8^{\frac{1}{2}} < 4^{\frac{5}{6}}$ . Из неравенства  $4 < 8 < 9$  следует, что  $2 = 4^{\frac{1}{2}} < 8^{\frac{1}{2}} < 9^{\frac{1}{2}} = 3$ . Поэтому целая часть числа  $8^{\frac{1}{2}}$  равна 2.

Ответ: 2.

312. Используя свойства степеней, находим, что  $27^{\frac{5}{12}} = (3^3)^{\frac{5}{12}} = 3^{3 \cdot \frac{5}{12}} = 3^{\frac{5}{4}}$ , а  $81^{\frac{1}{3}} = (3^4)^{\frac{1}{3}} = 3^{4 \cdot \frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{3}}$ . Так как  $\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$ , то

$3^{\frac{4}{3}} > 3^{\frac{5}{4}}$ , а потому  $81^{\frac{1}{3}} > 27^{\frac{5}{12}}$ . Из неравенства  $64 < 81 < 125$  следует, что  $4 = 64^{\frac{1}{3}} < 81^{\frac{1}{3}} < 125^{\frac{1}{3}} = 5$ . Поэтому целая часть числа  $81^{\frac{1}{3}}$  равна 4.

Ответ: 4.

313. Решая неравенство  $\frac{x-5}{x+1} \leq 0$  методом интервалов, получим

$x \in (-1; 5]$  (см. рис. 12).



Рис. 12.

Найдём все значения  $x$ , для которых выполняется условие

$$\log_{0,2} \left( 1 + \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{3} \right) \right) < 0. \log_{\frac{1}{5}} \left( 1 + \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{3} \right) \right) < 0;$$

$$\log_5 \left( 1 + \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{3} \right) \right) > 0; 1 + \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{3} \right) > 1; \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{3} \right) > 0;$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{3} \right) \neq 0; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \frac{\pi x}{3} \neq \pi k, k \in Z;$$

$x \neq 3k, k \in Z$ . Таким образом, целые решения неравенства  $\frac{x-5}{x+1} \leq 0$ , удовлетворяющие указанному условию, равны 1, 2, 4, 5. Их количество равно 4.

Ответ: 4.

$$314. \text{ ОДЗ. } \begin{cases} 3x + 2 \geq 0, \\ x - 3 > 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3}, \\ x > 3; \end{cases} \quad x > 3.$$

$$\sqrt{3x+2} \geq \frac{x-1}{\sqrt{x-3}}; \frac{\sqrt{3x+2} \cdot \sqrt{x-3} - (x-1)}{\sqrt{x-3}} \geq 0.$$

$\sqrt{x-3} > 0$  при  $x$ , удовлетворяющих ОДЗ, значит можно обе части неравенства умножить на  $\sqrt{x-3}$ .

$$\sqrt{3x+2} \cdot \sqrt{x-3} - (x-1) \geq 0; \sqrt{3x+2} \cdot \sqrt{x-3} \geq x-1.$$

При  $x$ , принадлежащих ОДЗ обе части неравенства положительны. Возведём обе части неравенства в квадрат, получим  $(3x+2)(x-3) \geq (x-1)^2$ ;

$$3x^2 - 7x - 6 \geq x^2 - 2x + 1; 2x^2 - 5x - 7 \geq 0; (2x-7)(x+1) \geq 0; \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 3, 5. \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ, получим  $x \in [3, 5; +\infty)$ .

Ответ:  $[3, 5; +\infty)$ .

315. Так как  $x^2 + x + 1 > 0$  при всех  $x \in R (D < 0)$ , то решение исходного неравенства сводится к решению неравенства  $7 \cdot 2^x - 2^{2x+1} - 3 \geq 0$ .

Обозначим  $2^x = t, t > 0$ . Тогда  $7t - 2t^2 - 3 \geq 0; 2t^2 - 7t + 3 \leq 0$ ;

$$(2t-1)(t-3) \leq 0; \frac{1}{2} \leq t \leq 3. \text{ Вернёмся к переменной } x: 2^{-1} \leq 2^x \leq 3;$$

$-1 \leq x \leq \log_2 3$ . Так как  $1 < \log_2 3 < 2$ , то целых решений будет 3:  $x = -1, x = 0, x = 1$ .

Ответ: 3.

316. Найдём множество чисел, на котором функции совпадают, решив систему

$$\begin{cases} 2x^2 - 8x + 9 - |x-2| > 0, \\ 2x^2 - 8x + 9 - |x-2| \neq 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два возможных случая.

$$1) \begin{cases} 0 < x \leq 2, \\ 2x^2 - 8x + 9 + x - 2 > 0, \\ 2x^2 - 8x + 9 + x - 2 \neq 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x \leq 2, \\ 2x^2 - 7x + 7 > 0, \\ 2x^2 - 7x + 6 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x \leq 2, \\ x \text{ — любое действительное число,} \\ (2x - 3)(x - 2) \neq 0; \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1,5, 1,5 < x < 2.$$

$$2) \begin{cases} x > 2, \\ 2x^2 - 8x + 9 - x + 2 > 0, \\ 2x^2 - 8x + 9 - x + 2 \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ 2x^2 - 9x + 11 > 0, \\ 2x^2 - 9x + 10 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ x \text{ — любое действительное число,} \\ (2x - 5)(x - 2) \neq 0; \end{cases} \Rightarrow 2 < x < 2,5, x > 2,5.$$

Данные функции совпадают на множестве

$(0; 1,5) \cup (1,5; 2) \cup (2; 2,5) \cup (2,5; +\infty)$ . Найдём натуральные и положительные полуцелые числа, на которых функции не совпадают: 1,5, 2, 2,5. Их сумма  $1,5 + 2 + 2,5 = 6$ .

*Ответ:* 6.

**317.** Искомая область определения является множеством решений систе-

$$\text{мы} \begin{cases} 1 - \sin \frac{\pi x}{2} > 0, \\ 5 - |x| - |x + 3| \geq 0. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство отдельно.

$$1) 1 - \sin \frac{\pi x}{2} > 0, \sin \frac{\pi x}{2} < 1, \frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x \neq 1 + 4k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) 5 - |x| - |x + 3| \geq 0.$$

$$a) \begin{cases} x < -3, \\ 5 + x + x + 3 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x < -3, \\ 2x \geq -8; \end{cases} \begin{cases} x < -3, \\ x \geq -4; \end{cases} \Rightarrow -4 \leq x < -3.$$

$$б) \begin{cases} -3 \leq x \leq 0, \\ 5 + x - x - 3 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} -3 \leq x \leq 0, \\ 0 \cdot x \geq -2; \end{cases} \Rightarrow -3 \leq x \leq 0.$$

$$в) \begin{cases} x > 0, \\ 5 - x - x - 3 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ -2x \geq -2; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ x \leq 1; \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 1.$$

Множество решений неравенства:  $-4 \leq x \leq 1$ .

Область определения данной функции  $[-4; -3) \cup (-3; 1)$  содержит четыре целых числа.

*Ответ:* 4.

**318.** Найдём область определения данной функции, решив неравенство

$-1 \leq 3\sqrt{\frac{x^2 - 8x + 16}{4}} + \frac{x}{4} \leq 1, -1 \leq \frac{3}{2}|x - 4| + \frac{x}{4} \leq 1$ . Решение неравенства равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{3}{2}|x - 4| + \frac{x}{4} \geq -1, \\ \frac{3}{2}|x - 4| + \frac{x}{4} \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 6|x - 4| + x \geq -4, \\ 6|x - 4| + x \leq 4. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

$$1) \begin{cases} x - 4 < 0, \\ 6(4 - x) + x \geq -4, \\ 6(4 - x) + x \leq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ -5x \geq -28, \\ -5x \leq -20; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ x \leq \frac{28}{5}, \\ x \geq 4; \end{cases} \Rightarrow \text{решений нет.}$$

$$2) \begin{cases} x - 4 \geq 0, \\ 6(x - 4) + x \geq -4, \\ 6(x - 4) + x \leq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ 7x \geq 20, \\ 7x \leq 28; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ x \geq \frac{20}{7}, \\ x \leq 4; \end{cases} \quad x = 4.$$

Область определения данной функции — множество, состоящее из одного элемента  $\{4\}$ . Наибольшее целое число 4, наименьшее целое число, входящее в это множество, 4. Их сумма  $4 + 4 = 8$ .

*Ответ:* 8.

**319.** Так как функция  $y = t^{\frac{1}{4}}$  определена при всех  $t \geq 0$ , то найдём область определения данной функции на промежутке  $(-6; 0)$  решив систему неравенств

$$\begin{cases} -6 < x < 0, \\ |3 - x| + x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -6 < x < 0, \\ 3 - x + x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -6 < x < 0, \\ 0 \cdot x \geq -3; \end{cases} \Rightarrow -6 < x < 0.$$

На заданном промежутке область определения данной функции  $(-6; 0)$  содержит 5 целых чисел.

*Ответ:* 5.

**320.** Областью определения данной функции является множество решений неравенства  $\log_{0,4} |0,2x - 1| - 1 \geq 0, \log_{0,4} |0,2x - 1| \geq 1,$

$$\log_{0,4} |0,2x - 1| \geq \log_{0,4} 0,4, \quad \begin{cases} |0,2x - 1| \leq 0,4, \\ 0,2x - 1 \neq 0; \end{cases}$$

так как функция  $y = \log_{0,4} t, t > 0, 0 < 0,4 < 1$  убывающая,

$$\begin{cases} -0,4 \leq 0,2x - 1 \leq 0,4, \\ x \neq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 0,6 \leq 0,2x \leq 1,4, \\ x \neq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \leq x \leq 7, \\ x \neq 5; \end{cases}$$

$\Rightarrow 3 \leq x < 5, 5 < x \leq 7$ . Область определения данной функции  $[3; 5) \cup (5; 7]$  содержит 4 целых числа.

*Ответ:* 4.

**321.** Областью определения данной функции является множество решений неравенства  $\frac{2x+5}{|x+1|} - 1 > 0$ ,  $\frac{2x+5-|x+1|}{|x+1|} > 0$ ,  $|x+1| > 0$ , при всех  $x \neq -1$ , значит, неравенство равносильно неравенству  $2x+5-|x+1| > 0$ ,  $x \neq -1$ .

$$1) \begin{cases} x < -1, \\ 2x+5+x+1 > 0; \end{cases} \begin{cases} x < -1, \\ 3x > -6; \end{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x > -2; \end{cases} \quad -2 < x < -1.$$

$$2) \begin{cases} x > -1, \\ 2x+5-x-1 > 0; \end{cases} \begin{cases} x > -1, \\ x > -4; \end{cases} \quad x > -1.$$

Область определения данной функции  $(-2; -1) \cup (-1; +\infty)$ . Наименьшее целое число 0.

*Ответ:* 0.

**322.**  $y = \sqrt{16 - 13 \cdot 3^{-|x|}}$ . Найдём  $E(y)$  и выберем наименьшее целое значение.  $|x| \geq 0$ ,  $|x| \leq 0$ ,  $0 < 3^{-|x|} \leq 3^0$ ,  $-13 \leq -13 \cdot 3^{-|x|} < 0$ ,  $3 \leq 16 - 13 \cdot 3^{-|x|} < 16$ ,  $\sqrt{3} \leq \sqrt{16 - 13 \cdot 3^{-|x|}} < 4$ .

$E(y) = [\sqrt{3}; 4)$ , наименьшее целое 2.

*Ответ:* 2.

**323.**  $y = \frac{15}{2} \sqrt{7 \cos 2x - 12 \cos^2 x + 23}$ . Найдём  $E(y)$  и посчитаем количество целых значений.

$$7 \cos 2x - 12 \cos^2 x + 23 = 7(2 \cos^2 x - 1) - 12 \cos^2 x + 23 = 2 \cos^2 x + 16;$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1, 0 \leq 2 \cos^2 x \leq 2, 16 \leq 2 \cos^2 x + 16 \leq 18,$$

$$4 \leq \sqrt{7 \cos 2x - 12 \cos^2 x + 23} \leq \sqrt{18},$$

$$30 \leq \frac{15}{2} \sqrt{7 \cos 2x - 12 \cos^2 x + 23} \leq \frac{15\sqrt{18}}{2} \approx 31,8. \text{ Целые значения в}$$

этом промежутке: 30, 31. Всего 2.

*Ответ:* 2.

**324.**  $y = \frac{17}{3} \sqrt{49 \sin^2 2x + 16}$ . Найдём  $E(y)$  и посчитаем количество целых значений  $49 \sin^2 2x + 16$ .  $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$ ,  $0 \leq 49 \sin^2 2x \leq 49$ ,

$$16 \leq 49 \sin^2 2x + 16 \leq 65, 4 \leq \sqrt{49 \sin^2 2x + 16} \leq \sqrt{65},$$

$$\frac{17 \cdot 4}{3} \leq \frac{17}{3} \sqrt{49 \sin^2 2x + 16} \leq \frac{17\sqrt{65}}{3}, \frac{17 \cdot 4}{3} = 22\frac{2}{3}; \frac{17\sqrt{65}}{3} \approx 45, \dots$$

Целые 23, 24, ..., 45. Всего 23.

*Ответ:* 23.

**325.**  $y = \log_{\sqrt{5}}(-x^2 - 10x)$ .

Так как  $\sqrt{5} > 1$ , то  $y = \log_{\sqrt{5}} t$  монотонно возрастающая, значит её наибольшее значение при  $t = -x^2 - 10x$  наибольшем.  $t$  наибольшее при

$$x = x_0, x_0 = -\frac{10}{2} = -5. y_{\text{наиб.}} = \log_{\sqrt{5}}(-25 + 50) = \\ = \log_{\sqrt{5}} 25 = 4 \log_5 5 = 4.$$

**326.**  $y = \frac{10}{x^2 - 8x + 21}$ . Функция представляет собой дробь, в числителе которой положительное число, а в знаменателе квадратный трёхчлен, принимающий положительные значения (первый коэффициент больше нуля, дискриминант отрицательный). Тогда меньшему значению знаменателя соответствует большее значение функции.  $x^2 - 8x + 21$  принимает наименьшее значение при  $x = \frac{8}{2} = 4$ .

$$y_{\text{наиб.}} = y(4) = \frac{10}{16 - 32 + 21} = \frac{10}{5} = 2.$$

*Ответ:* 2.

**327.**  $y = -8(4x^2 - 4x + 3)^{-1}$ ,  $y = \frac{-8}{4x^2 - 4x + 3}$ ; функция представляет собой дробь, в числителе которой отрицательное число, а в знаменателе квадратный трёхчлен, принимающий лишь положительные значения (первый коэффициент положительный, дискриминант отрицательный), тогда меньшему знаменателю соответствует меньшее значение функции.

$$4x^2 - 4x + 3 \text{ принимает наименьшее значение при } x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$y_{\text{наим.}} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-8}{4 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3} = \frac{-8}{2} = -4.$$

*Ответ:* -4.

**328.**  $y = \frac{17}{5 - 2^{-|x|}}$ . Найдём  $E(y)$  и выберем наименьшее целое:  $|x| \geq 0$ ,  $-|x| \leq 0$ ,  $0 < 2^{-|x|} \leq 2^0$ ,  $-1 \leq -2^{-|x|} < 0$ ,  $4 \leq 5 - 2^{-|x|} < 5$ ,  $\frac{17}{5} < \frac{17}{5 - 2^{-|x|}} \leq \frac{17}{4}$ .

$y_{\text{наим.}}$  целое = 4.

**329.**  $y = \log_3(3 + 24x - 6x^2)$  задана на  $[-\sqrt{3} + 2; 4]$ . Найдём  $E(y)$ .  $y = \log_3 t$  монотонно возрастает и принимает наибольшее значение при  $t$  наибольшем.  $t = 3 + 24x - 6x^2$ , то есть при  $x = \frac{-24}{-12} = 2$ .

$y_{\text{наиб.}} = y(2) = \log_3(3 + 48 - 24) = \log_3 27 = 3$ . А наименьшее  $\min\{y(2 - \sqrt{3}); y(4)\} = \min\{2; 1\} = 1$ . Следовательно  $E(y) = [1; 3]$ . Дли-

на отрезке, который является областью значений для данной функции на  $[-\sqrt{3} + 2; 4]$ , равна 2.

Ответ: 2.

**330.**  $y = 2 \cdot 3^{x+1} - 9^x - 8$  на  $[0; 3]$ . Обозначим  $3^x = t$ ,  $t \in [1; 27]$ .

$y = -t^2 + 6t - 8$ .  $y$  наибольшее при  $t = \frac{6}{2} = 3$ .  $y(3) = -9 + 18 - 8 = 1$ ,

$y(1) = -1 + 6 - 8 = -2$ ,  $y(27) = -27^2 + 6 \cdot 27 - 8 = -575$ ,

$E(y) = [-575; 1]$ . Длина отрезка 576.

Ответ: 576.

**331.** Запишем данную функцию в виде  $y = \log_{\frac{1}{3}} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - x^2 \right) \right)$ . Так как

$0 < \frac{1}{3} < 1$ , то функция  $y = \log_{\frac{1}{3}} t$  монотонно убывающая.  $y_{\text{наим}}$  при  $t$

наибольшем.  $t = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - x^2 \right)$ . Функция  $t(k) = \operatorname{tg} k$ ,  $k \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in Z$

монотонно возрастающая.  $t_{\text{наиб}}$  при  $k$  наибольшем.  $k = \frac{\pi}{3} - x^2$  принимает

наибольшее значение при  $x = 0$ ,  $0 \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ .

$y_{\text{наим}} = y(0) = \log_{\frac{1}{3}} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$ .

Ответ:  $-\frac{1}{2}$ .

**332.** Так как  $0 < \frac{1}{3} < 1$ , то функция  $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ ,  $t > 0$  монотонно убыва-

ющая.  $y_{\text{наиб}}$  при  $t$  наименьшем.  $t = 2x^2 - 4x + 3$  принимает наименьшее значение при  $x = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1$ ,  $1 \in [-1; 2]$ .

$y_{\text{наиб}} = y(1) = \log_{\frac{1}{3}} (2 - 4 + 3) = \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$ .

Ответ: 0.

**333.**  $y = \sqrt[5]{\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x - 31}$

$\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x - 31 = \cos 3x - 31$ .

$y = \sqrt[5]{t}$  монотонно возрастает, то её наименьшее значение при  $t$  наименьшем.  $\cos 3x - 31$  принимает наименьшее значение, если  $\cos 3x$  — наименьшее, то есть  $\cos 3x = -1$ .

$y_{\text{наим}} = \sqrt[5]{-1 - 31} = \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$ .

Ответ: -2.

**334.** Отметим, что «подлогарифмическое» выражение — квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом и положительным первым коэффициентом. Следовательно, подлогарифмическое выражение всегда положительно. Основание логарифма больше единицы, следовательно, меньшему (наименьшему) значению подлогарифмического выражения соответствует меньшее (наименьшее) значение данной функции. Наименьшее значение квадратичная функция в нашем случае принимает при  $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$ .

$$\begin{aligned} y\left(-\frac{3}{2}\right) &= \log_2\left(4 \cdot \frac{9}{4} + 12 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 13\right) = \\ &= \log_2(9 - 18 + 13) = \log_2 4 = 2. \end{aligned}$$

*Ответ:* 2.

**335.** Функция представляет собой дробь, в числителе которой положительное число. Дробь принимает наибольшее значение при наименьшем значении знаменателя. Так как  $0,5 < 1$ , то функция  $f = \log_{0,5} t$ ,  $t > 0$  монотонно убывающая и принимает наименьшее значение при  $t$  наибольшем.  $t = 4x - x^2$  наибольшее значение принимает при  $x = \frac{-4}{-2} = 2$ ,  $2 \in [1; 3]$ .

$$y_{\text{наиб}} = y(2) = \frac{12}{\log_{0,5}(4 \cdot 2 - 2^2)} = \frac{12}{-2} = -6.$$

*Ответ:* -6.

**336.** Разделим числитель и знаменатель дроби на  $21^{2x}$  ( $21^{2x} > 0$ ). Функция примет вид  $y = \frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}}$ . Числитель дроби — число положительное. В знаменателе дроби сумма двух монотонно убывающих показательных функций  $\left(0 < \frac{1}{7} < 1, 0 < \frac{1}{3} < 1\right)$ .  $y_{\text{наим}}$  при наибольшем значении знаменателя.  $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$  принимает наибольшее значение на отрезке  $[0,5; 1]$  при  $x = 0,5$ .  $y_{\text{наим}} = y(0,5) = \frac{21}{3+7} = 2,1$ .

*Ответ:* 2,1.

**337.** Рассмотрим данную функцию как частное двух функций  $g(x)$  и  $f(x)$ . Для ответа на вопрос задачи необходимо найти  $g_{\text{наиб}}$ ,  $f_{\text{наим}}$ . Функция  $g = t^{\frac{2}{3}}$  монотонно возрастающая.  $g_{\text{наиб}}$  когда  $t$  наибольшее.

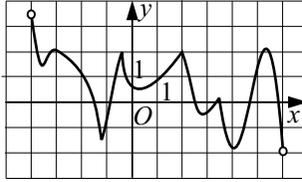


Рис. 13.

$k = \frac{7}{6}x - \frac{43}{6}$  принимает наибольшее значение на промежутке  $[7; 13]$

при  $x = 13$ . Функция  $f = \sqrt{k}$  на отрезке  $[7; 13]$  монотонно убывающая.  
 $k = 30 - 2x$ .  $f_{\text{наим}}$  при  $x = 13$ .

$$y_{\text{наиб}} = y(13) = \frac{\left(\frac{7 \cdot 13}{6} - \frac{43}{6}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{30 - 2 \cdot 13}} = \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{48}{6}\right)^2}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

$$338. y = \frac{2^{3x^2 - ax + 2}}{4^{3x^2 - 2ax}} = 2^{3x^2 - ax + 2 - 6x^2 + 4ax} = 2^{-3x^2 + 3ax + 2}.$$

Функция  $y = 2^t$ ,  $2 > 1$  монотонно возрастающая.  $y_{\text{max}}$  в точке, в которой  $t$  имеет максимум.  $t = -3x^2 + 3ax + 2$  имеет максимум в точке  $x = \frac{-3a}{2 \cdot (-3)} = \frac{a}{2}$ . По условию  $x = 5$ . Найдём  $a$  из уравнения  $\frac{a}{2} = 5$ .  
 $a = 10$ .

Ответ: 10.

339. Две точки минимума  $x = -3$  и  $x = 0,5$ .

Ответ: 2.

340. Ключевая идея: В точке максимума производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, график производной в точке максимума пересекает ось  $OX$  сверху вниз.

Производная функции  $g(x) = f(x) - x - 2$  на промежутке  $(-4; 6)$  равна  $g'(x) = f'(x) - 1$ . Таким образом, в точках максимума функции  $g(x)$  график функции  $y = f'(x)$  должен пересекать прямую  $y = 1$  сверху вниз. Из рисунка 13 видно, что таких точек 4.

Ответ: 4.

$$341. 1. \text{ Преобразуем функцию } g(x) = \log_4 \frac{3}{x^2 + 4x + 12} = \\ = \log_{\frac{1}{4}} \frac{x^2 + 4x + 12}{3}. \text{ Так как основание } \frac{1}{4} \text{ меньше 1, то наименьшее зна-}$$

чение функции  $g(x)$  на отрезке  $[-6; 0]$  достигается в тех же точках, что и наибольшее значение функции  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 12}{3}$ .

2. Для нахождения наибольшего значения функции  $f(x)$  найдём точки экстремума. Имеем,  $f'(x) = \frac{2x + 4}{3}$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x \in (-6; 0). \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$ . Далее, находим значения функции в точке экстремума и на концах отрезка. Получаем,  $f(-6) = 8$ ,  $f(-2) = \frac{8}{3}$ ,  $f(0) = 4$ . Следовательно, наибольшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[-6; 0]$  равно 8.

3. Таким образом, наименьшее значение функции  $g(x)$  на отрезке  $[-6; 0]$  равно  $\log_{\frac{1}{4}} 8 = -1,5$ .

*Ответ:*  $-1,5$ .

**342.** 1. Областью определения функции  $y = \sqrt{121 - x^2}$  являются все значения аргумента  $x$ , удовлетворяющие неравенству  $121 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 121 \geq x^2 \Leftrightarrow |x| \leq 11 \Leftrightarrow -11 \leq x \leq 11$ . Итак, функция  $y = \sqrt{121 - x^2}$  определена на отрезке  $[-11; 11]$  и, тем более, на отрезке  $[-6\sqrt{2}; 4\sqrt{6}]$ .

2. На промежутке  $[-11; 0)$  функция  $y = 121 - x^2$  строго возрастает, а на промежутке  $(0; 11]$  — строго убывает. А так как квадратный корень является монотонной функцией своего аргумента, то заданная функция  $y = \sqrt{121 - x^2}$  так же строго возрастает на  $[-11; 0)$  и строго убывает на  $(0; 11]$ , поэтому наибольшего своего значения на области определения, а значит и на отрезке  $[-6\sqrt{2}; 4\sqrt{6}]$ , она достигает в точке  $x = 0$ . Поскольку функция  $y$  чётная, то  $y(-6\sqrt{2}) = y(6\sqrt{2})$ , и так как  $6\sqrt{2} < 4\sqrt{6}$ , то  $y(6\sqrt{2}) > y(4\sqrt{6})$ . Теперь на отрезке  $[-6\sqrt{2}; 4\sqrt{6}]$  находим, что  $y_{\text{наим}} = y(4\sqrt{6}) = \sqrt{121 - 96} = 5$ , а  $y_{\text{наиб}} = y(0) = \sqrt{121} = 11$ . Таким образом,  $y_{\text{наиб}} - y_{\text{наим}} = 11 - 5 = 6$ .

*Ответ:* 6.

**343.** Точка  $x_0$  является точкой минимума функции  $f(x)$ , если производная  $f'(x)$  меняет в этой точке знак с "−" на "+". Из графика  $f'(x)$  видим, что  $x = 0$  единственная такая точка.

*Ответ:* 0.

**344.** Область определения  $y(x)$ : отрезок  $[-3; 7]$ .

Производная  $y'(x) = \frac{2 - x}{\sqrt{21 + 4x - x^2}}$  определена на  $[-1; 6]$ , и  $y'(2) = 0$ . Так как  $y'(x) > 0$  при  $x \in [-1; 2)$ , и  $y'(x) < 0$  при  $x \in (2; 6]$ , то  $x = 2$  — точка максимума  $y(x)$  на  $[-1; 6]$ , поэтому  $y_{\text{наиб}} = y(2) = 5$ .

А так как  $y(-1) = 4$ , а  $y(6) = 3$ , то  $y_{\text{наим}} = y(6) = 3$ , и  $y_{\text{наиб}} - y_{\text{наим}} = 5 - 3 = 2$ .

Ответ: 2.

**345.** Функция  $f(x)$  может принимать наибольшее значение на отрезке либо в точке максимума, в которой производная  $f'(x)$  меняет свой знак с «+» на «-», либо на одном из концов отрезка. Поскольку изображённая на рисунке 14 производная  $f'(x)$  неположительна на отрезке  $[-4; 1]$ , то функция  $f(x)$  не возрастает на этом отрезке и, следовательно, принимает наибольшее значение на левом конце отрезка, то есть в точке  $x_0 = -4$ .

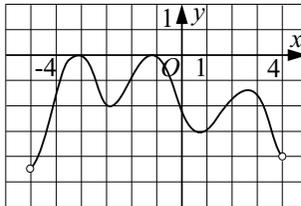


Рис. 14.

Ответ:  $-4$ .

**346.** Наибольшее и наименьшее значения на отрезке функция может принимать только на концах отрезка или в точках экстремума, то есть в точках, где её производная равна нулю либо не существует. Производная  $y'(x) = 6 \frac{x \ln 2}{2^{x^2-2}}$  существует во всех точках отрезка  $[-2; \sqrt{3}]$  и обращается в нуль в единственной точке этого отрезка:  $x = 0$ . Следовательно, это точка экстремума. Так как  $y'(x) < 0$  при  $x \in [-2; 0)$ , и  $y'(x) > 0$  при  $x \in (0; \sqrt{3}]$ , то  $x = 0$  — точка минимума функции  $y(x)$  на отрезке  $[-2; \sqrt{3}]$ , и  $y_{\text{наим}} = y(0) = -12$ . Наибольшее значение  $y(x)$  принимает в одном из концов отрезка. Так как  $y(-2) = -\frac{3}{4}$ , а  $y(\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}$ , то  $y_{\text{наиб}} = y(-2) = -\frac{3}{4}$ , и  $y_{\text{наиб}} - y_{\text{наим}} = -\frac{3}{4} - (-12) = 11,25$ .

Ответ: 11,25.

**347.** Функция  $f(x)$  может принимать наименьшее значение на отрезке либо в точке минимума, в которой производная  $f'(x)$  меняет свой знак с «-» на «+», либо на одном из концов отрезка.

Поскольку изображённая на рисунке 15 производная  $f'(x)$  неотрицательна на отрезке  $[-2; 5]$ , то функция  $f(x)$  не убывает на этом отрезке и, следовательно, принимает наименьшее значение на левом конце отрезка, то есть в точке  $x_0 = -2$ .

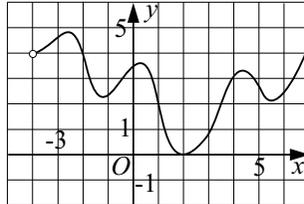


Рис. 15.

*Ответ:*  $-2$ .

**348.** Производная  $y'(x) = 10 \frac{x \ln 4}{4x^2 - 1}$  определена на  $[-\sqrt{2}; 1]$ , и  $y'(0) = 0$ .

Так как  $y'(x) < 0$  при  $x \in [-\sqrt{2}; 0)$ , и  $y'(x) > 0$  при  $x \in (0; 1]$ , то  $x = 0$  — точка минимума  $y(x)$  на  $[-\sqrt{2}; 1]$ , поэтому  $y_{\text{наим}} = y(0) = -20$ .

А так как  $y(-\sqrt{2}) = -\frac{5}{4}$ , а  $y(1) = -5$ , то  $y_{\text{наиб}} = y(-\sqrt{2}) = -\frac{5}{4}$ , и

$$y_{\text{наиб}} - y_{\text{наим}} = -\frac{5}{4} - (-20) = 18,75.$$

*Ответ:*  $18,75$ .

**349.** Из графика видно, что на отрезке  $[-6; 0]$  производная неположительна, а на отрезке  $[0; 4]$  неотрицательна. Значит, единственная точка экстремума функции  $0$  является точкой минимума, и в ней функция принимает наименьшее значение на отрезке  $[-6; 4]$ .

*Ответ:*  $0$ .

**350.** Функция  $f(x)$  не убывает, если  $f'(x) \geq 0$ . Из графика видно, что количество целых значений аргумента, для которых выполняется это условие равно  $6$ .

*Ответ:*  $6$ .

**351.** Из графика производной следует, что производная  $f'(x)$  неположительна на промежутке  $(-6; 1]$ , следовательно, на этом промежутке функция  $f(x)$  не возрастает. Протяжённость этого промежутка равна  $7$ .

*Ответ:*  $7$ .

**352.** Точка минимума функции — это точка, в которой производная функции равна нулю и меняет знак с минуса на плюс. На заданном промежутке

график производной пересекает ось  $Ox$  в двух точках, при этом точкой минимума является только точка  $x = -6$ .

*Ответ:*  $-6$ .

**353.** Точка максимума функции — это точка, в которой производная функции равна нулю и меняет знак с плюса на минус. График производной пересекает ось  $Ox$  в трёх точках, при этом точкой максимума является только точка  $x = -3$ .

*Ответ:*  $-3$ .

**354.** Точка минимума функции — это точка, в которой производная функции равна нулю и меняет знак с минуса на плюс. На заданном промежутке график производной пересекает ось  $Ox$  в двух точках, при этом точкой минимума является только точка  $x = 2$ .

*Ответ:*  $2$ .

**355.** Из графика видно, что на отрезке  $[-6; -3]$  производная неотрицательна, а на отрезке  $[-3; 5]$  неположительна. Значит, единственная точка экстремума функции  $-3$  является точкой максимума, и в ней функция принимает наибольшее значение на отрезке  $[-6; 5]$ .

*Ответ:*  $-3$ .

**356.** Из графика видно, что на всём отрезке  $[1; 11]$  производная положительна, значит функция монотонно возрастает на этом отрезке и принимает наибольшее значение на правом конце этого отрезка.

*Ответ:*  $11$ .

**357.** Функция  $\frac{\pi}{4} - x^2$  является чётной на всей числовой прямой, поэтому множество её значений на отрезке  $\left[-\frac{\sqrt{\pi}}{3}; 0\right]$  совпадает с множеством её значений на  $\left[0; \frac{\sqrt{\pi}}{3}\right]$ . На этом множестве она принимает значения  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ . Тангенс в первой четверти монотонно возрастает, поэтому максимальное и минимальное значения он принимает на концах отрезка  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .  $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}^2 0 = 1$ .

*Ответ:*  $1$ .

**358.** На указанном отрезке  $\frac{\pi}{2} - x^2$  принимает значения на  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ , где косинус монотонно убывает. Поэтому минимальное и максимальное значе-

ния косинус принимает на концах отрезка  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ .  $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{3} = 0,75$ .

Ответ: 0,75.

**359.** Аргумент тангенса  $\frac{\pi}{4} \sin x$  принимает значения из отрезка  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ . Тангенс на этом отрезке монотонно возрастает, поэтому максимальное и минимальное значение принимает на его концах.  $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}^2 \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2$ .

Ответ: 2.

**360.** Функция  $y = f(x)$ , имеющая производную  $y = f'(x)$ , возрастает на некотором промежутке, если на этом промежутке  $f'(x) \geq 0$ , причём равенство  $f'(x) = 0$  достигается лишь в конечном числе точек. Поэтому для решения задачи необходимо посчитать наименьшее количество промежутков, содержащих в совокупности все значения аргумента, для которых график производной лежит не ниже оси абсцисс и имеет с ней лишь конечное число общих точек. Из рисунка 16 следует, что требуемых промежутков три:  $(-7; a]$ ,  $[b; c]$ ,  $[d; 3]$ .

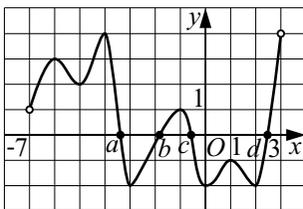


Рис. 16.

Ответ: 3.

**361.** План решения: 1. Найдём множество значений выражения  $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi x^2}{6}$  при  $x \in [-\sqrt{3}; 2]$ . 2. Используя свойства монотонности функции  $y = \sin x$ , определим её поведение на найденном множестве, а также найдём наибольшее и наименьшее её значение на этом множестве. 3. Вычислим разность между наибольшим и наименьшим значением исходной функции.

1. Так как выражение  $g(x) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi x^2}{6}$  является квадратным трёхчленом с отрицательным старшим коэффициентом и нулевым вторым коэффициентом, то его наибольшее значение на всей числовой оси достигается

при  $x = 0$  и равно  $\frac{3\pi}{2}$ . Так как  $0 \in [-\sqrt{3}; 2]$ , то  $\frac{3\pi}{2}$  — наибольшее значение выражения  $g(x)$  и на отрезке  $[-\sqrt{3}; 2]$ . Наименьшее значение выражения  $g(x)$  на отрезке  $[-\sqrt{3}; 2]$  будет достигаться в одном из концов этого отрезка. Так как  $g(-\sqrt{3}) = \pi$ , а  $g(2) = \frac{5\pi}{6}$ , то  $[\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}]$  — множество значений выражения  $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi x^2}{6}$  при  $x \in [-\sqrt{3}; 2]$ . 2. В силу того, что функция  $y = \sin x$  монотонно убывает на отрезке  $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ , она убывает и на отрезке  $[\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}] \subset [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ . Следовательно,  $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$  и  $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$  — соответственно наибольшее и наименьшее значение функции  $y = \sin x$  на отрезке  $[\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}]$ . 3. Таким образом, искомая разность равна  $3,2 \cdot \frac{1}{2} - 3,2 \cdot (-1) = 4,8$ .

*Ответ:* 4,8.

**362.** Функция  $y = f(x)$ , имеющая производную  $y = f'(x)$ , убывает на некотором промежутке, если на этом промежутке  $f'(x) \leq 0$ , причём равенство  $f'(x) = 0$  достигается лишь в конечном числе точек. Поэтому для решения задачи необходимо посчитать количество промежутков, содержащих в совокупности все значения аргумента, для которых график производной лежит не выше оси абсцисс и имеет с ней лишь конечное число общих точек. Из рисунка 17 следует, что требуемых промежутков два:  $[a; b]$  и  $[c; d]$ .

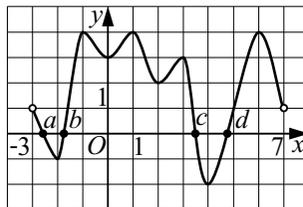


Рис. 17.

*Ответ:* 2.

**363.** Функция  $y = f(x)$ , имеющая производную  $y = f'(x)$  убывает на некотором промежутке, если на этом промежутке  $f'(x) \leq 0$ , причём равенство  $f'(x) = 0$  достигается лишь в конечном числе точек. Поэтому для решения задачи необходимо посчитать количество промежутков, содержащих в совокупности все значения аргумента, для которых график производной лежит не выше оси абсцисс и имеет с ней лишь конечное число общих точек. Из рисунка 18 следует, что требуемый промежуток только один:  $(-8; a]$ .

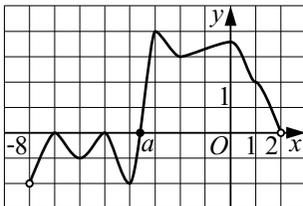


Рис. 18.

*Ответ:* 1.

**364.** Заданная функция имеет 3 стационарные точки (точки в которых производная равна нулю). Точками максимума являются те из них, при переходе через которые производная меняет знак с  $+$  на  $-$ . Таких точек нет.

*Ответ:* 0.

**365.** Заданная функция имеет 3 стационарные точки (точки в которых производная равна нулю). Точками минимума являются те из них, при переходе через которые производная меняет знак с « $-$ » на « $+$ ». Такая точка одна.

*Ответ:* 1.

**366.** Так как при  $a > 1$  функция  $y = \log_a x$  строго возрастает на всей числовой оси, то функция  $f(x) = 1,25 \log_2 (7x^2 - 7x + 2)$  достигает своего наименьшего значения, когда наименьшего значения достигает функция  $g(x) = 7x^2 - 7x + 2$ . И наоборот, заданная функция достигает своего наибольшего значения, когда функция  $g(x)$  достигает своего наибольшего значения. Таким образом, отыщем сначала наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x)$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Для этого найдём производную  $g'(x) = 14x - 7$ . Приравняв её к нулю, получим  $14x - 7 = 0$ ,  $x = 0,5$ ;  $g(0,5) = 0,25$ . Теперь найдём значения функции  $g(x)$  на концах заданного отрезка.  $g(-1) = 16$ ;  $g(1) = 2$ . Следовательно, функция  $g(x)$  имеет наибольшее значение в точке  $x = -1$  и наименьшее в точке  $x = 0,5$ . Полу-

чаем, что функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение в точке  $x = 0,5$ ;  $f(0,5) = 1,25 \log_2 0,25 = 1,25 \cdot (-2) = -2,5$  и наибольшее значение в точке  $x = -1$ ,  $f(-1) = 1,25 \log_2 16 = 1,25 \cdot 4 = 5$ . Сумма наибольшего и наименьшего значений:  $5 + (-2,5) = 2,5$ .

*Ответ:* 2,5.

**367.** Заданная функция имеет 4 стационарные точки (точки в которых производная равна нулю). Точками экстремума являются те из них, при переходе через которые производная либо максимум, либо минимум. То есть меняет знак с «-» на «+», или с «+» на «-». Таких точек три.

*Ответ:* 3.

**368.** Так как при  $a > 1$  функция  $y = \log_a x$  строго возрастает на всей числовой оси, то функция  $f(x) = 12 \log_3 (2x^2 + 1) - 4$  достигает своего наименьшего значения, когда наименьшего значения достигает функция  $g(x) = 2x^2 + 1$ . И наоборот, заданная функция достигает своего наибольшего значения, когда функция  $g(x)$  достигает своего наибольшего значения. Таким образом, отыщем сначала наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x)$  на отрезке  $[-1; 2]$ . Для этого найдём производную  $g'(x) = 4x$ . Приравняв её к нулю, получим  $x = 0$ ;  $g(0) = 1$ . Теперь найдём значения функции  $g(x)$  на концах заданного отрезка.  $g(-1) = 3$ ;  $g(2) = 9$ . Следовательно, функция  $g(x)$  имеет наибольшее значение в точке  $x = 2$  и наименьшее в точке  $x = 0$ . Получаем, что функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение в точке  $x = 0$ ;  $f(0) = 12 \log_3 1 - 4 = 12 \cdot 0 - 4 = -4$  и наибольшее значение в точке  $x = 2$ ,  $f(2) = 12 \log_3 9 = 12 \cdot 2 - 4 = 20$ . Сумма наибольшего и наименьшего значений:  $20 + (-4) = 16$ .

*Ответ:* 16.

**369.** Заданная функция имеет 4 стационарные точки (точки в которых производная равна нулю). Точками минимума являются те из них, при переходе через которые производная меняет знак с «-» на «+». Такая точка одна.

*Ответ:* 1.

**370.** Из условия  $\Rightarrow$  при  $x \leq 0$  функция  $f(x)$  определена формулой  $f(x) = x(x + 8) = x^2 + 8x$ , а при  $x > 0$ , в силу чётности  $f(x)$ ,  $f(x) = f(-x) = -x(-x + 8) = x^2 - 8x$ . Уравнение  $f(x) + g(x) = 18$  рассмотрим при  $x \leq 0$  и  $x > 0$ .

1) При  $x \leq 0$ ,  $f(x) + g(x) = 2(x^2 + 8x) = 18$ ,  $x^2 + 8x - 9 = 0$ ,  $x_1 = -9$ ,  $x_2 = 1$  — не удовлетворяет условию  $x \leq 0$ . То есть при  $x \leq 0$  уравнение  $f(x) + g(x) = 18$  имеет один корень,  $x = -9$ .

2) При  $x > 0$ ,  $f(x) + g(x) = x^2 - 8x + x^2 + 8x = 18$ ,  $x^2 = 9$ ,  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 3$ .  $x_1 = -3$  — не удовлетворяет условию  $x > 0$ , то есть при  $x > 0$  уравнение  $f(x) + g(x) = 18$  также имеет один корень,  $x = 3$ .

Искомое произведение корней равно  $(-9) \cdot 3 = -27$ .

Ответ:  $-27$ .

**371.** Так как  $y = f(x)$  нечётная и  $x_0$  — нуль функции, то  $-x_0$  тоже является нулём функции. Отрицательные корни  $h(x)$   $x_1 = -\frac{2}{3}$ ;  $x_2 = -8$ .

Следовательно, корни  $y = f(x)$   $x_1 = -\frac{2}{3}$ ;  $x_2 = \frac{2}{3}$ ;  $x_3 = -8$ ;  $x_4 = 8$ . Так как  $y = f(x)$  нечётная и всюду определена, то  $f(0) = f(-0) = -f(0)$ , то есть  $f(0) = 0$ . Таким образом,  $x_5 = 0$ .

Ответ: 5.

**372.** Т. к. функция  $y = f(x)$  чётная и  $x_0$  — корень, то  $-x_0$  тоже корень.

Неотрицательные корни  $h(x)$ :  $x_1 = \frac{2}{7}$ ;  $x_2 = \frac{28}{11}$ ;  $x_3 = \frac{3}{10}$ . Корни

$y = f(x)$ :  $x_1 = \frac{2}{7}$ ;  $x_2 = -\frac{2}{7}$ ;  $x_3 = \frac{28}{11}$ ;  $x_4 = -\frac{28}{11}$ ;  $x_5 = \frac{3}{10}$ ;  $x_6 = -\frac{3}{10}$ .

Ответ: 6.

**373.**  $y = g(-x) \cdot g(x)f(x) - f(x)g(x) \cdot f(-x)$ ;  $x_0 \neq 0$ .

$f(x_0) = 5$ ,  $g(x_0) = 2$ .

$f(-x) = -f(x)$ ,  $g(-x) = -g(x)$ , так как  $f(x)$  и  $g(x)$  — нечётные функции;  $y = -g^2(x) \cdot f(x) + f^2(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)(f(x) - g(x)) = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$ .

Ответ: 30.

**374.**  $y = g(x)f(-x) \cdot f(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot g(-x)$ ,  $x_0 \neq 0$ ,  $f(x_0) = 2$ ,  $g(x_0) = 3$ ,  $f(-x) = f(x)$  и  $g(-x) = g(x)$  т.к  $f(x)$  и  $g(x)$  — чётные функции.

$y = g(x) \cdot f^2(x) + f(x) \cdot g^2(x) = f(x)g(x)(f(x) + g(x)) = 6 \cdot 5 = 30$ .

Ответ: 30.

**375.**  $h(x) = x(x + 2)(3x - 4)(5x - 2)$ ;  $h(x) = 0$ ,

$x(x + 2)(3x - 4)(5x - 2) = 0$ ;  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = -2$ ;  $x_3 = \frac{4}{3}$ ;  $x_4 = \frac{2}{5}$ . Так

как  $y = f(x)$  — нечётная, то  $f(-x) = -f(x)$ , значит, при  $x \leq 0$  уравнение  $f(x) = 0$  имеет корни 0 и  $-2$ , а на всей числовой прямой ещё корень 2.

Ответ: 3.

**376.** Так как функция  $y = f(x)$  является чётной и определена на всей числовой прямой, то для любого  $x < 0$  выполняется равенство

$f(x) = f(-x) = g(-x)$ , так как  $-x > 0$  и так как при любом неотрицательном значении аргумента значение функции  $y = f(x)$  совпадает со

значением функции  $y = g(x)$ . Итак, для ответа на вопрос задачи необходимо решить уравнение  $g(-x) = g(x)$  на множестве отрицательных чисел. Таким образом, решаем уравнение

$$\begin{aligned} -x(-x-2)(-x+2)(-x-4)(-x+9) &= x(x-2)(x+2)(x-4)(x+9), \\ -x(x+2)(x-2)(x+4)(x-9) &= x(x-2)(x+2)(x-4)(x+9), \\ x(x^2-4)((x-4)(x+9) + (x+4)(x-9)) &= 0, \\ x(x^2-4)(x^2+5x-36+x^2-5x-36) &= 0, 2x(x-2)(x+2)(x-6)(x+6) = 0. \end{aligned}$$

Отрицательными корнями последнего уравнения являются числа  $-2$  и  $-6$ . Их сумма равна  $-8$ .

*Ответ:*  $-8$ .

**377.** Так как функции  $f(x)$  и  $h(x) = x$  — нечётные функции, то график каждой из них симметричен относительно начала координат, а значит, относительно начала координат симметрично и множество точек пересечений этих графиков. Таким образом, найдём неотрицательные корни уравнения  $f(x) = x$  и отобразим их симметрично относительно начала координат, в результате получим полное множество решений уравнения  $f(x) = x$ . При неотрицательных значениях  $x$  уравнение  $f(x) = x$  равносильно уравнению  $g(x) = x \Rightarrow x(x+1)(x-2) = x, x(x^2-x-3) = 0$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}. \text{ Множество неотрицательных}$$

корней уравнения  $g(x) = x - \left\{0, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$ . Тогда полное множество

корней уравнения  $f(x) = x - \left\{-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$ . Итак, всего 3 корня.

*Ответ:* 3.

**378.** Так как функции  $f(x)$  и  $h(x) = x^2$  — чётные функции, то график каждой из них симметричен относительно оси  $Oy$ , а значит, относительно оси  $Oy$  симметрично и множество точек пересечений этих графиков. Таким образом, найдём неотрицательные корни уравнения  $f(x) = x^2$  и отобразим их симметрично относительно начала координат, в результате получим полное множество решений уравнения  $f(x) = x^2$ . При неотрицательных значениях  $x$  уравнение  $f(x) = x^2$  равносильно уравнению  $g(x) = x^2 \Rightarrow x^5 - 5x^3 + x^2 + 6x = x^2, x(x^4 - 5x^2 + 6) = 0, x(x^2 - 3)(x^2 - 2) = 0, x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{2}, x_{4,5} = \pm\sqrt{3}$ . Множество неотрицательных корней уравнения  $g(x) = x - \{0, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ . Тогда полное множество корней уравнения  $f(x) = x^2 -$

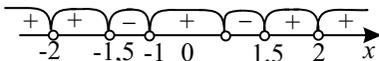


Рис. 19.

$\{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ . Итак, всего 5 корней.

*Ответ:* 5.

**379.** Чётная функция  $y = f(x)$  определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной  $x$  значение этой функции совпадает со значением функции  $g(x) = (x^2 + 4x + 4)(x^2 - 1)(2x + 3)(x - 2)$ . Найдите промежутки знакопостоянства функции  $f(x)$ . В ответе укажите количество промежутков, на которых  $f(x) > 0$ .

*Решение.* Найдём решение неравенства  $f(x) > 0$  методом интервалов. Так как функция  $f(x)$  — чётная, то её корни и промежутки знакопостоянства симметричны относительно начала координат. Таким образом,  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, x = \pm 1,5, x = \pm 2$ . Решаем неравенство  $g(x) > 0$  на отрицательной полуоси и симметрично отображаем найденные интервалы знакопостоянства относительно начала координат (см. рис. 19).

*Ответ:* 5.

**380.** Ключевая идея такая же, как и в задаче В8 варианта 51.

Найдём нули функции  $y = f(x)$  при  $x \leq -1$ . Получаем,  $(x^2 + 5x + 6)(x^2 - x - 12) = 0, x \leq -1 \Leftrightarrow x = -3, x = -2$ . Следовательно, положительными нулями функции  $y = f(x)$  являются  $x = 2, x = 3$ . Учитывая, что  $x = 0$  также является нулём функции получаем ответ.

*Ответ:* 5.

**381.** Согласно определению функции  $g(x)$ , имеем:

$$g(5) = 7 + (-2)^3 \cdot f(-2) + 5 = 12 - 8f(-2), g(7) = 7 + 0 \cdot f(0) + 7 = 14, \\ g(9) = 7 + 2^3 \cdot f(2) + 9 = 16 + 8f(2). \text{ Значит, } g(5) + g(7) + g(9) = \\ = 42 - 8f(2) + 8f(2) = 42, \text{ так как в силу чётности функции} \\ f(x): f(-2) = f(2).$$

*Ответ:* 42.

$$382. g(1) + g(2) = 1,4 + \frac{f(0,5)}{(-0,5)^5} + 1,4 + \frac{f(-0,5)}{0,5^5} = 2,8 +$$

$$+ \frac{-f(0,5) + f(-0,5)}{0,5^5} = 2,8, \text{ так как в силу чётности функции } f(x):$$

$$f(-0,5) = f(-0,5).$$

*Ответ:* 2,8.

**383.** Поскольку функция  $f(x)$  нечётная, то  $f(-x) = -f(x)$  и  $f(0) = 0$ . Подсчитаем значения функции  $g(x)$  в точках 0, 1, 2 и 4:

$$\begin{aligned}
 g(0) &= (-1) \cdot f(-3) - f(-1) = f(3) + f(1), \\
 g(1) &= (1-1) \cdot f(1-3) - f(1-1) - 0,5 = -0,5, \\
 g(2) &= (2-1) \cdot f(-1) - f(1) - 0,5 \cdot 2 = -2 \cdot f(1) - 1, \\
 g(4) &= 3 \cdot f(1) - f(3) - 0,5 \cdot 4 = 3 \cdot f(1) - f(3) - 2, \\
 g(0) - 4 \cdot g(1) + 2 \cdot g(2) + g(4) &= f(3) + f(1) + 2 - 4 \cdot f(1) - 2 + 3 \cdot f(1) - f(3) - \\
 &- 2 = -2.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $-2$ .

**384.** Пусть  $x \geq 0$ , тогда  $g(x) = \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$ , а при  $x < 0$

$g(x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = 0$ . В левой части уравнения  $|f(x)| = 1$  стоит чётная функция, поэтому все корни этого уравнения разбиваются на пары противоположных. Ноль не является корнем. Положительные корни уравнения  $|f(x)| = 1$  будут являться корнями уравнения  $|g(x)| = 1$ , а отрицательные — нет. Поэтому корней уравнения  $|g(x)| = 1$  вдвое меньше, чем корней уравнения  $|f(x)| = 1$ .

Ответ:  $3$ .

**385.** Пусть  $x \geq 0$ , тогда  $g(x) = \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$ , а при  $x < 0$

$g(x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = 0$ . В левой части уравнения  $|f(x)| = 3$  стоит чётная функция, поэтому все корни этого уравнения разбиваются на пары противоположных. Ноль не является корнем. Положительные корни уравнения  $|f(x)| = 3$  будут являться корнями уравнения  $|g(x)| = 3$ , а отрицательные — нет. Поэтому корней уравнения  $|f(x)| = 3$  вдвое больше, чем корней уравнения  $|g(x)| = 3$ .

Ответ:  $4$ .

**386.** Так как  $f(x)$  чётна, то функция  $g(x)$  также чётна, то есть  $g(-x) = g(x)$  (убедитесь в этом самостоятельно). Поэтому если  $x_0$  — корень уравнения  $g(x) = 0$ , то  $-x_0$  также корень этого уравнения. Следовательно, уравнение  $g(x) = 0$  может иметь нечётное количество корней (по условию их три) лишь в том случае, когда  $x = 0$  является его корнем, то есть  $g(0) = 0$ .

Имеем:  $g(0) = \frac{f(0)}{-4} + 5 = 0$ ,  $f(0) = 20$ .

Ответ:  $20$ .

**387.**  $g(0) + g(4) = (-2f(-3) + 1,6) + (8 + 2f(1) + 1,6)$ . Так как функция  $f(x-1)$  чётная, то  $f(x-1) = f(-x-1)$ . Тогда

$$g(0) + g(4) = -2f(-1 - 2) + 1,6 + 8 + 2f(-1 + 2) + 1,6 = 11,2.$$

Ответ: 11,2.

**388.**  $g(-3) + g(-9) = (4,7 + 3y(1) + 3) + (4,7 - 3y(-5) + 9)$ . Так как функция  $y(x - 2)$  чётная, то  $y(x - 2) = y(-x - 2)$ . Тогда

$$g(-3) + g(-9) = 4,7 + 3y(-2 + 3) + 3 + 4,7 - 3y(-2 - 3) + 9 = 21,4.$$

Ответ: 21,4.

**389.**  $g(-1) + g(11) = (-1 - h(-6) \cdot 6 + 3,8) + (11 - h(6) \cdot 6 + 3,8)$ . Так как функция  $h(x)$  нечётная, то  $-h(x) = h(-x)$ . Следовательно,

$$g(-1) + g(11) = 17,6 - 6 \cdot (h(6) - h(6)) = 17,6.$$

Ответ: 17,6.

**390.** 1. Так как функция  $y = f(x)$  — чётна, то  $f(-3) = f(3)$ , а так как для всякого неотрицательного значения переменной  $x$  значение функции  $y = h(x)$  совпадает со значением функции  $y = f(x)$ , то  $f(3) = h(3)$ . Так как функция  $y = g(x)$  — нечётна, то  $g(-1) = -g(1)$ , то есть  $g(1) = -g(-1)$ , а так как для всякого неположительного значения переменной  $x$  значение функции  $y = h(x)$  совпадает со значением функции  $y = g(x)$ , то  $g(-1) = h(-1)$ . Следовательно,  $f(-3) = h(3)$ , а  $g(1) = -h(-1)$ . 2. Найдём сумму  $f(-3) + g(1) = h(3) - h(-1) = 54 + 2 = 56$ .

Ответ: 56.

**391.** *План решения.* 1. Выразим искомую сумму через значения функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ . 2. Вычислим полученное выражение, используя свойства чётности и нечётности функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ .

$$1) h(-2) + h(0) + h(2) = 2^{-2} - 2f(-2) - g(-2) + 2^0 - g(0) + 2^2 + 2f(2) - g(2) = 2(f(2) - f(-2)) - (g(2) + g(-2)) - g(0) + 5,25.$$

2) Так как функция  $y = f(x)$  — чётная, а функция  $y = g(x)$  — нечётная, то  $f(2) = f(-2)$ , и  $-g(2) = g(-2)$ . Из нечётности функции  $y = g(x)$  также следует, что  $g(0) = -g(-0)$ ,  $2g(0) = 0$ ,  $g(0) = 0$ . Таким образом,  $h(-2) + h(0) + h(2) = 5,25$ .

Ответ: 5,25.

**392.** Из условия получаем:  $g(-2) + 1 = f(-2)$ . Так как функция  $f(x)$  чётная, то  $f(-2) = f(2)$ . Следовательно,

$$f(2) - g(-2) + 2 = f(2) - g(-2) + 1 + 1 = f(2) - f(-2) + 1 = f(2) - f(2) + 1 = 1.$$

Ответ: 1.

**393.** Из условия получаем:  $3 \cdot g(-3) = f(-3)$ . Так как функция  $f(x)$  нечётная, то  $f(-3) = -f(3)$ .

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } \frac{6 \cdot g(-3)}{f(3)} + 0,5 &= \frac{2 \cdot f(-3)}{f(3)} + 0,5 = \\ &= \frac{-2 \cdot f(3)}{f(3)} + 0,5 = -1,5 \end{aligned}$$

Ответ:  $-1,5$ .

**394.** Так как функция  $f(x)$  чётна, то  $f(x) = f(-x)$  для любых значений  $x$ . В частности,  $f(-3) = f(3)$ .

При  $x \in [2; 5]$  графики функций  $f(x)$  и  $g(x)$  совпадают, значит  $g(3) = f(3)$ .

$$\frac{f(-3) + g(3)}{f(3)} - 3,2 = \frac{f(3) + f(3)}{f(3)} - 3,2 = 2 - 3,2 = -1,2$$

Ответ:  $-1,2$ .

**395.**  $f(10) = f(10 - 5) = f(5) = f(5 - 5) = f(0) = 0$ , так как  $f(0)$  определено и  $f(x)$  — нечётная функция, то  $f(0) = 0$ .

$$f(-8) = f(-8 + 5) = f(-3) = f(-3 + 5) = f(2) = -4.$$

$f(4) = f(4 - 5) = f(-1) = -f(1)$ , так как функция нечётная. Тогда  $f(4) = -f(1) = -3$ .  $f(10) + f(-8) + f(4) = 0 - 4 - 3 = -7$ .

Ответ:  $-7$ .

**396.**  $f(10) = f(10 - 3 \cdot 3) = f(1) = 2$ ;  $f(17) = f(17 - 6 \cdot 3) = f(-1) = f(1) = 2$ .

Ответ:  $10$ .

**397.** Так как  $f(x)$  — нечётна, и  $f(1) = 1$ , то имеем:  $f(0) = 0$ ,  $f(-1) = -f(1) = -1$ . Отсюда, из периодичности  $f$ , получаем  $f(6) = f(0) = 0$ ,  $f(7) = f(1) = 1$ ,  $f(8) = f(-1) = -1$ . Итого  $f(6) + f(7) + f(8) = 0 + 1 - 1 = 0$ .

Ответ:  $0$ .

**398.** Так как  $f(x)$  — нечётна, и  $f(1) = 1$ , то имеем:  $f(0) = 0$ ,  $f(-1) = -f(1) = -1$ . Отсюда, из периодичности  $f$ , получаем  $f(7) = f(-1) = -1$ ,  $f(8) = f(0) = 0$ ,  $f(9) = f(1) = 1$ . Итого  $f(7) + f(8) + f(9) = -1 + 0 + 1 = 0$ .

Ответ:  $0$ .

**399.**  $f(11) = f(-3) = -f(3)$ ;  $f(3) = g(3) = 9 - 12 = -3$ ;  $\Rightarrow f(11) = 3$ .

Ответ:  $3$ .

**400.** Используя периодичность и нечётность функции  $f(x)$ , получим:  
 $|f(6) - f(-17)| = |f(-2 + 8 \cdot 1) - f(-1 + 8 \cdot (-2))| = |f(-2) - f(-1)| =$   
 $= | -f(2) + f(1) | = | -(4 \cdot 2 - 2^2) + 4 - 1 | = | -1 | = 1$ .

Ответ:  $1$ .

**401.**  $f(x) = 3 \operatorname{ctg}^2 x$ ;  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .  $f'(x) = 3 \cdot 2 \operatorname{ctg} x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{6 \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$ ;

$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{6 \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}; y' = -6 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \cdot \sin^2 x - \operatorname{ctg} x \cdot 2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = \\
 &= \frac{6}{\sin^4 x} (1 + \operatorname{ctg} x \cdot \sin 2x); y' \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{6}{\sin^4 \frac{\pi}{6}} \cdot \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right) = \\
 &= 6 \cdot 16 \cdot \left(1 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6 \cdot 16 \cdot 2,5 = 240; k = 240.
 \end{aligned}$$

*Ответ:* 240.

**402.**  $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$ . Задача сводится к нахождению количества корней уравнения  $f'(x) = -\sqrt{3}$ . Графически определяем, что это уравнение имеет 3 корня.

*Ответ:* 3.

**403.** Задача сводится к нахождению количества корней уравнения

$f'(x) = \operatorname{tg} 150^\circ$ , то есть  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Проведя мысленно на рисунке

прямую  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ , видим, что корней 2.

*Ответ:* 2.

**404.** Искомые касательные проводятся в точках  $x = x_0$ , в которых  $f'(x_0) = k$ , где  $k$  — угловой коэффициент. По условию  $x_0 \in N$ , и  $f'(x_0) < 0$ . Из рисунка видно, что таких точек две  $x_0 = 3$  и  $x_0 = 4$ .

*Ответ:* 2.

**405.** Искомые касательные проводятся в точках  $x = x_0$ , в которых  $f'(x_0) = k$ , где  $k$  — угловой коэффициент. По условию  $x_0 \in N$  и  $f'(x_0) > 0$ . Из рисунка видно, что таких точек четыре:  $x_0 = 1$ ,  $x_0 = 2$ ,  $x_0 = 3$ ,  $x_0 = 4$ .

*Ответ:* 4.

**406.** Касательная к графику функции  $y = f(x)$  будет иметь наименьший угловой коэффициент в той точке, в которой производная принимает наименьшее значение. По графику производной определяем, что такой точкой будет точка с абсциссой  $x = -1$ .

*Ответ:*  $-1$ .

**407.** Число касательных будет равно числу точек пересечения  $f(x)$  и  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  (так как  $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ). Таких точек 3.

*Ответ:* 3.

**408.** Искомые касательные проводятся в точках  $x = x_0$ , в которых  $y'(x_0) = \operatorname{tg} 50^\circ$ . Так как функция  $y = \operatorname{tg} x$  возрастающая, то  $\operatorname{tg} 45^\circ < \operatorname{tg} 50^\circ < \operatorname{tg} 60^\circ$  или  $1 < \operatorname{tg} 50^\circ < \sqrt{3}$ . Из рисунка видно, что прямая, проходящая между прямыми  $y = 1$  и  $y = \sqrt{3}$  имеет с линией  $y = f'(x)$  на заданном промежутке семь общих точек.

*Ответ:* 7.

**409.** По графику найдём значение производной функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0 = 3$ , которое будет тангенсом искомого угла наклона касательной:  $f'(3) = 1 = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$ .

*Ответ:* 45.

**410.** По геометрическому смыслу производной  $k_{\text{кас.}} = f'(x_0) = f'(-3)$ . По графику определяем  $f'(-3) = 1$ .

*Ответ:* 1.

**411.** По геометрическому смыслу производной  $k_{\text{кас.}} = f'(x_0) = f'(4)$ . Определяем по графику  $f'(4) = 3$ .

*Ответ:* 3.

**412.** Используя геометрический смысл производной, находим  $f'(x) = 10x - 7$ ,  $f'(x) = 13$ .

*Ответ:* 13.

**413.** Используя геометрический смысл производной, находим  $f'(x) = 4x + 3$ ,  $f'(3) = 15$ .

*Ответ:* 15.

**414.** Так как  $\operatorname{tg} \alpha = g'(x)$ , то по графику  $y = g'(x)$  находим, что  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ . Значит  $\alpha = 45^\circ$ .

*Ответ:* 45.

**415.** Задача сводится к нахождению числа точек  $x_0$ , в которых  $f'(x_0) = 2,5$ . Из рисунка видно, что таких точек 3.

*Ответ:* 3.

**416.** Искомые касательные проводятся в тех точках, в которых  $f'(x) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ . Из рисунка видно, что такая точка одна:  $x = 2$ .

*Ответ:* 1.

**417.**  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ ,  $x_0 = 1$ ,  $f'(x_0) = -1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -1$ ,  $\alpha = 135^\circ$ .

*Ответ:* 135.

**418.** Используя геометрический смысл производной, находим точку, ордината которой равна  $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ . Её абсцисса равна  $-1$ .

*Ответ:*  $-1$ .

**419.** Используя геометрический смысл производной, находим по графику значение  $f'(x)$  в точке  $x = 2$ .  $f'(2) = 3$ .

*Ответ:* 3.

420. Используя геометрический смысл производной нужно найти, сколько общих точек имеют  $y = f'(x)$  и  $y = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Такая точка одна.

*Ответ:* 1.

421. Тангенс угла наклона искомого касательных равен  $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ . Следовательно, значение производной функции  $y = f(x)$  в точках касания равно  $\sqrt{3}$ ,  $f'(x) = \sqrt{3}$ . Задача сводится к нахождению количества корней уравнения  $f'(x) = \sqrt{3}$ . График функции  $y = f'(x)$  изображён на рисунке, а график функции  $y = \sqrt{3}$  — прямая, параллельная оси  $Ox$  и отсекающая на оси  $Oy$  отрезок, равный  $\sqrt{3}$ . Видим, что эти два графика имеют единственную точку пересечения.

*Ответ:* 1.

422. Если прямая образует с положительным направлением оси  $Ox$  угол больший  $45^\circ$ , но меньший  $90^\circ$ , то её угловой коэффициент больше, чем  $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ . Угловой коэффициент касательной к графику  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  равен значению производной  $f'(x_0)$ . Таким образом, требуется найти максимальную длину промежутка, на котором  $f'(x) > 1$ . Из графика  $y = f'(x)$ , данного в условии, следует, что  $f'(x) > 1$  на промежутках  $(-5; -2)$  и  $(1; 5)$ , то есть искомая максимальная длина равна  $5 - 1 = 4$ .

*Ответ:* 4.

423. Найдём  $\operatorname{tg} \alpha$ . Так как  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , то  $\sin \alpha > 0$ .  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{12}{13}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$ . Искомого касательных столько, сколько раз производная функции примет значение  $\frac{12}{5}$ . Прямая  $y = \frac{12}{5}$  пересекает график функции  $y = f'(x)$  5 раз.

*Ответ:* 5.

424.  $x(t) = 1,5t^2 - 3t + 7$ ;  $v(t) = x'(t)$ ;  $v(t) = 3t - 3$ , по условию  $v(t) = 12$ ;  $3t - 3 = 12$ ,  $3t = 15$ ,  $t = 5$ .

*Ответ:* 5.

425.  $x(t) = 0,75t^2 + t - 7$ .  $v(t) = x'(t)$ ,  $v(t) = 1,5t + 1$ ,  $1,5t + 1 = 19$ ,  $1,5t = 18$ ,  $t = 12$ .

*Ответ:* 12.

426.  $x(t) = -2t^2 + 20t - 7$ ;  $v(t) = x'(t) = -4t + 20$ . Мгновенная остановка произойдёт при  $v(t) = 0$ ;  $-4t + 20 = 0$ ;  $t = 5$ ;  $x(5) = -2 \cdot 25 + 20 \cdot 5 - 7 = -50 + 100 - 7 = 43$ .

*Ответ:* 43.

427. Найдём экстремумы функции  $y = \frac{6 - 3x^2}{\sqrt{4x + 5}}$  на промежутке  $(-1, 25; 1]$ .

$$y'(x) = \frac{-6x\sqrt{4x+5} - (6-3x^2)\frac{4}{2\sqrt{4x+5}}}{4x+5},$$

$$y'(x) = \frac{-6x(4x+5) - 2(6-3x^2)}{(4x+5)\sqrt{4x+5}}, \quad y'(x) = \frac{-6(3x^2+5x+2)}{(4x+5)\sqrt{4x+5}}. \text{ Решим}$$

$$\text{уравнение } y'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6}$$

$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{2}{3}$ . Запишем производную функции  $y(x)$  в виде

$$y'(x) = \frac{-6(x+1)(3x+2)}{(4x+5)\sqrt{4x+5}}. \text{ Тогда } y'(x) < 0 \text{ при } x \in (-1, 25; -1) \cup$$

$\cup \left(-\frac{2}{3}; 1\right]$  и  $y'(x) > 0$  при  $x \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right)$ . Тогда так как функция  $y(x)$

непрерывна на  $(-1, 25; 1]$ , то  $x = -1$  — точка минимума функции  $y(x)$ , а

$x = -\frac{2}{3}$  — её точка максимума. Поэтому минимум функции  $y(x)$  на про-

межутке  $(-1, 25; 1]$  достигается либо в точке минимума  $x = -1$ , либо в конце промежутка  $x = 1$ . Сравним  $y(-1) = 3$  и  $y(1) = 1$ . Так как  $1 < 3$ , то минимальное значение функции  $y(x)$  на промежутке  $(-1, 25; 1]$  равно 1.

*Ответ:* 1.

428.  $\log_{0,5}(4^x - 2^{x+2} + 8) = -\log_2(4^x - 4 \cdot 2^x + 4 + 4) = -\log_2((2^x - 2)^2 + 4)$ . Функция  $y = -\log_2((2^x - 2)^2 + 4)$  принимает наименьшее значение, когда выражение  $(2^x - 2)^2 + 4$  принимает наибольшее значение, то есть при  $x = 2$ .  $y(2) = -\log_2((2^2 - 2)^2 + 4) = -\log_2 8 = -3$ .

*Ответ:*  $-3$ .

429. Поскольку  $f(x) > 0$ , а функция  $y = \sqrt{x}$  монотонна, то достаточно найти точку на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , в которой достигается наибольшее значе-

ние функции  $f^2(x) = \sqrt{5} \cos^2 x \sin x$ . Сделав замену переменной  $\sin x = t$ ,  $\cos^2 x = 1 - t^2$ , исследуем на максимум функцию  $g(t) = (1 - t^2)^2 \cdot t = t - 2t^3 + t^5$  при  $t \in [0; 1]$ .  $g'(t) = 5t^4 - 6t^2 + 1$ , по методу интервалов,  $g'(t) > 0$  при  $t^2 < \frac{1}{5}$  и  $g'(t) < 0$  при  $\frac{1}{5} < t^2 < 1$ . Значит наибольшее

значение функции  $g(t)$  на отрезке  $[0; 1]$  достигается при  $t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , и, соответственно, наибольшее значение  $f(x)$  равно  $\sqrt{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,8$ .

*Ответ:* 0,8.

**430.** Пусть  $\sqrt{4x-1} = t$ ,  $t \geq 0$ . Тогда  $4x-1 = t^2$ ,  $x = \frac{t^2+1}{4}$ .

$$y = t - \frac{t^2+1}{4} = \frac{1}{4}(4t - t^2 - 1) = -\frac{1}{4}((t-2)^2 - 3) = -\frac{1}{4}(t-2)^2 + \frac{3}{4}.$$

$y = -\frac{1}{4}(t-2)^2 + \frac{3}{4}$ , наибольшее значение функции равно 0,75 (легко проверить, что оно достигается при  $t = 2$ , то есть при  $x = 1,25$ ,  $x = 1,25$  удовлетворяет ОДЗ).

*Ответ:* 0,75.

**431.** Найдите наибольшее значение функции  $y = \log_3(3^{x+3} - 27^x + 27)$  на отрезке  $[-1; 1,5]$ .

*Решение.* Функция  $y = \log_3 t$  возрастает на области определения, так как основание  $3 > 1$ . Следовательно, функции  $f(x) = \log_3(3^{x+3} - 27^x + 27)$  и  $g(x) = 3^{x+3} - 27^x + 27$  принимают на отрезке  $[-1; 1,5]$  наибольшее значение в одни и тех же точках. Найдём наибольшее значение функции  $g(x)$  на отрезке  $[-1; 1,5]$ . Известно, что дифференцируемая на  $(a; b)$  и непрерывная на  $[a; b]$  функция достигает своего наибольшего(наименьшего) значения на границе отрезка  $[a; b]$  или в одной из точек экстремума на интервале  $(a; b)$ .

$$\begin{aligned} & \text{Имеем, } g'(x) = \ln 3 \cdot 3^{x+3} - \ln 27 \cdot 27^x, \\ & \begin{cases} \ln 3 \cdot 3 \cdot 3^{x+2} - \ln 3^3 \cdot 27^x = 0, \\ x \in (-1; 1,5). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \ln 3 \cdot 3^{x+2} - 3 \ln 3 \cdot 3^{3x} = 0, \\ x \in (-1; 1,5). \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} 3^{x+2} = 3^{3x}, \\ x \in (-1; 1,5). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \in (-1; 1,5). \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Получаем, } g(-1) = 35\frac{26}{27}; g(1,5) = 27; g(1) = 81.$$

Следовательно, наибольшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[-1; 1,5]$  достигается в точке  $x = 1$  и равно  $f(1) = \log_3 81 = 4$ .

В ходе решения мы показали что наименьшее значение функции  $g(x)$  на отрезке  $[-1; 1,5]$  положительно. Следовательно, функция  $f(x)$  существует при любом  $x \in [-1; 1,5]$ .

*Ответ:* 4.

**432.** Функция  $y = f(x)$  возрастает на промежутке  $[a; b]$ , если на этом промежутке  $f'(x) \geq 0$ , причём  $f'(x) = 0$  лишь в конечном числе точек из этого промежутка.

Из графика производной  $y = f'(x)$  видим, что на промежутках  $(a; 0)$  и  $[3; 5]$   $f'(x) \geq 0$ , и  $f'(x) = 0$  лишь в конечном числе точек из этих промежутков. То есть на этих промежутках функция  $y = f(x)$  возрастает. А значит она возрастает и на всех подинтервалах указанных промежутков. Однако минимальное количество промежутков возрастания указанной функции, содержащих в совокупности все значения аргумента, при которых функция не убывает равно двум.

*Ответ:* 2.

**433.** Из графика  $y = f'(x)$  видим, что промежутками, на которых  $f'(x) \leq 0$ , причём  $f'(x) = 0$  лишь в конечном числе точек из этих промежутков являются  $(-a; -4]$ ,  $[-2; 4]$ ,  $[6; b)$ . То есть на этих промежутках функция  $y = f(x)$  убывает. А значит она убывает и на всех подинтервалах указанных промежутков. Однако минимальное количество промежутков убывания указанной функции, содержащих в совокупности все значения аргумента, при которых функция не возрастает равно трём.

*Ответ:* 3.

**434.**

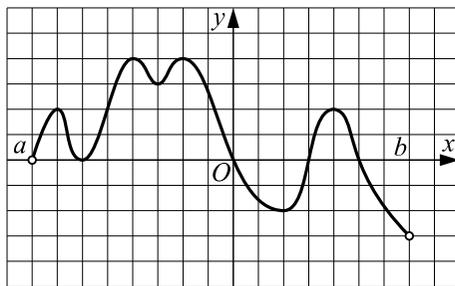


Рис. 20.

Максимум функции  $y = f(x)$  в данном случае будет в точках, в которых:

- 1) производная равна нулю;
- 2) «при переходе» через эту точку, производная меняет знак «+» на знак «-».

Видим, что таких точек будет две:  $x_0 = 0$  и  $x_1 = 5$ . Количество точек максимума равно 2.

*Ответ:* 2.

**435.** Из графика функции  $y = f'(x)$  видим, что на промежутках  $[-4, 5; -3]$ ,  $[-2; -0, 5]$ ,  $[1, 3]$   $f'(x) \geq 0$ , причём,  $f'(x) = 0$  лишь в конечном числе точек из этих промежутков. То есть на этих промежутках функция  $y = f(x)$  возрастает. А значит она возрастает и на всех подинтервалах указанных промежутков. Однако минимальное количество промежутков возрастания указанной функции, содержащих в совокупности все значения аргумента, при которых функция не убывает равно трём.

*Ответ:* 3.

**436.** На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$ . Обозначим  $g(x) = f(x) - 3x$ ,  $g'(x) = f'(x) - 3$ . Получим график функции  $g'(x) = f'(x) - 3$  сдвигом графика функции  $y = f'(x)$  на три единицы вниз вдоль оси ординат. Для этого проведём прямую  $y = 3$  и воспользуемся алгоритмом:

1)  $f'(x) - 3 = 0$ ;

2) «при переходе» через эту точку производная меняет знак с «-» на «+».

Число точек минимума функции  $y = f(x) - 3x$  равно 3.

*Ответ:* 3.

**437.** Функция имеет минимум в точке  $x_0$ , если в этой точке производная меняет знак - на +. Следовательно, это точки  $(-0, 75)$ ;  $2, 25$ .

*Ответ:* 2.

**438.** Стационарная точка  $x_0$  — точка минимума, если при переходе через неё производная меняет знак с «-» на «+». Таких точек 4.

*Ответ:* 4.

**439.** Стационарная точка  $x_0$  — точка минимума, если при переходе через неё производная меняет знак с «-» на «+». Таких точек 5.

*Ответ:* 5.

**440.** Так как при  $x \in (-5; 5)$   $f'(x) \leq 0$ , то  $f(x)$  убывает на своей области определения. Следовательно, при  $x = 5$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение.

*Ответ:* 5.

**441.**  $x = -1$  — точка максимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «-», а на промежутке  $(-3; 4)$   $x = -1$  — единственная критическая точка — точка максимума, значит,  $x = -1$  — абсцисса точки, в которой функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение.

*Ответ:* -1.

442.  $x = 2$  — точка минимума, так как производная меняет знак при переходе через неё с « $-$ » на « $+$ », и эта точка единственная точка экстремума на  $(-4; 4)$ , значит, функция в этой точке принимает наименьшее значение.

Ответ: 2.

443. Из графика производной (см. рис. 21) видно, что на интервалах  $(-5; -3]$  и  $[-1; 5]$  производная  $f'(x)$  неотрицательна и функция  $f(x)$  имеет конечное число стационарных точек, то есть на этих интервалах

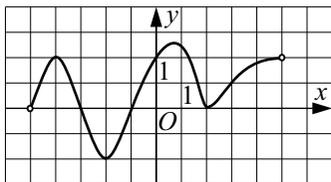


Рис. 21.

функция  $f(x)$  возрастает. Значит, промежутков возрастания функции  $y = f(x)$  два.

Ответ: 2.

444. Из графика производной (см. рис. 22) видим, что на промежутке  $[-1; 5]$  производная  $f'(x)$  неположительна и имеет конечное число стационарных точек, то есть на этих промежутках функция  $y = f(x)$  убывает. Очевидно, что эта функция убывает и на любом подинтервале промежутка  $[-1; 5]$ . Однако минимальное количество промежутков убывания функции  $y = f(x)$ , содержащих в совокупности все значения аргумента, при которых функция не возрастает (то есть, на которых  $f'(x) \leq 0$ ), равно одному.

Ответ: 1.

445. Так как  $f''(x) = (f'(x))'$ , то  $y = f''(x)$  положительна на тех промежутках, на которых функция  $y = f'(x)$  возрастает. По графику видно, что на промежутках  $(-6; -4)$ ,  $(-3; -2)$ ,  $(1; 3)$ . Функция  $y = f'(x)$  —

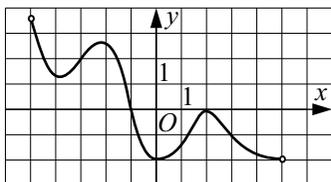


Рис. 22.

возрастает. Понятно, что эта функция возрастает на любом подинтервале каждого из указанных промежутков. Однако минимальное количество искомым промежутков, содержащих в совокупности все значения  $x$ , для которых условие  $f''(x) > 0$  равно трём.

*Ответ:* 3.

**446.** Наименьшее значение функции на отрезке может достигаться либо в точке минимума, либо на одном из концов рассматриваемого отрезка. Из рисунка следует, что  $f'(x) > 0$  при  $x \in (-5; -3) \cup (3; 5)$ ,  $f'(x) < 0$  при  $x \in (-3; 3)$  и  $f'(x) = 0$  при  $x = -3$  и при  $x = 3$ . Следовательно,  $x = -3$  — точка максимума,  $x = 3$  — точка минимума, и функция  $f(x)$  на отрезке  $[-5; -3]$  возрастает, на отрезке  $[-3; 3]$  убывает, а на отрезке  $[3; 5]$  опять возрастает. Исходя из данного исследования на возрастание убывание функции, справедливы соотношения:  $f(-5) < f(-3)$  и  $f(3) < f(5)$ . Но по условию  $f(-5) \geq f(5)$ . Значит, верна цепочка неравенств:  $f(3) < f(5) \leq f(-5) < f(-3)$ , из которой следует, что среди значений функции  $f(x)$  на концах отрезка  $[-5; 5]$  и в точке минимума  $x = 3$  наименьшим является значение в точке минимума  $x = 3$ .

*Ответ:* 3.

**447.** Известно, что дифференцируемая на  $(a; b)$  и непрерывная на  $[a; b]$  функция достигает своего наименьшего значения на границе отрезка  $[a; b]$  или в одной из точек экстремума на интервале  $(a; b)$ . Найдём точки экстремума функции  $y = f(x)$  на интервале  $(-4; 6)$ . Напомним, что в точке минимума производная меняет знак с минуса на плюс, а в точке максимума — с плюса на минус. Таким образом, в точках минимума график производной  $y = f'(x)$  пересекает ось  $Ox$  снизу вверх, а в точке максимума — сверху вниз. Следовательно,  $x = -3$  — точка максимума, а  $x = 4$  — точка минимума. В силу непрерывности функции  $f(x)$  и того, что  $f'(x) < 0$  на интервале  $(-3; 4)$ , функция убывает на  $[-3; 4] \Rightarrow f(4) < f(-3)$ . Аналогично показываем, что  $f(4) < f(6)$ .

Итак, остаётся сравнить  $f(4)$  и  $f(-4)$ . Рассмотрим интеграл  $\int_{-4}^6 f'(x) dx = f(6) - f(-4)$ . Данный интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $y = f'(x)$  и осью  $Ox$ . Очевидно, отрицательная часть этой площади по модулю больше положительной, следовательно,  $f(6) - f(-4) < 0$ . Таким образом,  $f(4) < f(-4) \Rightarrow$  наименьшее значение принимается в точке  $x_0 = 4$ .

*Ответ:* 4.

**448.**  $y = \log_2 x + \log_2(4 - x) = \log_2(x(4 - x))$ . Логарифм монотонно возрастает, поэтому наибольшее значение функции достигается там, где

достигается наибольшее значение выражения под логарифмом:  $x(4-x)$ . График  $y = x(4-x)$  является параболой, ветви которой направлены вниз. Поэтому наибольшее значение выражения  $x(4-x)$  достигается в вершине этой параболы — при  $x = 2$  и равно  $y(2) = 4$ .

А наибольшее значение функции  $y = \log_2 x + \log_2(4-x)$  равно  $\log_2 4 = 2$ .

*Ответ:* 2.

**449.**  $y = \frac{1}{64} \cdot 8^{2+x^2+\frac{x^3}{3}} - 1 = 8^{x^2+\frac{x^3}{3}} - 1$ . Известно, что дифференцируемая на  $(a; b)$  и непрерывная на  $[a; b]$  функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка  $[a; b]$  или в одной из точек экстремума на интервале  $(a; b)$ .

Имеем,  $y' = 8^{x^2+\frac{x^3}{3}} \cdot \ln 8 \cdot (2x + x^2)$ . Найдём точки экстремума:  $y' = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = 0$ ,  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$ . Точка  $x_1 = -2$  не принадлежит промежутку  $[-1; 1]$ . Вычислим значения функции в точке экстремума  $x_2$  и на концах промежутка:  $y(-1) = 8^{1-\frac{1}{3}} - 1 = 3$ ;  $y(0) = 8^0 - 1 = 0$ ;  $y(1) = 8^{1+\frac{1}{3}} - 1 = 15$ . Значит, сумма наибольшего и наименьшего значений данной функции  $y$  равна 15.

*Ответ:* 15.

**450.** Известно, что дифференцируемая на  $(a; b)$  и непрерывная на  $[a; b]$  функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка  $[a; b]$  или в одной из точек экстремума на интервале  $(a; b)$ .

Имеем,  $y' = 2 \cdot 4^{3x^2-2x^3} \cdot \ln 4 \cdot (6x - 6x^2)$ . Найдём точки экстремума:  $y' = 0 \Leftrightarrow 6x - 6x^2 = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . Точка  $x_1 = 0$  не принадлежит промежутку  $[0,5; 1,5]$ . Вычислим значения функции в точке экстремума  $x_2$  и на концах промежутка:  $y(0,5) = 2 \cdot 4^{0,75-0,25} - 3 = 1$ ;  $y(1) = 2 \cdot 4^1 - 3 = 5$ ;  $y(1,5) = 2 \cdot 4^{1,5^2 \cdot (3-2 \cdot 1,5)} - 3 = 2 \cdot 4^0 - 3 = -1$ . Значит, сумма наибольшего и наименьшего значений данной функции  $y$  равна 4.

*Ответ:* 4.

**451.** Пусть  $y_{\min}$  — наименьшее, а  $y_{\max}$  — наибольшее значения функции  $y = 2^x + 0,5^x$  на отрезке  $[-1; 2]$ . Заметим, что  $0,5^x = \frac{1}{2^x}$  и сделаем замену  $2^x = t$ . При  $-1 \leq x \leq 2$  имеем:  $0,5 \leq 2^x \leq 4$  (так как функция  $2^x$  монотонна). Пусть  $f_{\min}$ ,  $f_{\max}$  — наименьшее и наибольшее значения функции  $f(t) = t + \frac{1}{t}$  на отрезке  $[0,5; 4]$ , тогда ясно, что  $y_{\min} = f_{\min}$ ,  $y_{\max} = f_{\max}$ .

Найдём  $f_{\min}$  и  $f_{\max}$ :  $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$ ,  $t = 1$  — единственная экстремальная точка на отрезке  $[1; 4]$ , являющаяся точкой минимума. Следовательно, наименьшее значение функции  $f(t)$  есть  $f(1) = 2$ , а наибольшее значение принимается на одном из концов отрезка:  $f(0,5) = 2,5$ ,  $f(4) = 4,25$ . Итак,  $y_{\min} + y_{\max} = f_{\min} + f_{\max} = 6,25$ .

*Ответ:* 6,25.

**452.** Пусть  $y_{\min}$  — наименьшее, а  $y_{\max}$  — наибольшее значения функции  $y = 4^x + 0,25^{x-1}$  на отрезке  $[0; 1]$ . Заметим, что  $0,25^{x-1} = \frac{4}{4^x}$  и сделаем замену  $4^x = t$ . При  $0 \leq x \leq 1$  имеем:  $1 \leq 4^x \leq 4$  (так как функция  $4^x$  монотонна). Пусть  $f_{\min}$ ,  $f_{\max}$  — наименьшее и наибольшее значения функции  $f(t) = t + \frac{4}{t}$  на отрезке  $[1; 4]$ , тогда ясно, что  $y_{\min} = f_{\min}$ ,  $y_{\max} = f_{\max}$ .

Найдём  $f_{\min}$  и  $f_{\max}$ :  $f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2}$ ,  $t = 2$  — единственная экстремальная точка на отрезке  $[1; 4]$ , являющаяся точкой минимума. Следовательно, наименьшее значение функции  $f(t)$  есть  $f(2) = 4$ , а наибольшее значение принимается на одном из концов отрезка:  $f(1) = 5$ ,  $f(4) = 5$ ,  $f_{\max} = 5$ . Итак,  $y_{\min} + y_{\max} = f_{\min} + f_{\max} = 9$ .

*Ответ:* 9.

**453.** Так как основание данного логарифма больше числа 1, то чем больше значение функции  $g(x) = \frac{1}{x^3 - 12x^2 + 45x - 1}$ , тем больше значение функции  $f(x)$ . Будем рассматривать только те значения  $x$ , при которых  $f(x)$  определена, то есть  $g(x) > 0$ . При этом чем больше значение функции

$g(x) = \frac{1}{x^3 - 12x^2 + 45x - 1}$ , тем меньше значение функции  $h(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 1$ . Поэтому сначала найдём наименьшее значение функции  $h(x)$  на отрезке  $[3; 6]$ .  $h'(x) = 3x^2 - 24x + 45$ ,  $h'(x) = 0$ ,  $x^2 - 8x + 15 = 0$ ,  $(x - 3)(x - 5) = 0$ .  $h'(x) < 0$  при  $x \in [3; 5]$ , то есть  $h(x)$  убывает на отрезке  $[3; 5]$ . Поэтому на отрезке  $[3; 6]$   $h(x)$  принимает наименьшее значение при  $x = 5$ .  $g(5) = \frac{1}{49}$ ,  $f(5) = -2$ . Тогда на отрезке  $[3; 6]$   $f_{\max} = -2$ .

*Ответ:* -2.

**454.** Так как основание данного логарифма больше числа 1, то чем боль-

ше значение функции  $h(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 6$ , тем больше значение функции  $f(x)$ . Поэтому сначала найдём наибольшее и наименьшее значения функции  $h(x)$  на отрезке  $[0; 3]$ .  $h'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ ,  $h'(x) = 0$ ,  $x^2 + 2x - 3 = 0$ ,  $(x - 1)(x + 3) = 0$ .  $h'(x) < 0$  при  $x \in [-3; 1]$ , то есть  $h(x)$  убывает на отрезке  $[-3; 1]$ . Поэтому на отрезке  $[0; 3]$   $h(x)$  принимает наименьшее значение при  $x = 1$ , а наибольшее — при  $x = 0$  или при  $x = 3$ .  $h(1) = 1$ ,  $h(0) = 6$ ,  $h(3) = 33$ . Тогда на отрезке  $[0; 3]$   $f_{max} = 1$ ,  $f_{min} = 0$ ,  $f_{max} - f_{min} = 1 - 0 = 1$ .

Ответ: 1.

455. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{1}{x} - 1$ ,  $x = \frac{1}{4}$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ .

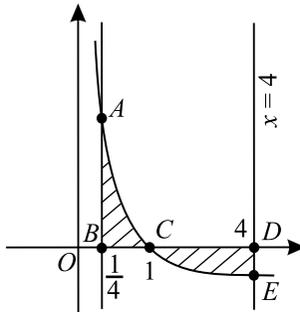


Рис. 23.

Решение. Графиком функции  $y = \frac{1}{x} - 1$  является гипербола, смещённая на 1 вниз по оси ординат относительно гиперболы  $y = \frac{1}{x}$ . При этом этот график пересекает ось абсцисс в единственной точке при  $x = 1$ , что можно определить, решив уравнение  $\frac{1}{x} - 1 = 0$ . Таким образом, фигура, ограниченная указанными в задаче линиями, будет иметь вид заштрихованной части плоскости на рисунке 23. Тогда площадь этой фигуры равна  $S = S_{ABC} + S_{CDE}$  (см. рис. 23). Поскольку функция  $y = \frac{1}{x} - 1$  на интервале  $(1; 4]$  принимает отрицательные значения, то площадь части  $CDE$  фигуры будет вычислена по формуле

$S_{CDE} = -\int_1^4 y(x) dx$ , в то время как площадь части  $ABC$  определяется равенством  $S_{ABC} = \int_{\frac{1}{4}}^1 y(x) dx$ .

$$\begin{aligned} \text{Итак, } S &= \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx - \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = (\ln x - x) \Big|_{\frac{1}{4}}^1 - (\ln x - x) \Big|_1^4 = \\ &= \ln 1 - 1 - \ln \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ln 4 + 4 + \ln 1 - 1 = 2,25. \end{aligned}$$

Ответ: 2,25.

**456.** На отрезке  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$   $\sin x \geq 0$ , на отрезке  $\left[\pi; \frac{4\pi}{3}\right]$   $\sin x \leq 0$ .

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} = \\ &= -\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos \pi = 1 + 0 - \frac{1}{2} + 1 = 1,5. \end{aligned}$$

Ответ: 1,5.

**457.** Найдём абсциссы точек пересечения данных линий  $x^2 = x + 2$ ,  $x^2 - x - 2 = 0$ :  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$ .  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 2$  — искомые абсциссы.

$$S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-1}^2 = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

**458.** Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий  $x^3 - x = 8x$ ,  $x(x-3)(x+3) = 0$ :  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = -3$ . Функции  $y = x^3$  и  $y = 8x$  нечётные, фигура, ограниченная их графиками, симметрична относительно начала координат.

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^3 (8x - x^3 + x) dx = \\ &= 2 \int_0^3 (9x - x^3) dx = 2 \left(\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right) \Big|_0^3 = 2 \cdot \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = 2 \cdot \frac{81}{4} = 40,5. \end{aligned}$$

Ответ: 40,5.

**459.** Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий:  $3x^3 - 9x^2 + 9x = 3x^2$ ,  $3x^3 - 12x^2 + 9x = 0$ ,  $3x(x^2 - 4x + 3) = 0$ ,

$$3x(x-1)(x-3) = 0, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3.$$

На отрезке  $[0; 1]$  график функции  $y = 3x(x^2 - 3x + 3)$  лежит выше графика функции  $y = 3x^2$ , а на отрезке  $[1; 3]$  график функции  $y = 3x^2$  лежит выше графика функции  $y = 3x(x^2 - 3x + 3)$ .

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (3x^3 - 9x^2 + 9x - 3x^2) dx + \int_1^3 (3x^2 - 3x^3 + 9x^2 - 9x) dx = \\ &= \int_0^1 (3x^3 - 12x^2 + 9x) dx + \int_1^3 (12x^2 - 3x^3 - 9x) dx = \\ &= \left( \frac{3x^4}{4} - 4x^3 + \frac{9x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left( 4x^3 - \frac{3x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} \right) \Big|_1^3 = \\ &= \frac{3}{4} - 4 + \frac{9}{2} + 108 - \frac{243}{4} - \frac{81}{2} - 4 + \frac{3}{4} + \frac{9}{2} = 9,25. \end{aligned}$$

Ответ: 9,25.

$$\begin{aligned} 460. S &= \int_{-1}^3 (3x^2 + x + 2) dx = \left( 12x^2 + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^3 = \\ &= 27 + \frac{9}{2} + 6 + 1 - \frac{1}{2} + 2 = 40. \end{aligned}$$

Ответ: 40.

$$461. S = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = -2 \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -2 \cos \pi + 2 \cos \frac{\pi}{2} = 2.$$

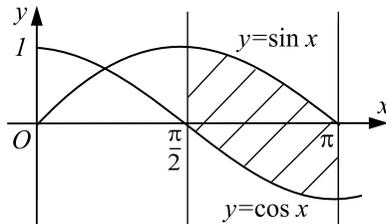


Рис. 24.

Ответ: 2.

462. Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий

$$2x^2 + x = 10x - 9, 2x^2 - 9x + 9 = 0: x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4}, x_1 = 3, x_2 = \frac{3}{2}.$$

$x_1 = 3$  и  $x_2 = \frac{3}{2}$  — искомые абсциссы.

$$S = \int_{\frac{3}{2}}^3 (10x - 9 - 2x^2 - x) dx = \int_{\frac{3}{2}}^3 (9x - 9 - 2x^2) dx = \left( \frac{9x^2}{2} - 9x - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{3}{2}}^3 =$$

$$= \frac{81}{2} - 27 - 18 - \left( \frac{81}{8} - \frac{27}{2} - \frac{9}{4} \right) = 1,125.$$

Ответ: 1,125.

**463.** Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий  $-x^2 - 11x = 18 - 2x$ ,  $x^2 + 9x + 18 = 0$ :  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -6$ .

$$S = \int_{-6}^{-3} (-x^2 - 11x - 18 + 2x) dx = \int_{-6}^{-3} (-x^2 - 9x - 18) dx =$$

$$= \left( -\frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} - 18x \right) \Big|_{-6}^{-3} = 9 - \frac{81}{2} + 54 - (72 - 162 + 108) = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

**464.** Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий из уравнения  $x^2 - 4x = 5$ ;  $x^2 - 4x - 5 = 0$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 5$  — искомые абсциссы.

$$S = \int_{-1}^5 (5 - x^2 + 4x) dx = \left( 5x - \frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_{-1}^5 =$$

$$= 25 - \frac{125}{3} + 50 - \left( -5 + \frac{1}{3} + 2 \right) = 36.$$

Ответ: 36.

**465.** Найдём абсциссы точек пересечения линии  $y = (x - 2)^3 + 1$  с осями координат. С осью  $Oy$ :  $x = 0$ . С осью  $Ox$ :  $y = 0$ ,  $(x - 2)^3 + 1 = 0$ ,

$$x = 1. S = - \int_0^1 ((x - 2)^3 + 1) dx = - \left( \frac{(x - 2)^4}{4} + x \right) \Big|_0^1 = - \left( \frac{1}{4} + 1 - 4 \right) =$$

$$= 2,75.$$

Ответ: 2,75.

**466.** Найдём абсциссы точек пересечения линии  $y = x^3 - 2x - 4$  с осями координат. С осью  $Oy$ :  $x = 0$ . С осью  $Ox$ :  $y = 0$ .  $x^3 - 2x - 4 = 0$ ,  $(x - 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x^2 + 2x + 2 > 0$  при всех  $x \in R$ .

На промежутке  $[0; 2]$   $y = x^3 - 2x - 4$  принимает неположительные

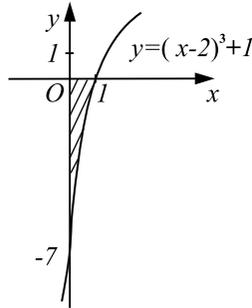


Рис. 25.

значения, значит  $S = - \int_0^2 (x^3 - 2x - 4) dx = \left( -\frac{x^4}{4} + x^2 + 4x \right) \Big|_0^2 =$   
 $= -4 + 4 + 8 = 8.$

Ответ: 8.

**467.** Найдём абсциссы точек пересечения линии  $y = x^3 + 27$  с осями координат. С осью  $Oy$ :  $x = 0$ . С осью  $Ox$ :  $y = 0$ .  $x^3 + 27 = 0$ ,  $x = -3$ .

$$S = \int_{-3}^0 (x^3 + 27) dx = \left( \frac{x^4}{4} + 27x \right) \Big|_{-3}^0 = -\frac{81}{4} + 81 = 60,75.$$

Ответ: 60,75.

**468.** Найдём абсциссы точек пересечения линии  $y = (x - 3)^3 - 64$  с осями координат. С осью  $Oy$ :  $x = 0$ . С осью  $Ox$ :  $y = 0$ .  $(x - 3)^3 - 64 = 0$ ,  $x - 3 = 4$ .  $x = 7$ . На промежутке  $[0; 7]$   $y = (x - 3)^3 - 64$  принимает

неположительные значения, значит  $S = - \int_0^7 ((x - 3)^3 - 64) dx =$   
 $= - \left( \frac{(x - 3)^4}{4} - 64x \right) \Big|_0^7 = -\frac{256}{4} + 448 - \frac{81}{4} = 363,75.$

Ответ: 363,75.

**469.**  $S = \int_1^5 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^5 = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5} = 0,8.$

Ответ: 0,8.

$$470. S = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 1 = 6.$$

Ответ: 6.

471. Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий:

$$\sqrt{3x} + 1 = x + 1, \sqrt{3x} = x, 3x = x^2, x \geq 0 \quad x^2 - 3x = 0, x(x - 3) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 3. S = \int_0^3 (\sqrt{3x} + 1 - x - 1) dx = \int_0^3 (\sqrt{3x} - x) dx =$$

$$= \left( \frac{2}{9} \sqrt{(3x)^3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{2}{9} \cdot 27 - \frac{9}{2} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

472. Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий:

$$3x^2 - 15x + 20 = 9x - 1, 3x^2 - 24x + 21 = 0, x^2 - 8x + 7 = 0, x_1 = 1,$$

$$x_2 = 7. S = \int_1^7 (9x - 1 - 3x^2 + 15x - 20) dx = \int_1^7 (24x - 3x^2 - 21) dx =$$

$$= 12x^2 - x^3 - 21x \Big|_1^7 = 588 - 343 - 147 - 12 + 1 + 21 = 108.$$

Ответ: 108.

473. Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий:

$$3x^2 + 15x + 30 = 6 - 3x, 3x^2 + 18x + 24 = 0, x^2 + 6x + 8 = 0, x_1 = -2,$$

$$x_2 = -4. S = \int_{-4}^{-2} (6 - 3x - 3x^2 - 15x - 30) dx = \int_{-4}^{-2} (-24 - 18x - 3x^2) dx =$$

$$= (-24x - 9x^2 - x^3) \Big|_{-4}^{-2} = 48 - 36 + 8 - 96 + 144 - 64 = 4.$$

Ответ: 4.

474. Функции  $y = 2x^4$ ,  $y = 32$ ,  $y = 2$  чётные, фигура, ограниченная их графиками, симметрична относительно оси  $Oy$ . Найдём абсциссы точек пересечения заданных функций на промежутке  $x \geq 0$ :

а)  $y = 2x^4$  и  $y = 32$ ,  $2x^4 = 32$ ,  $x^4 = 16$ ,  $x_{1,2} = \pm 2$ ;  $x = -2$  не удовлетворяет условию  $x \geq 0$ ;

б)  $y = 2x^4$  и  $y = 2$ ,  $2x^4 = 2$ ,  $x^4 = 1$ ,  $x_{3,4} = \pm 1$ ;  $x = -1$  не удовлетворяет условию  $x \geq 0$ .

$$S = 2 \left( \int_0^2 32 dx - \int_0^1 2 dx - \int_1^2 2x^4 dx \right) = 2 \left( 32x \Big|_0^2 - 2x \Big|_0^1 - \frac{2x^5}{5} \Big|_1^2 \right) =$$

$$= 2 \left( 64 - 2 - \frac{64}{5} + 0,4 \right) = 99,2.$$

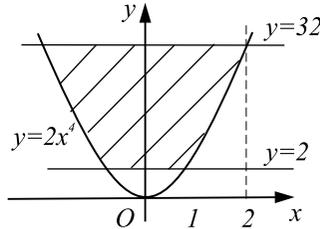


Рис. 26.

Ответ: 99,2.

475. Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий из уравнения  $2x^3 = 54$ :  $x^3 = 27$ ,  $x = 3$ .

$$S = \int_0^3 (54 - 2x^3) dx = \left( 54x - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^3 = 54 \cdot 3 - \frac{81}{2} = 121,5.$$

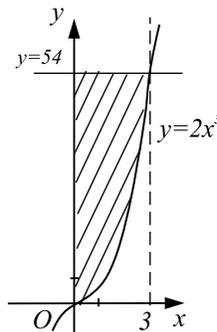


Рис. 27.

Ответ: 121,5.

$$476. S = \int_2^5 \left( (x-1)^2 + 3 \right) dx = \left( \frac{(x-1)^3}{3} + 3x \right) \Big|_2^5 = \frac{64}{3} + 15 - \frac{1}{3} - 6 = 30.$$

Ответ: 30.

$$477. S = \int_{-5}^{-3} (x^3 - 3) dx = - \left( \frac{x^4}{4} - 3x \right) \Big|_{-5}^{-3} = - \left( \frac{81}{4} + 9 - \frac{625}{4} - 15 \right) = 142.$$

Ответ: 142.

$$478. S = - \int_{-27}^{-8} (8\sqrt[3]{x} + 1) dx = - \left( 6x^{\frac{4}{3}} + x \right) \Big|_{-27}^{-8} = - \left( 6 \cdot (-8)^{\frac{4}{3}} - 8 - 6 \cdot (-27)^{\frac{4}{3}} - 27 \right) = 371.$$

Ответ: 371.

479. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 16 \sin 4x, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad x = x = -\frac{\pi}{6}. \quad \text{На отрезке } \left[ x = -\frac{\pi}{4}; x = -\frac{\pi}{6} \right]$$

функция  $y = \sin 4x$  неположительна.

$$S = - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} 16 \sin 4x dx = 4 \cos 4x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} = 4 \cos \frac{2\pi}{3} - 4 \cos \pi - 2 + 4 = 2.$$

Ответ: 2.

480. Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий:

$$-x^2 + 6x - 3 = -x + 7, \quad x^2 - 7x + 10 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5.$$

$$S = \int_2^5 (-x^2 + 6x - 3 + x - 7) dx = \int_2^5 (-x^2 + 7x - 10) dx = \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 10x \right) \Big|_2^5 = -\frac{125}{3} + \frac{175}{2} - 50 + \frac{8}{3} - \frac{28}{2} + 20 = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

481. Функция  $y = \left( \frac{x}{2} \right)^2$  на промежутке  $x \geq 0$  монотонна. Выразим  $x$

$$\text{через } y: y = \frac{x^2}{4}, \quad x = 2\sqrt{y}. \quad S = \int_1^{16} 2\sqrt{y} dy = \frac{4\sqrt{y^3}}{3} \Big|_1^{16} = \frac{4 \cdot 4^3}{3} - \frac{4}{3} = 84.$$

Ответ: 84.

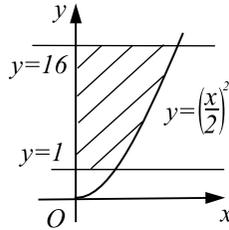


Рис. 28.

482. По определению первообразной,  $F'(x) = f(x)$ . Угловой коэффициент касательной к графику  $y = F(x)$  в точке  $x_0 = \pi$  равен

$$F'(\pi) = f(\pi) = \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 = 0,75 + 1 = 1,75.$$

Ответ: 1,75.

483. Найдём нули функции  $y = (x + 1)(x - 4)(x - 3)(2x - 1)$  на полуинтервале  $[0; 4)$ .

$$x + 1 = 0, x = -1, -1 \notin [0; 4); x - 4 = 0, x = 4, 4 \notin [0; 4);$$

$$x - 3 = 0, x = 3, 3 \in [0; 4); 2x - 1 = 0, x = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \in [0; 4).$$

Полуинтервалу  $[0; 4)$  принадлежат только 2 числа. Исследуем число корней уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[-6; 0]$ , зная, что  $T = 4$ .

$$x = 3. 3 - 4 = -1, -1 \in [-6; 0]; -1 - 4 = -5, -5 \in [-6; 0];$$

$$-5 - 4 = -9, -9 \notin [-6; 0].$$

$$x = \frac{1}{2}. \frac{1}{2} - 4 = -3,5, -3,5 \in [-6; 0]; -3,5 - 4 = -7,5, -7,5 \notin [-6; 0].$$

Итак на отрезке  $[-6; 0]$  уравнение  $f(x) = 0$  имеет 3 корня.

Ответ: 3.

484. Так как функция  $y = f(x)$  периодическая, с периодом 5, то  $f(-10) = f(-10 + 5 + 5) = f(0)$ , а  $f(8) = f(8 - 5 - 5) = f(-2)$ . Из рисунка определяем, что  $f(0) = 0$ ,  $f(-1) = -2$ ,  $f(-2) = 4$ . Получаем  $f(-10) - f(-1) \cdot f(8) = 0 - (-2) \cdot 4 = 8$ .

Ответ: 8.

485. Так как период функции равен 5, то  $f(11) = f(11 - 5 - 5) = f(1)$  и  $f(-9) = f(-9 + 5 + 5) = f(1)$ . Глядя на график функции, делаем вывод:  $f(11) = f(-9) = f(1) = -1$ ,  $f(0) = 2$ . Подставив найденные значения в

искомое выражение, получим, что  $\frac{f(11)}{f(0)f(-9)} = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = 0,5$ .

Ответ: 0,5.

**486.** Так как период функции равен 4, то  $f(-7) = f(-7 + 4 + 4) = f(1)$ ;  $f(8) = f(8 - 4 - 4) = f(0)$  и  $f(10) = f(10 - 4 - 4) = f(2)$ . Из графика функции получаем, что  $f(1) = 4$ ;  $f(0) = 2$ ;  $f(2) = -2$ . Подставим найденные значения в искомое выражение:

$$f(-7) + f(8) - 3f(10) = f(1) + f(0) - 3f(2) = 4 + 2 + 6 = 12.$$

*Ответ:* 12.

**487.**  $f(17) = f(17 - 6 - 6) = f(5) = 25 - 20 = 5$ ;

$$f(8) = f(8 - 6) = f(2) = 4 - 8 = -4 \Rightarrow 2f(17) + 3f(8) = 10 - 12 = -2.$$

*Ответ:* -2.

**488.** Так как период функции равен 5, то  $f(7) = f(7 - 5) = f(2) = -2$  (из графика);  $f(-10) = f(-10 + 5 + 5) = f(0) = 1$  (из графика). А выражение  $2f(7) - 3f(-10) = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -7$ .

*Ответ:* -7.

**489.** Так как  $g(x) + 5 = f(x)$ , то  $g(x) = f(x) - 5$ . Тогда  $f(-5) + g(4) = f(-5) + f(4) - 5 = f(1 + (-2) \cdot 3) + f(1 + 3) - 5 = f(1) + f(1) - 5 = -1$ .

*Ответ:* -1.

**490.**  $f(9) = f(-1) = 1$ ;  $2f(3) - 5 \cdot f(9) = 9 \Rightarrow 2f(3) = 14$ ;  $f(3) = 7$ .  
 $f(-12) = f(3) = 7$ .

*Ответ:* 7.

**491.** Найдём количество точек пересечения графиков  $y = f(x)$  и  $y = 1$  на промежутке  $[0; 2]$ :  $x^2 - 2 = 1$ ,  $x_1 = \sqrt{3}$ ,  $x_2 = -\sqrt{3} \notin [0; 2]$ . На  $x \in [1; 7]$  график  $y = f(x)$  пересекает  $y = 1$  три раза при  $x_1 = \sqrt{3}$ ,  $x_2 = \sqrt{3} + 2$ ,  $x_3 = \sqrt{3} + 4$ .

*Ответ:* 3.

**492.**  $x^2 + 2x = 3$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3$  — не подходит, так как не входит в  $(-1; 2]$ . На  $x \in [0; 11]$   $f(x)$  пересекает  $y = 3$  четыре раза при  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 7$ ,  $x_4 = 10$ .

*Ответ:* 4.

**493.**  $6f(7) - 5f(-2) = 6f(2 \cdot 3 + 1) - 5f(3 - 2) = 6f(1) - 5f(1) = f(1) = 4$ .

*Ответ:* 4.

**494.**  $4f(10) - 3f(-5) = 4f(3 \cdot 3 + 1) - 3f(2 \cdot 3 - 5) = 4f(1) - 3f(1) = f(1) = 7$ .

*Ответ:* 7.

**495.** Так как период функции равен 2, то  $f(-3) = f(-3 + 2) = f(-1)$  и  $f(3,5) = f(3,5 - 2 - 2) = f(-0,5)$ . Зная, что  $f(x) = x^2 + 2x$  при  $x \in [-2; 0)$ , имеем:  $f(-3) = f(-1) = -1$ ;  $f(3,5) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$ .

Найдём искомое значение:  $-2f(-3) - 4f(3,5) = -2 \cdot (-1) - 4 \left(-\frac{3}{4}\right) = 5$ .

*Ответ:* 5.

**496.** Так как наименьший положительный период функции  $y = f(x)$  равен 5, а наименьший положительный период функции  $y = \sin \pi x$  равен 2, то наименьший положительный период функции  $y = f(x) + \sin \pi x$  равен  $2 \cdot 5 = 10$ .

*Ответ:* 10.

**497.** Пользуясь периодичностью функции  $f(x)$ , имеем:  
 $3f(-7) - f(-2)f(13) = 3f(3 + (-2) \cdot 5) - f(3 + (-1) \cdot 5)f(3 + 2 \cdot 5) = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -4$ .

*Ответ:* -4.

**498.** Единственно возможным случаем, когда периодическая функция с периодом 2 на отрезке  $[0; 8]$  имеет ровно 5 корней  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$ , будет случай  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 4$ ,  $x_4 = 6$ ,  $x_5 = 8$ . Откуда  $x_1 + \dots + x_5 = 0 + \dots + 8 = 20$ .

*Ответ:* 20.

**499.** Так как  $T = 3$  и  $f(x) = x^2 + 3x$  при  $x \in [-3; 0]$ , то  
 $-2f(4) + 3f(-4) = -2f(-2 + 6) + 3f(-1 - 3) = -2f(-2) + 3f(-1) = -2(4 - 6) + 3(1 - 3) = 4 - 6 = -2$ .

*Ответ:* -2.

**500.**  $f(x)$  периодична с периодом, равным 3, поэтому меньший корень будет на 6 отличаться от большего. Это возможно на  $x \in [1; 7]$  только, если корнями будут  $x = 1; 4; 7$ . Их произведение равно 28.

*Ответ:* 28.

**501.** Период функции  $\cos \frac{3x}{2}$  равен  $T_1 = 2\pi : \frac{3}{2} = \frac{4\pi}{3}$ , период функции  $\sin \frac{x}{3}$  равен  $T_2 = 6\pi$ . Наименьшее общее кратное этих периодов равно  $T = 12\pi$ . Ясно, что  $T = 12\pi$  — период функции  $f(x)$ . Покажем, что это — наименьший положительный (основной) период. Пусть существует период  $S$  такой, что  $0 < S < 12\pi$ . Тогда имеем:

$$\cos \frac{3}{2}(x + S) - \sin \frac{x + S}{3} - \left( \cos \frac{3}{2}x - \sin \frac{x}{3} \right) = 0,$$

$$\left( \cos \frac{3}{2}(x + S) - \cos \frac{3}{2}x \right) - \left( \sin \frac{x + S}{3} - \sin \frac{x}{3} \right) = 0,$$

$$\sin \frac{3}{4}S \cdot \sin \frac{3}{4}(2x + S) + \sin \frac{S}{6} \cdot \cos \frac{1}{6}(2x + S) = 0.$$

Так как,  $S < 12\pi$ , а  $\frac{3}{4}S = \frac{3S}{4\pi}\pi$  и  $\frac{S}{6} = \frac{S}{6\pi}\pi$ , то по крайней мере одно из чисел  $\frac{3S}{4\pi}$  или  $\frac{S}{6\pi}$  не является целым, то есть одно из чисел  $\sin \frac{3}{4}S$  или  $\sin \frac{S}{6}$  отлично от нуля. Пусть, например,  $\sin \frac{3}{4}S \neq 0$ . Тогда имеем

$$\text{тождество } \frac{\sin \frac{3}{4}(2x + S)}{\cos \frac{1}{6}(2x + S)} = -\frac{\sin \frac{S}{6}}{\sin \frac{3}{4}S},$$

которое невозможно, так как в правой части стоит постоянная величина, а в левой переменная. Например,

$$\text{при } x = 0 \text{ левая часть равна } \frac{\sin \frac{3S}{4}}{\cos \frac{S}{6}},$$

$$\text{а при } x = 6\pi \text{ она же имеет вид } \frac{\sin \frac{3S}{4}(12\pi + S)}{\cos \frac{1}{6}(12\pi + S)} = \frac{\sin \left(\frac{3S}{4} + 9\pi\right)}{\cos \left(\frac{S}{6} + 2\pi\right)} = -\frac{\sin \frac{3S}{4}}{\cos \frac{S}{6}}.$$

*Ответ:*  $12\pi$ .

**502.** Функция  $y = (px - 9 - 6x^2)^3$  имеет максимум в точке  $x_0 = -2,5$ ;  $y = t^3$  монотонно возрастает и имеет наибольшее значение при  $t$  наибольшем,  $t = -6x^2 + px - 9$  наибольшее при  $x_0 = \frac{p}{12}$ ; по условию  $x_0 = -2,5$ ;

$$\frac{p}{12} = -\frac{5}{2}; p = -\frac{12 \cdot 5}{2} = -30.$$

*Ответ:*  $-30$ .

**503.** Найдём производную  $y' = 3x^2 + 2ax + 3$ . Функция не имеет экстремумов в двух случаях:

1) Нет критических точек, если  $y' = 0$  не имеет корней.  $3x^2 + 2ax + 3 = 0$  нет корней, если  $D < 0$ ,  $D = 4a^2 - 36$ ;  $4(a - 3)(a + 3) < 0$ ,  $-3 < a < 3$ .

2) Критические точки есть, но "при переходе" через них производная не меняет знака.  $3x^2 + 2ax + 3$  — полный квадрат  $3x^2 + 2ax + 3 = 0$ ,  $D = 0$ .  $4(a - 3)(a + 3) \leq 0$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = -3$ .

Объединяя оба случая, имеем  $-3 \leq a \leq 3$ . Наибольшее целое  $a = 3$ .

*Ответ:* 3.

**504.** Найдём производную данной функции  $y' = 6x^2 - 2bx - b$ . Функция не имеет экстремумов в двух случаях:

1) Нет критических точек, если  $y' = 0$  не имеет корней.  $6x^2 - 2bx - b = 0$  не имеет корней, если  $D < 0$ ,  $D = 4b^2 + 24b$ ;  $4b(b + 6) < 0$ ,  $-6 < b < 0$ .

2) Критические точки есть, но "при переходе" через них производная не меняет знака.  $6x^2 - 2bx - b$  — полный квадрат  $6x^2 - 2bx - b = 0$ ,  $D = 0$ .  $4b(b + 6) = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = -6$ .

Объединяя оба случая, имеем  $-6 \leq b \leq 0$ . Наименьшее целое  $b = -6$ .

*Ответ:* -6.

**505.** Функция  $y = -\sqrt{t}$  является убывающей и принимает наибольшее значение при  $t = 3 + 6a^3x + 4x^2$  наименьшем.  $t = 4x^2 + 6a^3x + 3$

принимает наименьшее значение при  $x = -\frac{6a^3}{8} = -\frac{3a^3}{4}$ ; по условию

$x = \frac{3}{4}$ ;  $-\frac{3a^3}{4} = \frac{3}{4}$ ;  $a^3 = -1$ ;  $a = -1$ . Проверим, принимает ли под-

коренное выражение при  $a = -1$ ,  $x = \frac{3}{4}$  неотрицательное значение:

$$4 \cdot \frac{9}{4} + 6 \cdot (-1) \cdot \frac{3}{4} + 3 = 9 - \frac{9}{2} + 3 = 7,5 > 0.$$

*Ответ:* -1.

**506.** Запишем функцию в виде  $y = \frac{-1}{\sqrt{mx - 18x^2 + 11}}$ . Функция представ-

ляет собой дробь с постоянным отрицательным числителем. Следовательно, эта дробь принимает наибольшее значение при наибольшем знаменате-

теле.  $y = \sqrt{t}$  — функция возрастающая и принимает наибольшее значение при  $t = mx - 18x^2 + 11$  наибольшем,  $mx - 18x^2 + 11$  — наибольшее (максимальное) при  $x = \frac{m}{36}$ ; по условию  $x = \frac{1}{12}$ ;  $\frac{m}{36} = \frac{1}{12}$ ;  $m = 3$ . Проверим,

будет ли подкоренное выражение положительным при  $m = 3$ ,  $x = \frac{1}{12}$ :

$$3 \cdot \frac{1}{12} - 18 \cdot \frac{1}{144} + 11 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + 11 > 0.$$

*Ответ:* 3.

**507.**  $y = -\sqrt[4]{4 + 36x^2 - 3ax}$  Функция  $y = -\sqrt[4]{t}$  убывающая и непрерывная, следовательно, наибольшему значению функции соответствует наименьшее значение  $t = 4 + 36x^2 - 3ax$ .  $t = 36x^2 - 3ax + 4$  принимает

наименьшее значение при  $x = \frac{3a}{72} = \frac{a}{24}$ ; по условию  $x = \frac{1}{4}$ ;  $\frac{a}{24} = \frac{1}{4}$ ;  $a = 6$ . Проверим, принимает ли подкоренное выражение неотрицательное значение при  $a = 6$ ,  $x = \frac{1}{4}$ ;  $4 + 36 \cdot \frac{1}{16} - 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{4} = 4 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = 4 - \frac{9}{4} > 0$ .

*Ответ:* 6.

**508.** Функция  $y = \operatorname{arccot} t$  убывающая и непрерывная, следовательно, наибольшему значению функции соответствует наименьшее значение аргумента  $8x^2 + 5m^2x - \ln m$ , ( $m > 0$ ) имеет наименьшее значение при  $x = -\frac{5m^2}{16}$ ; по условию  $x = -5$ ;  $-\frac{5m^2}{16} = -5$ ;  $m^2 = 16$ ;  $m = 4$ ; так как  $m > 0$ .

*Ответ:*  $m = 4$ .

**509.** Функция  $y = \operatorname{arctg} t$  возрастающая, имеет наименьшее значение при  $t = 9x^2 + 6a^3x + a$  наименьшем,  $9x^2 + 6a^3x + a$  наименьшее при  $x = -\frac{6a^3}{18} = -\frac{a^3}{3}$ ; по условию  $x = 9$ ;  $-\frac{a^3}{3} = 9$ ;  $a^3 = -27$ ;  $a = -3$ .

*Ответ:* 3.

**510.** Запишем функцию в виде  $y = \ln(x + 5)(a - 2x)$ ;  $y = \ln(-2x^2 - (10 - a)x + 5a)$ . Функция  $y = \ln t$  возрастает и непрерывна, имеет наибольшее значение при  $t = -2x^2 - (10 - a)x + 5a$  наибольшем,  $-2x^2 - (10 - a)x + 5a$  наибольшее при  $x = \frac{10 - a}{-4}$ ; по условию  $x = -3$ ;

$\frac{10 - a}{4} = 3$ ;  $a = -2$ . Проверим, будут ли подкоренные выражения под знаком логарифма положительны при  $a = -2$ ,  $x = -3$ :  $1) x + 5; -3 + 5 > 0$   
 $2) a - 2x; -2 + 6 > 0$ .

*Ответ:*  $a = -2$ .

**511.** Функция  $y = \operatorname{arccot} t$  монотонно убывающая.  $y_{\min}$  в точке, в которой  $t$  имеет максимум.  $t = 13 + 10ax - 2x^2$  имеет максимум в точке  $x = \frac{-10a}{-2 \cdot 2}$ .

По условию  $x = 15$ . Найдём  $a$ , решив уравнение  $\frac{10a}{4} = 15$ .  $a = 6$ .

*Ответ:* 6.

**512.** Преобразуем вид функции:

$y = 16^{5x^2 - 1} \cdot 8^{ax - 2} = (2^4)^{5x^2 - 1} \cdot (2^3)^{ax - 2} = 2^{20x^2 + 3ax - 10}$ . Функция  $y = 2^t$  — возрастающая и непрерывная. Следовательно, чем меньше значение показателя  $t$ , тем меньше значение функции. Поэтому функция

$y = 2^{20x^2+3ax-10}$  имеет минимум в той точке, в которой имеет минимум показатель  $t = 20x^2 + 3ax - 10$  — квадратный трёхчлен с положительным старшим коэффициентом. Указанный квадратный трёхчлен имеет минимум в точке  $x = -\frac{B}{2A}$ , соответствующей абсциссе вершины параболы, где  $A$  — первый коэффициент трёхчлена, а  $B$  — второй. Таким образом,  $x = -\frac{3a}{40}$ . Итак, данная в условии функция имеет минимум при  $x = -\frac{3a}{40}$ . Но из условия следует, что минимум должен достигаться при  $x = 0,15$ . Тогда из равенства  $-\frac{3a}{40} = 0,15$  находим, что  $a = -2$ .

*Ответ:*  $-2$ .

$$\begin{aligned} 513. y &= 9^{x-x^2} \cdot 3^{x^2-5ax+3} = 3^{2x-2x^2+x^2-5ax+3} = 3^{2x-x^2-5ax+3} = \\ &= 3^{-x^2-(5a-2)x+3}. \end{aligned}$$

Функция  $y = 3^t$ ,  $3 > 1$  монотонно возрастающая.  $y_{\max}$  в точке, в которой  $t$  имеет максимум.  $t = -x^2 - (5a - 2)x + 3$  имеет максимум в точке  $x = \frac{5a-2}{-2}$ . По условию  $x = 3$ . Найдём  $a$  из уравнения  $\frac{5a-2}{-2} = 3$ .  $5a = -4$ ,  $a = -0,8$ .

*Ответ:*  $-0,8$ .

514. 1) Пусть 10%-ного раствора взяли  $x$  г, тогда концентрированной соляной кислоты в нём:  $\frac{x}{10}$  г.

2) В 600 г. 15%-ного раствора концентрированной соляной кислоты содержится:  $600 \cdot \frac{15}{100} = 90$  (г).

3) В 30%-ном растворе концентрированной соляной кислоты содержится:  $\left(90 - \frac{x}{10}\right) \cdot \frac{100}{30} = \left(300 - \frac{x}{3}\right)$  (г).

4) Тогда 10%-ого раствора было:

$$600 - \left(300 - \frac{x}{3}\right) = \left(300 + \frac{x}{3}\right) \text{ (г)}.$$

Составим уравнение и решим его.

$$x = 300 + \frac{x}{3}, \quad \frac{2}{3}x = 300, \quad x = 450 \text{ (г)}.$$

*Ответ:* 450.

515. Если в сплав массой 24 кг прибавить  $x$  кг олова, то масса нового сплава окажется равной  $(24+x)$  кг с 40%-ным содержанием меди, то есть

меди в новом сплаве  $0,4(24 + x)$  кг. В 45%-ном сплаве массой 24 кг меди содержится  $24 \cdot 0,45 = 10,8$  (кг); эта же масса меди в новом сплаве.

Составим и решим уравнение:  $0,4(24 + x) = 10,8$ ;  $24 + x = 27$ ,  $x = 3$ . 3 кг чистого олова надо прибавить в сплав.

*Ответ:* 3.

**516.** Пусть 1-ый сосуд содержит  $x\%$  щёлочи, тогда 2-ой —  $(x - 40)\%$ .

Если 4 л составляют  $x\%$  раствора, то всего раствора в 1-ом сосуде  $4 : \frac{x}{100} = \frac{400}{x}$  (л); во 2-ом сосуде 6 л щёлочи, что составляет  $(x - 40)\%$  всего объёма раствора, значит, весь объём раствора

$6 : \frac{x - 40}{100} = \frac{600}{x - 40}$  (л). В двух сосудах  $\left(\frac{400}{x} + \frac{600}{x - 40}\right)$  л, а по усло-

вию задачи в них 20 л. Составим и решим уравнение:  $\frac{400}{x} + \frac{600}{x - 40} = 20$ ;

$x(x - 40) \neq 0$ ;  $\frac{20}{x} + \frac{30}{x - 40} = 1$ ;  $20(x - 40) + 30x = x(x - 40)$ ;

$20x - 800 + 30x = x^2 - 40x$ ;  $x^2 - 90x + 800 = 0$ ;  $x_{1,2} = 45 \pm \sqrt{2025 - 800}$ ;  
 $x_{1,2} = 45 \pm \sqrt{1225}$ ;  $x_1 = 45 - 35$ ;  $x_2 = 45 + 35$ ;  $x_1 = 10$ ;  $x_2 = 80$ .

Оба числа — корни составленного уравнения. По смыслу задачи  $x > 40$ , значит,  $x = 80$ . 80% щёлочи содержал 1-ый сосуд.

*Ответ:* 80.

**517.** Пусть  $x$  — первоначальная масса сплава. Тогда

$x - 5$  — количество меди в сплаве;

$\frac{x - 5}{x} \cdot 100$  — содержание меди в "старом" сплаве в процентах,

$\frac{x - 5}{x + 15} \cdot 100$  — содержание меди в "новом" сплаве в процентах.

Составляем и решаем уравнение.

$\frac{(x - 5) \cdot 100}{x} - \frac{(x - 5) \cdot 100}{x + 15} = 30$ ,  $10(x - 5)(x + 15 - x) = 3x(x + 15)$ ,

$50(x - 5) = x(x + 15)$ ,  $x^2 - 35x + 250 = 0$ ,  $x_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 250 \cdot 4}}{2}$ ,

$x_{1,2} = \frac{35 \pm 5\sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{35 \pm 15}{2}$ ,  $x_1 = 25$ ,  $x_2 = 10$ . Но так как в условии

сказано, что  $x < 20$ , то  $x = 10$  (кг).

*Ответ:* 10.

**518.** Пусть  $x$  г — первоначальная масса сплава. Тогда  $(x - 80)$  г — масса серебра в сплаве,  $\frac{80}{x} \cdot 100\%$  содержание в нём золота. После добавления 100 г чистого золота  $(x + 100)$  г — масса «нового» сплава;  $\frac{80 + 100}{x + 100} \cdot 100\%$  — содержание золота в «новом» сплаве, и это на 20% выше по сравнению с первоначальным.

Составим и решим уравнение:  $\frac{180}{x + 100} \cdot 100 - \frac{80}{x} \cdot 100 = 20$ ;

$$\frac{180 \cdot 5}{x + 100} - \frac{80 \cdot 5}{x} = 1; x(x + 100) \neq 0; 180 \cdot 5x - 80 \cdot 5 \cdot (x + 100) = x(x + 100);$$

$$x^2 + 100x = 900x - 400x - 40000; x^2 - 400x + 40000 = 0; (x - 200)^2 = 0;$$

$$x = 200 \text{ (при } x(x + 100) \neq 0\text{)}.$$

200 г — первоначальная масса сплава, серебра в нём  $200 - 80 = 120$  (г).

*Ответ:* 120.

**519.** Пусть  $x$  элементов продукции было выпущено в 1-ый месяц, выпуск падал на 40%, значит, во 2-ой месяц выпущено 60% от  $x$ , то есть  $0,6x$  элементов; в 3-ий месяц — 60% от  $0,6x$  —  $0,36x$  элементов и т.д. Итак, числа выпускаемых ежемесячных элементов составляют геометрическую прогрессию: 1-ый член  $b_1 = x$ ,  $q = 0,6$ ,  $n = 5$ ,  $b_5 = x \cdot q^4$ ,  $b_5 = 324$ , поэтому  $x \cdot 0,6^4 = 324$ ,  $x = \frac{324}{0,6^4} = 324$ ;  $x = 2500$ ,  $b_1 = 2500$ .

$\frac{b_1(1 - q^5)}{1 - q}$  — сумма пяти первых членов — число элементов, выпущенных

$$\text{за пять месяцев. } \frac{2500 \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5\right)}{1 - 0,6} = 6250 \cdot \left(1 - \frac{243}{3125}\right) =$$

$$= \frac{6250 \cdot 2882}{3125} = 5764.$$

*Ответ:* 5764.

**520.** Приведём схему решения.

1) 100 частей раствора — 6 частей уксуса,  
2) 2 частей раствора —  $x$  частей уксуса,

$$x = \frac{2 \cdot 6}{100}.$$

2) 100 частей раствора — 1 частей уксуса,  
3 частей раствора —  $x$  частей уксуса,

$$x = \frac{3 \cdot 1}{100}.$$

3)  $(2 + 3)$  частей раствора —  $\left(\frac{2 \cdot 6}{100} + \frac{3}{100}\right)$  частей уксуса,

100 частей раствора —  $x$  частей уксуса,

$$x = \frac{100 \cdot \frac{15}{100}}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

*Ответ:* 3.

**521.** Обозначим через  $x$  — стоимость летней коллекции одежды в рублях, через  $y$  — первоначальную прибыль магазина в рублях.

Тогда  $(x + y)$  — первоначальная цена коллекции, а  $0,6(x + y)$  — цена коллекции после снижения. С другой стороны, эту же цену можно определить по формуле  $x + 0,2y$ . Имеем уравнение:  $0,6(x + y) = x + 0,2y$ ;

$$0,4y = 0,4x; \quad \frac{y}{x} \cdot 100\% = 100\%.$$

*Ответ:* 100.

**522.** Пусть  $x$  — размер первоначального тарифа в рублях. Тогда  $1,3x$  — размер тарифа после запланированного увеличения, а  $0,9 \cdot 1,3x$  — размер окончательно утверждённого тарифа. Следовательно, услуги фирмы

подорожали на  $\frac{(0,9x \cdot 1,3x - x)}{x} \cdot 100\% = 17\%$ .

*Ответ:* 17.

**523.** Пусть  $v$  — количество продукции молокозавода,  $c_1, c_2$  — себестоимость продукции и её отпускная цена до повышения цен, а  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$  — те же величины после повышения. Тогда планируемый выпуск продукции —  $1,1v$ , прибыль завода до повышения цен —  $s = v \cdot (c_2 - c_1)$  у.е., а прибыль завода после увеличения выпуска продукции и повышения цен —  $\tilde{s} = 1,1v \cdot (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1)$  у.е. По условию,  $\tilde{c}_2 = 1,15c_2, c_1 = 0,75c_2, \tilde{c}_1 = 1,2c_1 \Rightarrow s = v \cdot (c_2 - 0,75c_2) = 0,25v \cdot c_2, \tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 = 1,15c_2 - 1,2c_1 = 1,15c_2 - 1,2 \cdot 0,75c_2 = 1,15c_2 - 0,9c_2 = 0,25c_2, \tilde{s} = 1,1v \cdot (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1) = 1,1v \cdot 0,25c_2 \Rightarrow \frac{\tilde{s}}{s} = 1,1$ , то есть прибыль завода увеличится на 10%.

*Ответ:* 10.

**524.** Пусть  $v$  — ежемесячный объём продаж услуг,  $c$  — тарифы компании до преобразований, тогда  $vc$  — ежемесячная прибыль компании до преоб-

разований. После преобразований ежемесячный объём продаж услуг равен  $3v$ , тарифы —  $0,5c$ , ежемесячная прибыль —  $3v \cdot 0,5c = 1,5vc$ . Значит дополнительная ежемесячная прибыль компании равна  $1,5vc - vc = 0,5vc$ . Затраты на расширение, равные  $6vc$ , будут компенсированы дополнительной прибылью через  $(6vc) : (0,5vc) = 12$  месяцев.

*Ответ:* 12.

**525.** Пусть в конце года  $a$  рублей стоит золото, а  $b$  рублей стоит серебро, тогда в начале года  $1,2a$  рублей стоит золото, и  $1,05b$  рублей стоит серебро. Зная, что стоимость изделия увеличивается на 15%, составим уравнение:  $1,2a + 1,05b = 1,15(a + b)$ ,  $1,2a - 1,15a = 1,15b - 1,05b$ ,  $0,05a = 0,1b$ ,  $b = 0,5a$ .

Примем за  $x$  г массу золота в изделии, а за  $y$  г массу серебра, тогда  $\frac{a}{x}$  рублей — цена 1 г золота в конце года, а  $\frac{b}{y}$  рублей — цена 1 г серебра в конце года. По условию 1 г золота в 18 раз дороже 1 г серебра, составим уравнение:  $\frac{a}{x} = \frac{18b}{y}$ ,  $\frac{a}{x} = \frac{18 \cdot 0,5a}{y}$ ,  $y = 9x$ . Узнаем, какую часть ювелирного изделия составляет золото:  $\frac{x}{x + 9x} = \frac{1}{10} = 0,1$ .

*Ответ:* 0,1.

**526.** Пусть в сосуде находится 100 г раствора, тогда раствор содержит 10 г спирта и 90 г воды. После того как отлили  $\frac{1}{3}$  содержимого, масса раствора стала  $\frac{200}{3}$  г, причём спирта  $\frac{20}{3}$  г. В раствор долили воды и его масса стала  $100 \cdot \frac{5}{6} = \frac{250}{3}$  (г). Найдём процентное содержание спирта.  $(\frac{20}{3} : \frac{250}{3}) \cdot 100\% = 8\%$ .

*Ответ:* 8.

**527.** Пусть раствор массой 100 кг, содержит  $x$  кг цемента, тогда после того как вылили  $\frac{2}{5}$  раствора, то цемента осталось  $\frac{3}{5}x$  кг. Бетономешалка заполнена на  $\frac{7}{9}$ , значит масса раствора  $\frac{700}{9}$  кг. Она содержит 27% цемента. Составим пропорцию:

$$\frac{\frac{3}{5}x}{\frac{700}{9}} = \frac{27}{100}, \quad x = 35.$$

*Ответ:* 35.

**528.** Переформулируем вопрос: во сколько раз нужно увеличивать ВВП в каждый следующий год?

$$x_0 \cdot k = x_1 \text{ (через год)}$$

$$x_1 \cdot k = x_2 \text{ (через два года)}$$

$$x_2 = x_0 \cdot k^2.$$

По условию  $\frac{x_2}{x_0} = 2$ , то есть  $k^2 = 2$ .  $k = \sqrt{2} \approx 1,4142\dots$  Это равносильно увеличению каждый год примерно на 41%

*Ответ:* 41.

**529.** Ясно, что максимальную сумму, которую Василий Петрович может взять у банка, нужно вычислять в предположении, что в конце каждого года он будет выплачивать именно по 90000 руб. (а не меньше). Пусть  $s$  — величина этой суммы; при этом, чтобы не писать лишней раз нули, за единицу измерения примем 1000 руб. Тогда в конце года, долг Василия Петровича банку, после погашения им 90 тыс. руб. долга, составит  $1,2 \cdot s - 90$ . Ещё через год он должен выплатить банку  $1,2 \cdot (1,2 \cdot s - 90)$ , что, согласно нашему предположению, составляет 90 тыс. руб. Решим полученное уравнение:  $1,2 \cdot (1,2 \cdot s - 90) = 90$ ,  $1,44 \cdot s - 108 = 90$ ,  $s = \frac{19800}{144} = \frac{2200}{16} = \frac{275}{2} = 137,5$ . Таким образом, максимальная сумма, которую Василий Петрович может взять у банка, равна 137500 руб.

*Ответ:* 137500.

**530.** Пусть банк выплачивает  $p \cdot 100\%$  годовых. Тогда через год, после пополнения Марией Павловной своего счёта на 30 тыс. руб., сумма на её счёте будет составлять  $(1 + p) \cdot 20 + 30$  тыс. руб. Ещё через год, после начисления банком процентов, эта сумма возрастёт до  $(1 + p) \cdot ((1 + p) \cdot 20 + 30)$  тыс. руб., что, по условию, составляет 60,95 тыс. руб. Решим полученное уравнение:  $(1 + p)^2 \cdot 20 + (1 + p) \cdot 30 = 60,95$ ,  $20p^2 + 70p - 10,95 = 0$ ,  $D = 70^2 + 4 \cdot 20 \cdot 10,95 = 5776 = 76^2$ , так как по смыслу задачи  $p > 0$ , то  $p = \frac{-70 + 76}{40} = 0,15$ . Таким образом, по виду вклада, открытого Марией

Павловной, банк выплачивает 15% годовых.

*Ответ:* 15.

**531.** Пусть  $p$  — количество примесей в руде до её обогащения. Тогда после первого этапа, количество примесей составит  $(1 - 0,2)p = 0,8p$ . После второго этапа эта величина уменьшится до  $0,85 \cdot 0,8p = 0,68p$ , а после третьего, количество примесей будет составлять  $0,9 \cdot 0,68p = 0,612p$ .

Таким образом, количество примесей уменьшится на  $0,388p$ , что составляет  $\frac{0,388p}{p} \cdot 100\% = 38,8\%$  от величины  $p$ .

*Ответ:* 38,8.

**532.** Пусть  $S$  — стоимость перевозки единицы груза до увеличения расценок, а  $v$  — объём почты, перевозимой фирмой прежде. Тогда прежние затраты фирмы на перевозку равны  $S \cdot v$ . После двух подорожаний, на 20% в первый раз и на 10% во второй, стоимость перевозки единицы груза будет составлять  $1,1 \cdot 1,2S = 1,32S$ . А объём перевозимой фирмой почты, увеличившийся на 30%, будет равен  $1,3v$ . Следовательно, увеличившиеся расходы фирмы равны  $1,32S \cdot 1,3v = 1,716S \cdot v$ . Таким образом, расходы фирмы возрастут на  $0,716S \cdot v$ , что составляет  $\frac{0,716S \cdot v}{S \cdot v} \cdot 100\% = 71,6\%$  от их прежней величины.

*Ответ:* 71,6.

**533.** Пусть банок с вишнёвым компотом —  $x$  штук, тогда с абрикосовым —  $1,1x$ . Пусть с абрикосовым компотом закупорено  $y$  трёхлитровых банок и  $(1,1x - y)$  — литровых, тогда с вишнёвым компотом —  $1,25y$  трёхлитровых и  $0,85(1,1x - y)$  литровых. Всего с вишнёвым компотом  $(1,25y + 0,85(1,1x - y))$  банок. Получаем уравнение:  
 $1,25y + 0,85(1,1x - y) = x$ ;  $1,25y + 0,935x - 0,85y = x$ ;  $0,4y = 0,065x$ ;  
 $y = 0,1625x$ ;  $y = (0,1625 : 1,1) \cdot (1,1x)$ .  
 $y \approx 0,15 \cdot (1,1x)$ , то есть трёхлитровые банки составляют 15% от всех закупоренных с абрикосовым компотом.

*Ответ:* 15.

**534.** Пусть книг по физике —  $x$  штук, тогда по математике —  $1,2x$ . Пусть по математике выпущено  $y$  книг для девятого класса и  $(1,2x - y)$  — для одиннадцатого, тогда по физике —  $1,1y$  книг для девятого класса и  $0,75(1,2x - y)$  для одиннадцатого. Всего по физике  $(1,1y + 0,75(1,2x - y))$  книг.

Получаем уравнение:  $1,1y + 0,75(1,2x - y) = x$ ;  $1,1y + 0,9x - 0,75y = x$ ;  
 $0,35y = 0,1x$ ;  $x = 3,5y$ .

$\frac{1,1y}{x} \cdot 100\% \approx 0,31 \cdot x$ , то есть книги для девятого класса составляют 31% от всех выпущенных по физике.

*Ответ:* 31.

**535.** Пусть к 20 кг первого сплава добавили  $y$  кг второго сплава. Тогда в получившемся сплаве содержится  $0,4 \cdot 20 + 0,2 \cdot y$  кг серебра. Если серебро составляет 30% от общей массы в  $20 + y$  кг получившегося сплава, то справедливо соотношение  $0,4 \cdot 20 + 0,2 \cdot y = 0,3(20 + y)$ ,  $8 + 0,2y = 6 + 0,3y$ ,  $0,1y = 2 \Rightarrow y = 20$ .

*Ответ:* 20.

**536.** Пусть  $x$  — количество процентов цинка в первом и втором сплавах. Тогда после того как сплавляли 150 кг первого сплава и 150 кг второго сплава, в получившемся сплаве содержится  $\frac{x}{100} \cdot 150 + \frac{x}{100} \cdot 250$  кг цинка, что составляет 30% от общей массы 300 кг получившегося сплава. Значит,  $\frac{x}{100} \cdot 150 + \frac{x}{100} \cdot 250 = 0,3 \cdot 400$ ,  $4x = 120 \Rightarrow x = 30$ . Поскольку процентное содержание цинка в I и II сплаве одинаково, оно не изменится и после соединения этих сплавов, взятых равными по массе. Поэтому 30% цинка было и в I и во II сплавах первоначально. Значит, во втором сплаве содержалось  $100 - 26 - 30 = 44\%$  олова. Таким образом, 150 кг первого сплава содержали  $0,4 \cdot 150 = 60$  кг олова, а 250 кг второго сплава содержали  $0,44 \cdot 250 = 110$  кг олова. Значит, получившийся сплав содержит  $60 + 110 = 170$  кг олова.

*Ответ:* 170.

**537.** Пусть  $x$  — количество процентов песка во втором растворе, тогда  $2x$  — количество процентов песка в первом растворе. После того как смешали 300 кг первого раствора и 400 кг второго раствора, в получившемся растворе содержится  $\frac{2x}{100} \cdot 300 + \frac{x}{100} \cdot 400$  кг песка, что составляет 30% от общей массы 700 кг получившегося раствора. Значит,  $\frac{2x}{100} \cdot 300 + \frac{x}{100} \cdot 400 = 0,3 \cdot 700$ ,  $10x = 210 \Rightarrow x = 21$ . Поэтому в первом растворе содержалось  $100 - 10 - 42 = 48\%$  песка. Таким образом, 300 кг первого раствора содержали  $0,48 \cdot 300 = 144$  кг цемента, а 400 кг второго сплава содержали  $0,4 \cdot 400 = 160$  кг цемента. Значит, получившийся сплав содержит  $144 + 160 = 304$  кг цемента.

*Ответ:* 304.

**538.** Пусть в первой канистре  $x$  кг раствора, а во второй  $y$  кг. Тогда  $\frac{0,5(0,05x + 0,1y)}{0,5(x + y)} = 0,07$ ;  $0,05x + 0,1y = 0,07(x + y)$ ;  $0,02x = 0,03y$ ;  
 $x : y = 3 : 2$ .

*Ответ:* 1,5.

**539.** Пусть в первой колбе  $x$  кг раствора, а во второй  $y$  кг. Тогда  $\frac{0,5(0,01x + 0,05y)}{0,5(x + y)} = 0,02$ ;  $0,01x + 0,05y = 0,02(x + y)$ ;  $0,01x = 0,03y$ ;  
 $x : y = 3 : 1$ .

*Ответ:* 3.

**540.** Пусть стоимость старой упаковки равна  $x$ , а стоимость сока —  $y$ , тогда стоимость пакета сока в этом году —  $(x + y)$ . По условию стоимость новой упаковки —  $1,15x$ , а стоимость пакета сока в следующем году —  $1,05(x + y)$ . Решим уравнение:  $1,15x + y = 1,05(x + y)$ ,  $0,1x = 0,05y$ ,  
 $y = 2x$ ,  $\frac{x}{x + y} = \frac{x}{x + 2x} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3} \cdot 100\% = 33,3\%$ . Округляя до целого числа, получаем, что в этом году стоимость упаковки составляла 33% от стоимости пакета сока.

*Ответ:* 33.

**541.** Пусть стоимость струн из нейлона равна  $x$ , а стоимость гитары без струн —  $y$ , тогда стоимость всей гитары —  $(x + y)$ . По условию стоимость металлических струн —  $1,5x$ , а стоимость всей гитары после замены струн —  $1,01(x + y)$ . Решим уравнение:  $1,5x + y = 1,01(x + y)$ ,  
 $0,49x = 0,01y$ ,  $y = 49x$ ,  $\frac{x}{x + y} = \frac{x}{x + 49x} = 0,02$ . Получаем, что стоимость струн из нейлона составляла 2% от стоимости всей гитары.

*Ответ:* 2.

**542.** План решения: 1. Найдём количество тонн «чистого металла» (металла без примесей), содержащейся в 15 т металла. 2. Найдём процентное содержание «чистого металла» в руде. 3. Из пропорции определим количество тонн руды, необходимое для выплавки 15 т металла.

1. Так как металл содержит 4% примесей, то «чистого металла» в нём содержится 96%. Поэтому в 15 т металла содержится  $15 \cdot 0,96 = 14,4$  (т) «чистого металла». 2. Так как в руде содержится 40% примесей, то «чистого металла» в ней содержится 60%. 3. Таким образом, для того чтобы выплавить из руды 15 т металла, в руде должно содержаться 14,4 т «чистого металла», что составляет 60%. Следовательно, 100% будет составлять

$$14,4 \cdot \frac{100}{60} = 24 \text{ (т) руды.}$$

Ответ: 24.

**543.** Обозначим через  $x$  и  $y$  процентное содержание хрома соответственно в первом и втором куске чугуна, через  $P$  вес каждого из кусков чугуна.

Тогда в первом куске чугуна содержалось  $P \cdot \frac{x}{100}$  кг хрома, а во втором —

$P \cdot \frac{y}{100}$  кг хрома. Так как в полученном сплаве оказалось 12 кг хрома, то

выполняется равенство  $P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 12$ . Если бы первый кусок чу-

гуна весил  $2P$  кг, то в сплаве содержалось бы  $2P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100}$  кг хрома,

что, по условию, равняется 16 кг. Учитывая также, что содержание хрома в первом куске чугуна было на 5% меньше чем во втором, получаем систе-

му уравнений 
$$\begin{cases} P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 12, \\ 2P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 16, \\ y - x = 5. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе и, воспользовавшись третьим уравнением, в полученное равенство подставим  $y = x + 5$ . В результате таких действий будем иметь:

$$\frac{x + (x + 5)}{2x + (x + 5)} = \frac{12}{16}, \quad \frac{2x + 5}{3x + 5} = \frac{3}{4},$$

$4(2x + 5) = 3(3x + 5)$ ,  $x = 5$ . Значит,  $y = 10$ . Значение  $P$  найдём из первого

уравнения системы:  $P \cdot \frac{5}{100} + P \cdot \frac{10}{100} = 12 \Rightarrow P = \frac{12 \cdot 100}{15} = 80$ . Итак,

полученный из двух одинаковых по весу кусков чугуна сплав весит 160 кг и содержит 12 кг хрома. Следовательно, процентное содержание хрома в

таком сплаве равно  $\frac{12}{160} \cdot 100 = 7,5\%$ .

Ответ: 7,5.

**544.** План решения: 1. Обозначим через  $x$  и  $y$  процентное содержание золота соответственно в первом и втором слитке, через  $P$  количество килограмм каждого из слитков при сплавлении. Составим систему уравнений относительно параметров  $x, y, P$  и решим её. 2. Зная  $P$ , ответим на вопрос задачи.

1. Пусть сплавляли два слитка по  $P$  кг, в первом из которых содержится  $x\%$  золота, а во втором —  $y\%$  золота. Тогда в первом слитке содержалось  $P \cdot \frac{x}{100}$  кг золота, а во втором —  $P \cdot \frac{y}{100}$  кг золота. Так как в полученном сплаве оказалось 3 кг золота, то выполняется равенство  $P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 3$ . Если бы второй слиток весил  $2P$  кг, то в сплаве содер-

жалось бы  $P \cdot \frac{100-x}{100} + 2P \cdot \frac{100-y}{100}$  кг серебра, что по условию равняется 11 кг. Таким образом, учитывая также, что содержание золота в первом слитке было на 20% больше чем во втором, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 3, \\ P \cdot \frac{100-x}{100} + 2P \cdot \frac{100-y}{100} = 11, \\ x - y = 20. \end{cases} \quad \text{Выразим из последнего уравнения}$$

системы  $x$  через  $y$ :  $x = y + 20$ , подставим его в первые два и разделим первое уравнение системы на второе. В результате таких действий полу-

чим равенство 
$$\frac{\frac{P}{100} \cdot (y + 20 + y)}{\frac{P}{100} \cdot (100 - y - 20 + 2(100 - y))} = \frac{3}{11} \cdot \frac{2y + 20}{280 - 3y} = \frac{3}{11} \Rightarrow$$

$11(2y + 20) = 3(280 - 3y) \Rightarrow y = 20$ . Значит,  $x = 40$ . Значение  $P$  найдём из первого уравнения системы  $P \cdot \frac{40}{100} + P \cdot \frac{20}{100} = 3 \Rightarrow P = \frac{3 \cdot 100}{60} = 5$ .

2. Итак, полученный из двух одинаковых по весу, равному 5 кг, слитков сплав весит 10 кг и содержит 3 кг золота. Остальную часть сплава составляет серебро, которого в сплаве содержится  $10 - 3 = 7$  кг.

*Ответ:* 7.

**545.** Концентрация 1-го раствора:

$$\frac{1056}{1056 + 44} \cdot 100\% = \frac{1056}{1100} \cdot 100\% = \frac{1056}{11}\% = 96\%.$$

Концентрация 2-го раствора:

$$\frac{756}{756 + 1344} \cdot 100\% = \frac{756}{2100} \cdot 100\% = \frac{756}{21}\% = 36\%.$$

Нужно взять:

$x$  г первого раствора,  
 $(1500 - x)$  г второго раствора.

Кислоты:

В первом растворе —  $\frac{96 \cdot x}{100}$  г.

Во втором растворе —  $\frac{36(1500 - x)}{100}$  г.

В третьем растворе —  $\frac{40 \cdot 1500}{100}$  г.

Уравнение:

$$\frac{96x}{100} + \frac{36(1500 - x)}{100} = \frac{40 \cdot 1500}{100}, \quad 96x + 36(1500 - x) = 40 \cdot 1500,$$

$$8x + 3(1500 - x) = 5000, \quad 5x = 500, \quad x = 100.$$

Ответ: 100.

546. Золота в третьем сплаве  $600 \cdot \frac{85}{100}$  г.

	1 слиток	2 слиток
нужно взять	$x$ г	$(600 - x)$ г
золота	$x \cdot \frac{92}{100}$ г	$(600 - x) \cdot \frac{80}{100}$ г

$$x \cdot \frac{92}{100} + (600 - x) \cdot \frac{80}{100} = 600 \cdot \frac{85}{100}.$$

Ответ: 250.

547. Пусть  $x$  рублей — закупочная цена коллекции, тогда  $0,8 \cdot x \cdot 0,75 = 0,6x$  рублей — прибыль после продажи  $0,75$  всей коллекции. Осталось продать  $0,25$  всей коллекции по цене  $1,8x \cdot 0,4$ , тогда прибыль от продажи  $0,25x \cdot (0,72 - 1) = -0,07x$  (фактически убыток). Общая прибыль  $0,6x - 0,07x = 0,53x$ , что составляет 53% от закупочной цены.

Ответ: 53.

548. Пусть  $x$  — закупочная цена коллекции, тогда  $2,4x$  — цена, по которой салон выставил коллекцию на продажу. Примем все элементы коллекции за единицу. После продажи  $0,85$  всей коллекции выручка салона составила  $2,4x \cdot 0,85 = 2,04x$ , а прибыль  $2,04x - 0,85x = 1,19x$ . Осталось продать  $1 - 0,85 = 0,15$  коллекции. Пусть  $k\%$  составила скидка, тогда  $2,4x \cdot (1 - 0,01k) \cdot 0,15$  — выручка салона от продажи  $0,15$  всей коллекции, а прибыль

$2,4x \cdot (1 - 0,01k) \cdot 0,15 - 0,15x = 0,21x - 0,0036xk$ . По условию задачи

прибыль от продажи всей коллекции составила  $1,13x$ . Составим уравнение  $1,19x + 0,21x - 0,0036xk = 1,13x; k = 75$ .

*Ответ:* 75.

**549.** Пусть  $x$  — закупочная цена портсигара, а  $y$  — статуэтки, тогда

$$1,35x + 1,6y = 1,4(x + y), \frac{x}{y} = 4.$$

*Ответ:* 4.

**550.** Пусть  $x$  — количество шоколада, выпущенного в прошлом году, тогда в новом году шоколада будет  $0,25x \cdot 1,1 + 0,4x + 0,35x \cdot 1,2 = 1,095x$ , значит выпуск шоколада увеличился на  $\frac{1,095x - x}{x} \cdot 100\% = 9,5\%$ .

*Ответ:* 9,5.

**551.** Пусть  $x$  — первоначальное число безработных. Тогда к концу второго года их количество снизилось на  $0,6x$ . Обозначим через  $y\%$  снижение безработицы за первый год, тогда  $(x - 0,01xy)$  — осталось безработных к концу первого года. К концу второго года их снизилось на

$$(x - 0,01xy) \cdot \frac{2,5y}{100}, \frac{xy}{100} + \frac{xy}{40} \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right)$$

года, что по условию задачи составляет  $0,6x$ .  $\frac{y}{100} + \frac{y}{40} - \frac{y^2}{4000} = 0,6$ ,  $y^2 - 140y + 2400 = 0$ ,  $y_1 = 120$ ,  $y_2 = 20$ . Условию задачи удовлетворяет только  $y = 20$ .

*Ответ:* 20.

**552.** Пусть  $1$  — первоначальный размер пенсии.  $x\%$  — первое повышение,  $1,5x\%$  — второе повышение. Из условия следует:

$$1 + 0,01x + (1 + 0,01x) \cdot 0,015x = 1,56; 3x^2 + 500x - 11200 = 0; x_1 = 20, x_2 < 0$$

— не удовлетворяет условию.

*Ответ:* 20.

**553.** Пусть  $p$  — производительность,  $t$  — продолжительность одного квартала,  $pt$  — выпущенная продукция за один квартал.  $2pt$  за I и II квартал, за III и IV квартал  $3pt$ . Всего  $5pt$ . Предприятие выпустило продукции больше на  $0,5pt$ , если бы работали по новому со второго квартала, что составляет

$$\frac{0,5pt}{5pt} = \frac{1}{10} = 10\%.$$

*Ответ:* 10.

**554.** Пусть  $p$  — производительность,  $t$  — продолжительность одного квартала,  $pt$  — выпущенная продукция за один квартал.  $2pt$  за I и II квар-

тал, после повышения производительности 1,5р. За III и IV квартал продукция 3pt. Всего продукции 5pt. Предприятие выпустило бы продукции больше на pt, что составляет  $\frac{pt}{5pt} = \frac{1}{5} = 20\%$ .

*Ответ:* 20.

**555.** Пусть  $x$  — искомое количество воды, тогда концентрация кислоты после первого переливания  $\frac{20-x}{20}$ , а после второго  $\frac{(20-x)^2}{400} = 0,36$ .

Отсюда  $x_1 = 8$ ,  $x_2 = 32$ , но  $x < 20 \Rightarrow x = 8$ .

*Ответ:* 8.

**556.** Пусть  $x$  — искомое количество воды, тогда концентрация масла после первого переливания равна  $\frac{10-x}{10}$ , а после второго  $\left(\frac{10-x}{10}\right)^2$ , но она равна 0,81, следовательно  $\frac{(10-x)^2}{100} = \frac{81}{100}$ . Решив, получим  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 19$ , но  $x < 10 \Rightarrow x = 1$ .

*Ответ:* 1.

**557.** 1.  $\frac{12}{100} \cdot 45 = 5,4$  (г) — меди в 12 кг сплава.

2.  $\frac{5,4}{40} \cdot 100 = 13,5$  (г) — вес нового сплава.

3.  $13,5 - 12 = 1,5$  г — олова надо добавить.

*Ответ:* 1,5.

**558.** Пусть  $x$  — стоимость пакета акций первого июля, а  $y$  — 30 сентября, тогда  $\frac{x+y}{2} = 1,25x$ ;  $y = 1,5x$ ;  $\frac{1,5x - 1,25x}{1,25x} = 0,2$ .

*Ответ:* 20.

**559.** Пусть  $x$  — цена товара без наценки, тогда  $0,6 \cdot 1,45x + 0,4 \cdot 1,45x \cdot 0,6 = 1,218x$ . Значит, прибыль магазина  $1,218x - x = 0,218x$ .

*Ответ:* 21,8.

**560.** Обозначим за  $x$  количество капустницы, а за  $y$  — колорадского жука. После обработки насекомых стало  $0,8x$  и  $0,6y$ . Всего  $0,75(x+y)$ . Решая уравнение  $0,75(x+y) = 0,8x + 0,6y$  получим  $y = \frac{x}{3}$ . Искомая величина:

$$\frac{x}{x+y} \cdot 100\% = \frac{x}{\frac{4}{3}x} \cdot 100\% = 75\%.$$

*Ответ:* 75.

**561.** Пусть  $x$  — средний ежегодный процент роста населения. Из условия задачи получаем квадратное уравнение  $20000 + 200x + 0,01x(20000 + 200x) = 22050$ ;  $x^2 + 200x - 1025 = 0$ . Его корни:  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -205$ . По смыслу задачи  $x$  — положительное число, то есть  $x = 5$ .

*Ответ:* 5.

**562.** Введём в рассмотрение арифметическую прогрессию, 1-ый член которой  $a_1 = 720$ ,  $d = -40$ ,  $n$  — число дней путешествия. Длина пройденного пути —  $S_n = 5040$  км. Сумма  $n$  первых членов введённой прогрессии:  $\frac{2 \cdot 720 - 40(n-1)}{2} \cdot n = 5040$ . Решение уравнения:

$$(720 - 20(n-1)) \cdot n = 5040;$$

$$720n - 20n^2 + 20n - 5040 = 0; n^2 - 37n + 252 = 0;$$

$$D = 37^2 - 4 \cdot 252 = 361; n_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{361}}{2}; n_{1,2} = \frac{37 \pm 19}{2}; n_1 = 9;$$

$n_2 = 28$  (не удовлетворяет смыслу задачи).

9 дней путешествовал автотурист.

*Ответ:* 9.

**563.** Рассмотрим движение мотоциклиста на участке от шлагбаума до места назначения: длина его  $90 - 54 = 36$  (км); если плановая скорость  $x$  км/ч, то время движения  $\frac{36}{x}$  ч. Из-за остановки в течение

5 мин. =  $\frac{1}{12}$  ч, мотоциклист поехал со скоростью  $(x+6)$  км/ч и 36 км про-

ехал за  $\frac{36}{x+6}$  ч. По условию задачи он прибыл в намеченное время, зна-

чит:  $\frac{36}{x+6} + \frac{1}{12} = \frac{36}{x}$ . Решение уравнения: умножив его на левую часть

неравенства  $12x(x+6) \neq 0$ , получим

$$36 \cdot 12x + x(x+6) = 36 \cdot 12(x+6); x^2 + 6x = 36 \cdot 12 \cdot 6; x^2 + 6x - 2592 = 0;$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 2592}; x_1 = -54; x_2 = 48.$$

Оба числа удовлетворяют условию  $x(x+6) \neq 0$ ,  $x = -54$  не удовлетворяет смыслу задачи.

48 км/ч — первоначальная скорость мотоцикла.

*Ответ:* 48.

**564.** Пусть  $t$  — искомое время до момента встречи,  $C$  — точка встречи автомобилей, а  $v_1, v_2$  — скорость 1-ого и 2-ого автомобилей соответствен-

но. Тогда 1-ый автомобиль преодолел расстояние от  $A$  до  $C$  (обозначим его  $AC$ ) за  $t$  часов, а расстояние от  $C$  до  $B$  (обозначим его  $BC$ ) за  $15 - t$  часов, то есть  $v_1 \cdot t = AC$ ,  $v_1 \cdot (15 - t) = BC$ . Аналогично для 2-ого автомобиля имеем:  $v_2 \cdot t = BC$ ,  $v_2 \cdot 4 = AC$ . Следовательно,  $v_1, v_2, t$  удовлетворяют системе: 
$$\begin{cases} v_1 \cdot t = v_2 \cdot 4, \\ v_2 \cdot t = v_1 \cdot (15 - t). \end{cases}$$

Перемножая левые и правые части этих уравнений и сокращая на  $v_1 \cdot v_2$ , получаем,  $t^2 = (15 - t) \cdot 4$ ,  $t^2 + 4t - 60 = 0$ ,  $t_1 = -10$ ,  $t_2 = 6$ . Отрицательное значение  $t$  не удовлетворяет смыслу задачи, поэтому  $t = 6$ .

*Ответ:* 6.

**565.** Пусть  $t$  — искомое время, прошедшее от начала движения до момента встречи пешехода и велосипедиста, измеряемое в часах,  $C$  — точка их встречи,  $v_1$  — скорость велосипедиста,  $v_2$  — скорость пешехода. По условию, велосипедист прибыл в пункт  $B$  через 45 минут, что составляет  $\frac{3}{4}$  часа, следовательно, на дорогу от  $C$  до  $B$  он затратил  $\frac{3}{4} - t$  часа. Име-

ем:  $AC = v_1 \cdot t$ ,  $BC = v_1 \cdot \left(\frac{3}{4} - t\right)$ . С другой стороны, записав условие задачи для пешехода, получим:  $BC = v_2 \cdot t$ ,  $AC = v_2 \cdot 1$ . Значит,  $v_1, v_2, t$  удовлетворяют системе: 
$$\begin{cases} v_1 \cdot \left(\frac{3}{4} - t\right) = v_2 \cdot t, \\ v_2 = v_1 \cdot t. \end{cases}$$

Перемножая левые и правые части этих уравнений и сокращая на  $v_1 \cdot v_2$ , получим:  $\frac{3}{4} - t = t^2$ ,  $4t^2 + 4t - 3 = 0$ ,  $t_1 = -\frac{3}{2}$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$ . Отрицательное значение  $t$  не удовлетворяет смыслу задачи, поэтому  $t = \frac{1}{2}$  часа, что составляет 30 минут.

*Ответ:* 30.

**566.** Пусть  $t$  — время (в сек), прошедшее от момента поворота 1-ого спортсмена до момента встречи со 2-ым спортсменом. Тогда  $2(t + 16)$  сек — искомое время, затраченное 1-ым спортсменом. Обозначим через  $v_1, v_2$  скорости 1-ого и 2-ого спортсменов, через  $A$  точку старта спортсменов, а через  $B$  и  $C$  — второй конец бассейна и точку их встречи. Тогда из условий задачи имеем:  $v_1 \cdot t = BC$ ,  $v_1 \cdot 16 = AC$ ;  $v_2 \cdot t = AC$ ,  $v_2 \cdot (40 - t) = BC$ . Следовательно,  $v_1, v_2, t$  удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} v_1 \cdot t = v_2 \cdot (40 - t), \\ v_2 \cdot t = v_1 \cdot 16. \end{cases}$$

Перемножив эти уравнения и сократив на  $v_1 \cdot v_2$ , получим:  $t^2 = (40 - t) \cdot 16$ ,  
 $t^2 + 16t - 640 = 0$ ,  $D = 16^2 \cdot 11$ ,  $t_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{11}}{2}$ . По смыслу задачи

$$t > 0. t = \frac{-16 + 16\sqrt{11}}{2} = \frac{16 \cdot (\sqrt{11} - 1)}{2}.$$

Общее время, затраченное 1-м спортсменом составляет:  $2 \cdot (\sqrt{11} + 1)$  сек  
 или  $\frac{16 \cdot (\sqrt{11} + 1)}{60}$  мин.

$$\text{Ответ: } \frac{4(\sqrt{11} + 1)}{15}.$$

**567.** Пусть  $v$  км/ч – собственная скорость катера. Тогда против течения он плыл со скоростью  $(v - 5)$  км/ч, а по течению – со скоростью  $(v + 5)$  км/ч. На путь против течения катер затратил  $\frac{10}{v - 5}$  ч, а на путь по течению –  $\frac{45}{v + 5}$  ч. Имеем уравнение:  $\frac{10}{v - 5} + \frac{45}{v + 5} = 2$ . Решим его.

$$\frac{10}{v - 5} + \frac{45}{v + 5} = 2 \Leftrightarrow 10(v + 5) + 45(v - 5) = 2(v^2 - 25) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2v^2 - 55v + 125 = 0, v_1 = \frac{5}{2}, v_2 = 25.$$

$v_1$  не удовлетворяет условию задачи, так как с такой скоростью катер не может двигаться против течения реки. Значит,  $v = 25$  км/ч.

*Ответ:* 25.

**568.** Ученик бежал  $20 \cdot \frac{2}{60} = \frac{2}{3}$  (км). Пусть  $x$  — расстояние, которое он должен был перед этим тоже пробежать, а не пройти, чтобы успеть. Так как он это расстояние проходил со скоростью 5 км/ч и поэтому опоздал на минуту, то  $\frac{x}{5} - \frac{x}{20} = \frac{1}{60}$ , откуда  $x = \frac{1}{9}$ . Все расстояние, которое ему следовало пробежать, составляет  $\frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$ . Разделив  $\frac{7}{9}$  на скорость 20,

получим  $\frac{7}{180}$  часа или 140 секунд.

*Ответ:* 140.

**569.** Чтобы прийти на 5 минут раньше, студенту нужно компенсировать это время, значит он должен пройти со скоростью 6 км/ч расстояние, которое он прошёл бы со скоростью 2 км/ч за 5 минут без потери време-

ни. Так как  $\frac{6 \text{ км/ч}}{2 \text{ км/ч}} = 3$ , то 5 минут — это  $\frac{2}{3}$  времени, затраченного на компенсацию, следовательно полное время компенсации равно 7,5 минут.  $7,5 + 5 = 12,5$ .

*Ответ:* 12,5.

**570.** Пусть  $x$  — скорость пешехода, а  $y$  — расстояние между автобусами, тогда пусть в какой-то момент автобус поравнялся с пешеходом. В этот момент расстояние от следующего автобуса до пешехода равно  $y$ . Скорость, с которой следующий автобус догоняет пешехода, равна  $10x - x = 9x$ .

Таким образом,  $\frac{y}{9x} = 10$  минут. Мимо неподвижной точки автобусы проезжают с интервалом  $\frac{y}{10x} = \frac{9}{10} \cdot \frac{y}{9x} = 9$  минут.

*Ответ:* 9.

**571.** Для разгрузки баржи имеется три крана. Первому крану для разгрузки всей баржи требуется времени в четыре раза меньше, чем второму, и на 9 ч больше, чем третьему. Три крана, работая вместе, разгрузили бы баржу за 18 ч, но по условиям эксплуатации одновременно могут работать только два крана. Определите наименьшее время (в часах) необходимое для разгрузки баржи. (Производительность каждого крана постоянна в течение всей работы).

*Решение.* Обозначим всю работу за 1. Требуется для выполнения всей работы: 1-му крану —  $x$  часов; 2-му крану —  $4x$  часов; 3-му крану —  $(x - 9)$  часов.

Производительность: 1-го крана —  $\frac{1}{x}$  всей работы в час; 2-го крана —  $\frac{1}{4x}$  всей работы в час; 3-го крана —  $\frac{1}{x - 9}$  всей работы в час;

Производительность трёх кранов вместе (при их совместной работе):

$$\left( \frac{1}{x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{x - 9} \right) \text{ всей работы в час.}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{x - 9} = \frac{4(x - 9) + (x - 9) + 4x}{4x(x - 9)} = \frac{9x - 45}{4x(x - 9)}.$$

Всю работу три крана выполнили бы (при совместной работе) за 1 :  $\frac{9x - 45}{4x(x - 9)} = \frac{4x(x - 9)}{9(x - 5)}$  часов. Но по условию за 18 часов.

$$\begin{aligned} \frac{4x(x-9)}{9(x-5)} &= 18, \quad 4x(x-9) = 9 \cdot 18 \cdot (x-5), \\ 2x(x-9) &= 81(x-5), \\ 2x^2 - 18x - 81x + 81 \cdot 5 &= 0, \quad 2x^2 - 99x + 81 \cdot 5 = 0. \\ x_{1,2} &= \frac{99 \pm \sqrt{99^2 - 4 \cdot 2 \cdot 81 \cdot 5}}{4} = \frac{99 \pm \sqrt{9^2(11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5)}}{4} = \\ &= \frac{99 \pm 9\sqrt{121 - 40}}{4} = \frac{99 \pm 9 \cdot 9}{4}. \quad x_1 = \frac{180}{4} = 45, \quad x_2 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

$x_2 = \frac{9}{2}$  не удовлетворяет условию задачи, так как не может один кран выполнить всю работу быстрее, чем три крана вместе. Так что  $x = 45$  часов. Понятно, что 1-й и 3-й краны работают быстрее, чем 2-й. Следовательно, их совместная разгрузка и определяют наименьшее время для разгрузки баржи.

Для выполнения всей работы требуется: 1-му крану — 45 часов, 2-му крану — 36 часов. Производительность: 1-го крана —  $\frac{1}{45}$ , 2-го крана —  $\frac{1}{36}$ . Совместная производительность 1-го и 3-го крана:  $\frac{1}{45} + \frac{1}{36} = \frac{4+5}{180} = \frac{9}{180} = \frac{1}{20}$ . Всю работу 1-й и 3-й краны при совместной работе выполняют за  $1 : \frac{1}{20} = 20$  часов.

*Ответ:* 20.

**572.** Примем объём всей работы за 1. При совместном действии задание выполняется за 30 ч, значит, за 1 ч —  $\frac{1}{30}$  часть всей работы, за 6 ч —  $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$  её. После 6 ч совместной работы осталось выполнить  $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$  задания, что выполнил 2-ой механизм за 40 ч. Отсюда его производительность  $\frac{4}{5} : 40 = \frac{1}{50}$  всей работы в час, а 1-го механизма —  $\frac{1}{30} - \frac{1}{50} = \frac{1}{75}$  всей работы.

На выполнение всего задания 1-му потребовалось бы  $1 : \frac{1}{75} = 75$  часов.

*Ответ:* 75.

**573.** Примем длину тоннеля за 1. Если 1-ый «крот» прорыл бы весь тоннель самостоятельно за  $x$  дней, то его производительность  $\frac{1}{x}$  длины в день; при совместной работе —  $\frac{1}{27}$  длины в день; 2-го «крота» —  $\left(\frac{1}{27} - \frac{1}{x}\right)$  длины в день. Одновременно два «крота» рыли  $\frac{1}{3} : \frac{1}{x} = \frac{x}{3}$  дней. За эти дни 1-ый «крот» вырыл  $\frac{1}{3}$  длины, 2-ой —  $\left(\frac{1}{27} - \frac{1}{x}\right)\frac{x}{3}$  длины, всего  $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{x}\right)\frac{x}{3} = \frac{x}{81}$  длины тоннеля. Оставшуюся часть длины тоннеля  $\left(1 - \frac{x}{81}\right)$  1-ый «крот» вырыл за 8 дней при  $\frac{1}{x}$  длины в день, то есть  $\frac{8}{x}$  длины. Уравнение:  $1 - \frac{x}{81} = \frac{8}{x}, x > 0; 81x - x^2 = 8 \cdot 81; x^2 - 81x + 648 = 0;$   
 $D = 81^2 - 4 \cdot 648 = 6561 - 2592 = 3969; x_{1,2} = \frac{81 \pm 63}{2}; x_1 = 9; x_2 = 72.$   
 Оба числа удовлетворяют условию  $x > 0$ . Смыслу задачи удовлетворяет  $x = 72$ .

За 72 дня 1-ый «крот» прорыл бы весь тоннель.

*Ответ:* 72.

**574.** Если  $x$  деталей в час — производительность опытного рабочего, то молодого —  $(x - 5)$ . 40 деталей опытный рабочий изготавливает за  $\frac{40}{x}$  ч, а молодой — 30 деталей за  $\frac{30}{x - 5}$  ч, что по условию задачи на 2 ч дольше. Уравнение:  $\frac{30}{x - 5} - \frac{40}{x} = 2, x(x - 5) \neq 0 \frac{15}{x - 5} - \frac{20}{x} = 1;$   
 $15x - 20(x - 5) = x(x - 5); x^2 - 5x = 15x - 20x + 100; x^2 = 100; x_1 = -10, x_2 = 10.$  Оба числа удовлетворяют условию  $x(x - 5) \neq 0$ , а значит, они корни уравнения (1). Смыслу задачи  $x > 5$  удовлетворяет  $x = 10$ .

10 штук в час изготавливает опытный рабочий, молодой —  $10 - 5 = 5$  (штук в час), вместе за час —  $10 + 5 = 15$  штук, значит, 120 деталей изготовят за  $120 : 15 = 8$  (часов).

*Ответ:* 8.

**575.** Пусть  $x$  автомобилей за 1 час обслуживает ручная мойка, тогда автоматизированная —  $(x + 7)$ . 45 автомобилей ручная мойка обслуживает за  $\frac{45}{x}$  ч, 20 автомобилей автоматизированная мойка — за  $\frac{20}{x+7}$  ч, что по

условию задачи на 5 ч меньше, чем  $\frac{45}{x}$  ч.

Уравнение:  $\frac{20}{x+7} + 5 = \frac{45}{x}$ ,  $x(x-7) \neq 0$ . (1)

$\frac{4}{x+7} + 1 = \frac{9}{x}$ ;  $4x + x(x+7) = 9(x+7)$ ;  $4x + x^2 + 7x = 9x + 63$ ;

$x^2 + 2x - 63 = 0$ ;  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+63}$ ;  $x_{1,2} = -1 \pm 8$   $x_1 = -9$ ,  $x_2 = 7$ .

Числа  $-9$  и  $7$  удовлетворяют условию  $x(x+7) \neq 0$ , значит, они корни уравнения (1), но  $x = -9$  не удовлетворяет смыслу задачи, поэтому  $x = 7$ .

Ручная мойка 105 машин обслужит за  $\frac{105}{7} = 15$  (часов).

*Ответ:* 15.

**576.** Если на выполнение задания бригада рабочих затратила  $x$  дней, то она изготовляла  $\frac{360}{x}$  деталей в день. Предполагалось изготовить по плану

360 деталей за  $(x+1)$  дн., то есть по  $\frac{360}{x+1}$  деталей в день, и это на 4 мень-

ше, чем  $\frac{360}{x}$ . Уравнение:  $\frac{360}{x+1} + 4 = \frac{360}{x}$ ,  $x(x+1) \neq 0$ ;  $\frac{90}{x+1} + 1 = \frac{90}{x}$ ;

$90x + x^2 + x = 90x + 90$ ;  $x^2 + x - 90 = 0$ ;  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{2}$ ;

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 19}{2}$ ;  $x_1 = -10$ ,  $x_2 = 9$ . При  $x_1 = -10$ ,  $x_2 = 9$ ,  $x(x+1) \neq 0$

$x = 9$  удовлетворяет смыслу задачи.

9 дней затратила бригада на выполнение задания.

*Ответ:* 9.

**577.** Пусть  $x$ ,  $y$  и  $z$  — производительности первого, второго и третьего насоса соответственно. По условию задачи  $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ ,  $x + y = 4z$  и

$6(x + y + z) = V$ , где  $V$  — объём бассейна. Отсюда получаем:  $x = \frac{3y}{5}$ ,  
 $z = \frac{x + y}{4}$ , а  $x + y + z = \frac{5}{4}(x + y) = \frac{5}{4}\left(\frac{3}{5} + 1\right)y = 2y$ . Значит,  
 $V = 6(x + y + z) = 12y \Rightarrow y = \frac{V}{12}$ . Тогда  $x = \frac{3y}{5} = \frac{V}{20}$ , а  $z = \frac{1}{4}(x + y) =$   
 $= \frac{1}{4}\left(\frac{V}{20} + \frac{V}{12}\right) = \frac{V}{30}$ . Так как 3 часа 36 минут — это 3,6 часа, то за это  
 время первый и третий насосы заполнят 3,6( $x + z$ ) часть объёма бассейна.  
 $3,6(x + z) = 3,6\left(\frac{V}{20} + \frac{V}{30}\right) = 0,36 \cdot \frac{5V}{6} = 0,3V$ .

То есть первый и третий насосы за 3 часа 36 минут заполняют 30% объёма бассейна.

*Ответ:* 30.

**578.** Пусть  $x$ ,  $y$  и  $z$  — производительности первого, второго и третьего насоса соответственно.

$\frac{y}{z} = \frac{2}{3}$ ,  $3x = y + z$  и  $5(x + y + z) = V$ , где  $V$  — объём бассейна.

$y = \frac{2z}{3}$ ,  $x = \frac{y + z}{3}$ , а  $x + y + z = \frac{4}{3}(y + z) = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3} + 1\right)z = \frac{20z}{9}$ .

Значит,  $V = 5(x + y + z) = \frac{100z}{9} \Rightarrow z = 0,09V$ . Тогда  $y = \frac{2z}{3} = 0,06V$ , а

$x = \frac{1}{3}(y + z) = \frac{1}{3}(0,06V + 0,09V) = 0,05V$ . Так как 6 часов работал первый насос, а потом 5 часов второй, то объём бензина, который они закачали, равен:  $6x + 5y = 6 \cdot 0,05V + 5 \cdot 0,06V = 0,6V$ . То есть они заполнили 60% объёма цистерны.

*Ответ:* 60.

**579.** Если  $x$  и  $y$  — производительности старого и нового станков соответственно,  $V$  — общий объём заказа, а  $t$  — время, за которое с помощью пяти старых и двух новых станков можно этот заказ выполнить, то  $(5x + 2y)t = V$ .

$\frac{x}{y} = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \frac{2y}{9}$  и  $V = \left(5 \cdot \frac{2}{9} + 2\right)yt = \frac{28}{9}yt \Rightarrow yt = \frac{9V}{28}$ .

$$(6x + y)t = \left(6 \cdot \frac{2}{9} + 1\right)yt = \frac{21}{9}yt = \frac{21}{9} \cdot \frac{9V}{28} = 0,75V.$$

То есть с помощью шести старых станков и одного нового за время  $t$  можно выполнить 75% заказа.

*Ответ:* 75.

**580.** Пусть первый насос работает с производительностью  $3x$  литров в час, тогда второй —  $4x$ , а третий —  $5x$  литров в час. Значит, всего в бассейне  $(3x + 4x + 5x) \cdot 5 = 60x$  литров. За первый час налилось  $3x$  литров, в следующий час  $12x$  литров. Осталось  $45x$  литров, а все последующее время скорость заполнения была  $9x$  литров в час. Итак, после поломки потребовалось ещё 5 часов. А всего бассейн заполнялся 7 часов.

*Ответ:* 7.

**581.** Примем всю работу за единицу, тогда пусть  $x$  — производительность первого каменщика за час,  $y$  — второго. Составляем уравнения:

$$\begin{cases} 6(x + y) = 1, \\ 3(x + y) + 4x = 1; \end{cases} \text{ Решая систему, находим } y = \frac{1}{24}.$$

*Ответ:* 24.

**582.** Примем работу по погрузке вагона за единицу. Тогда пусть производительность первого автопогрузчика за час равна  $2x$ , а второго —  $x$ . Тогда согласно условию  $10(2x + x) = 1$ , откуда находим  $x = \frac{1}{30}$ .

Пусть теперь  $y$  часов первый работал в одиночку. Составляем уравнение:

$$y \frac{2}{30} + (11 - y) \frac{3}{30} = 1, \text{ или } 2y + 33 - 3y = 30, \text{ откуда находим } y = 3.$$

*Ответ:* 3.

**583.** Обозначим количество товара, находящегося на складе через 1. Пусть  $a$  — объём продаж за 4 дня первого менеджера,  $b$  — объём продаж за 4 дня второго менеджера. Так как, по условию, оба менеджера реализовали  $\frac{3}{5}$  всего товара, и известно соотношение их объёмов продаж за 4 дня, то получаем систему

$$\begin{cases} a + b = \frac{3}{5}, \\ \frac{a}{b} = \frac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4b}{5} + b = \frac{3}{5}, \\ a = \frac{4b}{5}. \end{cases}$$

Отсюда,  $b = \frac{1}{3}$ ,  $a = \frac{4}{15}$ . Пусть  $V_1$  — скорость продаж первого менеджера,  $V_n$  — скорость продаж нового работника. Тогда

$V_1 = \frac{a}{4} = \frac{1}{15}$ ,  $V_n = \frac{V_1}{2} = \frac{1}{30}$ . Определим какой объём продаж выполнил новый работник. Так как всего объём продаж равен 1, а на складе осталось 20% от всего товара, то всего было продано 80%, что соответствует  $\frac{4}{5}$ . Следовательно, новый работник продал  $\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$  товара. Найдём время  $t$ , которое он затратил:  $t = \frac{0,2}{V_n} = \frac{1 \cdot 30}{5} = 6$  дней.

*Ответ:* 6.

**584.** Пусть  $x$  — скорость ракеты на основном двигателе,  $y$  — скорость на дополнительном двигателе. Путь от земли до станции обозначим через  $S$ , путь пройденный на основном и дополнительном двигателях — через  $S_1$ , путь пройденный на обратном пути на основном двигателе — через  $S_2$ . Тогда  $S = 10x$ ,  $S_1 = 2(x + y)$ ,  $S_2 = 6x$ . Так как  $S = S_1 + S_2$ , то  $S = 2(x + y) + 6x$ . Получаем систему уравнений  $\begin{cases} S = 10x, \\ S = 2(x + y) + 6x. \end{cases}$  Отсюда,  $10x = 2(x + y) + 6x$ ,  $10x - 2x - 6x = 2y$ ,  $x : y = 1$ .

*Ответ:* 1.

**585.** Из условия задачи следует, что за 45 минут  $= \frac{3}{4}$  часа бассейн заполнится на  $\frac{3}{4}$ , то есть площадь выступающих над водой стенок бассейна будет равна  $2 \cdot \left(12 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot \frac{1}{2}\right) = 37$  (м<sup>2</sup>).

*Ответ:* 37.

**586.** 1)  $2(35 + 25) - (7 + 13) = 100$  (м) — общая длина забора.

2)  $100\% + 8\% = 108\% = 1,08$ ;  $100 \cdot 1,08 = 108$  (м) материала необходимо купить.

3)  $400 \cdot 108 = 43200$  (руб.) — стоимость материала. Это составляет 43,2 тысячи рублей.

*Ответ:* 43,2.

**587.** Пусть длина окружности заднего колеса трактора равна  $x$  м, а переднего колеса —  $y$  м. Очевидно, что  $x > 0$ ,  $y > 0$ . По условию задачи заполним таблицу

	Промежуток (м)	Обороты (шт)	Длина окруж. колеса (м)
Переднее колесо	24	$\frac{24}{y}$	$y$
Заднее колесо	24	$\frac{24}{x}$	$x$

Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{24}{y} - \frac{24}{x} = 4, \\ \frac{24}{y+0,4} - \frac{24}{x} = 2. \end{cases}$$

Вычитая уравнения системы, получим  $\frac{24}{y} - \frac{24}{y+0,4} = 2$ . Это уравнение легко сводится к квадратному и имеет два корня  $y_1 = -2$  и  $y_2 = 2,4$ . Очевидно, что условию задачи подходит  $y = 2,4$ , тогда  $x = 4$ . Значит, длина окружности заднего колеса равна 4 м.

*Ответ:* 4.

**588.** Пусть данное число равно  $\overline{ab}$ . По условию  $a + b = 13$ . Рассмотрим два случая.

1).  $(a+2)^2 + (b-2)^2 = a^2 + b^2 + 4, 4(a-b) + 8 = 4, a-b = -1, a = b-1.$   
 $b + (b-1) = 13, 2b = 14, b = 7, a = 6, \overline{ab} = 67.$

2).  $(a+2)^2 + (b-2)^2 = a^2 + b^2 - 4, 4(a-b) + 8 = -4, a-b = -3, a = b-3.$   
 $b + (b-3) = 13, b = 8, a = 5, \overline{ab} = 58.$

Наименьшим из найденных чисел является число 58.

*Ответ:* 58.

**589.** Пусть данное число равно  $\overline{ab}$ . По условию  $a + b = 11$ . Рассмотрим два случая.

1).  $(a+4)^2 + (b-4)^2 = a^2 + b^2 + 8, 8(a-b) + 32 = 8, a-b = -3, a = b-3.$   
 $b + (b-3) = 11, 2b = 14, b = 7, a = 4, \overline{ab} = 47.$

2).  $(a+4)^2 + (b-4)^2 = a^2 + b^2 - 8, 8(a-b) + 32 = -8, a-b = -5,$   
 $a = b-5. b + (b-5) = 11, b = 8, a = 3, \overline{ab} = 38.$

Наибольшим из найденных чисел является число 47.

*Ответ:* 47.

**590.** Пусть  $a_1, a_2, a_3$  — цифры данного трёхзначного числа. По условию  $a_1, a_2, a_3$  образуют арифметическую прогрессию и их сумма равна 15. То есть  $a_1 + a_2 + a_3 = 15$  или  $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 15$ ;

$$a_1 + d = 5 \tag{5}$$

Зная, что заданное число на 396 больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, получаем уравнение  $100a_1 + 10a_2 + a_3 - (100a_3 + 10a_2 + a_1) = 396$  или  $99a_1 - 99a_3 = 396$ ;  $a_1 - a_3 = 4$ ;  $a_1 - a_1 - 2d = 4$ ;  $d = -2$ . Подставив  $d = -2$  в уравнение (5), получим  $a_1 - 2 = 5$ ;  $a_1 = 7$ .

Получаем:  $a_1 = 7$ ;  $a_2 = 5$ ;  $a_3 = 3$ . Следовательно, 753 — искомое число.

*Ответ:* 753.

**591.** В арифметической прогрессии  $S_{32} = 16$

$$S_{32} = \frac{2a_1 + 31d}{2} \cdot 32 = (2a_1 + 31d) \cdot 16$$

$$a_3 + a_{30} = a_1 + 2d + a_1 + 29d = - = 2a_1 + 31d.$$

По условию задачи  $S_{32} = 16$ , то есть  $(2a_1 + 31d) \cdot 16 = 16$ , отсюда  $2a_1 + 31d = a_3 + a_{30} = 1$ .

*Ответ:* 1.

$$\mathbf{592.} \quad S_{50} = a_{99} \quad S_{50} = \frac{2a_1 + 49d}{2} \cdot 50 = (2a_1 + 49d) \cdot 25. \quad a_n = 0,$$

$$a_{99} = a_1 + 98d.$$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (2a_1 + 49d) \cdot 25 = a_1 + 98d, \\ a_1 + d(n - 1) = 0; \end{cases}$$

Из 1-го уравнения выразим  $a_1$  через  $d$ :  $50a_1 + 25 \cdot 49d = a_1 + 98d$ .  $49a_1 + 25 \cdot 49d = 98d$ ,  $a_1 + 25d = 2d$ ,  $a_1 = -23d$ . Подставим во второе уравнение:  $-23d + dn - d = 0$ . По определению разности  $d$  арифметической прогрессии  $d \neq 0$ , поэтому можно полученное уравнение разделить на  $d$ :  $-23 + n - 1 = 0$ , откуда  $n = 24$ . 24 члена в данной прогрессии.

*Ответ:* 24.

**593.** Выполнение работы в процентах от всей порученной составляет арифметическую прогрессию:  $a_1 = 18$ ,  $d = 1$ ,  $S_n = 100$ ,  $n$  — число дней выполнения всей работы.  $\frac{2 \cdot 18 + (n - 1)}{2} \cdot n = 100$ ;  $a > 0$ ;  $c < 0 \Rightarrow D > 0$ .

$n^2 + 35n - 200 = 0$ . По теореме, обратной теореме Виета,  $n_1 = -40$  (что не удовлетворяет смыслу задачи:  $n \in N$ .)  $n_2 = 5$ .

За 5 дней рабочий выполнит всю работу.

*Ответ:* 5.

**594.** Промежутки времени, необходимые на решение каждой задачи, составляет арифметическую прогрессию:  $a_1 = 1,8$ ,  $d = -0,2$ ,  $S_{n-1} = 7,8$ ,  $n$  — число предложенных задач.

$$S_{n-1} = \frac{2a_1 + d(n-2)}{2} \cdot (n-1); \frac{2 \cdot 1,8 - 0,2(n-2)}{2} \cdot (n-1) = 7,8;$$

$$(1,8 - 0,1(n-2))(n-1) = 7,8; (2 - 0,1n)(n-1) = 7,8;$$

$$2n - 2 - 0,1n^2 + 0,1n = 7,8; 0,1n^2 - 2,1n + 9,8 = 0; n^2 - 21n + 98 = 0;$$

$$D = 441 - 392 = 49; n_{1,2} = \frac{21 \pm 7}{2}; n_1 = 7, n_2 = 14. \text{ Время решения}$$

задачи — число положительное, то есть  $a_n > 0$ . Определим число положительных членов прогрессии:  $a_1 + d(n-1) > 0$ ,  $1,80 - 0,2(n-1) > 0$ ,  $-0,2(n-1) > -1,8$ ,  $n-1 < 9$ ,  $n < 10$ .  $7 < 10$ , значит, 7-ой член прогрессии положительный;  $14 > 10$ , то есть 14-ый член — отрицательный. 7 — число предложенных задач.

*Ответ:* 7.

**595.** Введём в рассмотрение арифметическую прогрессию, каждый член  $a_n$  которой означает число задач, решённых школьником в  $n$ -ый день. Из условия следует, что разность  $d$  этой прогрессии — натуральное число. Общее количество рассмотренных им задач за первые 20 дней — сумма первых 20 членов введённой прогрессии  $\frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20$ , после упрощения  $(a_1 + a_{20}) \cdot 10$ . (1)

Число задач, решённых за последние 10 дней, можно определить как сумму первых 10 членов арифметической прогрессии ( $b_n$ ):

$$b_1 = a_{21}, b_{10} = a_{30}; \frac{b_1 + b_{10}}{2} \cdot 10 \quad (2) \quad (\text{Можно применить правило: сумма членов арифметической прогрессии, равноудалённых от концов, равны}).$$

По условию (1) и (2) суммы равны:  $(a_1 + a_{20}) \cdot 10 = (a_{21} + a_{30}) \cdot 5$ . Зная, что  $a_n = a_1 + d(n-1)$ , получим  $(2a_1 + 19d) \cdot 2 = 2a_{21} + 49d$ ;

$$4a_1 + 38d = 2a_1 + 49d; 2a_1 = 11d; a_1 = \frac{11}{2}d. \text{ Найдём число задач, решённых за первые и за последние 15 дней: } \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7d) \cdot 15;$$

$$\frac{a_{16} + a_{30}}{2} \cdot 15 = (a_1 + 22d) \cdot 15. \text{ Определим, во сколько раз больше школь-$$

ник рассмотрел задач за последние 15 дней по сравнению с первыми 15-ью днями:

$$\frac{(a_1 + 22d) \cdot 15}{(a_1 + 7d) \cdot 15} = \frac{a_1 + 22d}{a_1 + 7d}.$$

Так как  $a_1 = \frac{11}{2}d$ , получим  $\frac{\frac{11}{2} + 22d}{\frac{11}{2}d + 7d} = \frac{11d + 44d}{11d + 14d} = \frac{55d}{25d} = 2,2$ .

*Ответ:* 2,2.

**596.** Увеличение числа на 200% означает прибавление к данному числу числа, вдвое большего. Если в 1-ый день вырубил  $x$  сосен, то во 2-ой день —  $x + 2x = 3x$ , это по условию 12, отсюда  $x = 4$ ; в 3-ий —  $3x + 6x = 9x$ ; в 4-ый —  $9x + 18x = 27x, \dots$

Числа сосен, вырубаемых ежедневно, в течение  $n$  дней, составляют геометрическую прогрессию:  $b_1 = 4$ ,  $q = 3$ ,  $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ , что по условию задачи равно 2916. Уравнение:  $4 \cdot 3^{n-1} = 2916$ ,  $4 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^6$ ,  $3^{n-1} = 3^6$ ,  $n - 1 = 6$ ,  $n = 7$ .

7 дней продолжалась вырубка сосен.

*Ответ:* 7.

**597.** Введём в рассмотрение арифметическую прогрессию, каждый член  $a_n$  которой означает промежуток времени решения  $n$ -ой задачи; Разность этой прогрессии равна 6 мин. Если  $n$  — число заданных задач, а  $S_n$  — сумма первых  $n$  членов введённой прогрессии, то математическая запись условия задачи принимает вид уравнения:

$$\frac{2 \cdot 60 - 6(n-1)}{2} \cdot n = 324 \left( S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \right);$$

$$(60 - 3(n-1))n = 324; 60n - 3n^2 + 3n = 324; -3n^2 + 63n - 324 = 0; n^2 - 21n + 108 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $n_1 = 12$ ,  $n_2 = 9$ . Определим, какое значение  $n$  удовлетворяет условию задачи. По смыслу  $a_n > 0$ .  $60 - 6(n-1) > 0$ ;  $(a_n = a_1 + d(n-1)) 60 - 6n + 6 > 0$ ;  $-6n > -66$ ;  $n < 11$ . Значит,  $n = 9$ .

Было задано 9 задач.

*Ответ:* 9.

**598.**  $a_1 = 42$ ,  $a_2 = 38$ ,  $a_n$  — арифметическая прогрессия,  $n = 10$ ,  $a_1 = 42$ ,  $d = -4$ ,  $S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = \frac{2 \cdot 42 - 36}{2} \cdot 10 = 24 \cdot 10 = 240$ .

*Ответ:* 240.

**599.** Число рисунков, выполненных отдельными школьниками составляют геометрическую прогрессию с  $q = \frac{1}{2}$ ,  $S_n = 2667$ ,  $b_3 = 336$ , где  $n$  — число детей, выполнявших рисунки.  $b_3 = b_1 \cdot q^2$ , отсюда

$$b_1 = \frac{336}{0,25} = 1344. S_n = \frac{1344\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - 0,5}; 1344 \cdot 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2667.$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{128}; \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^7; n = 7$ . Поэтому отрезки рисовали 7 школьников.

Ответ: 7.

**600.**  $a_1, a_2, a_3$ , — арифмитическая прогрессия,  $d > 0$ .

$a_1 + 8, a_2, a_3$  — геометрическая прогрессия,  $S_3 = 26$ .

$$S_3 = \frac{2a_1 + d \cdot 2}{2} \cdot 3, S_3 = 26 - 8 = 18. \frac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3 = 18, a_1 + d = 6,$$

$d = 6 - a_1$ . Арифметическая прогрессия имеет вид:  $a_1; a_1 + 6 - a_1, a_1 + 2(6 - a_1)$ ; упростив, получим  $a_1, 6, 12 - a_1$ . Составим геометрическую

прогрессию:  $a_1 + 8, 6, 12 - a_1$ . По её определению  $\frac{6}{a_1 + 8} = \frac{12 - a_1}{6} = q$ .

$$(12 - a_1)(a_1 + 8) = 36, 12a_1 + 96 - a_1^2 - 8a_1 = 36;$$

$$a_1^2 - 4a_1 - 60 = 0, (a_1)_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 60}. (a_1)_1 = 10 (a_1)_2 = -6,$$

$d_1 = 6 - 10 = -4$  не удовлетворяет условию  $d > 0$ ;

$$d_2 = 6 - (-6) = 12, 12 > 0. \text{Итак, } a_1 = -6, q = \frac{6}{-6 + 8} = \frac{6}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

**601.** Дано:  $\triangle ABC$  — равнобедренный,  $\angle ABC = 120^\circ, r_{\text{вп}} = 2 - \sqrt{3}$ .

Найти:  $AC$ .

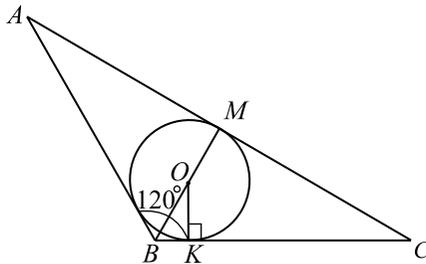


Рис. 29.

$$\begin{aligned} \text{Решение. Из } \triangle BOK \text{ (см. рис. 29) имеем: } BO &= \frac{OK}{\sin 60^\circ} = \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3}) \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{3} = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}; BM = BO + OM = \end{aligned}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-6}{3} + 2 - \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}-6+6-3\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Из } \triangle BMC \text{ имеем:}$$

$$MC = BM \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{3} = 1. AC = 2.$$

Ответ: 2.

602. Дано:  $\triangle ABC$  (см. рис. 30),  $AC = 5$ , точка  $O$  — центр вписанной окружности в  $\triangle ABC$ ,  $r = OK = 1$ ,  $\sin \angle C = \frac{3}{5}$ ,  $AB < AC$ .

Найти:  $BC$ .

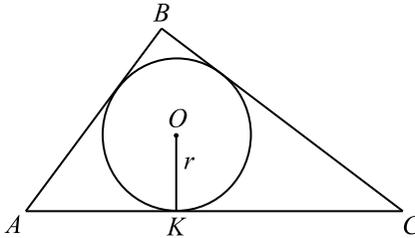


Рис. 30.

Решение. 1.  $S_{ABC} = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot r$ , с другой стороны

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin \angle C, \quad \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot r = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin \angle C, \text{ по условию}$$

$r = 1$ ,  $AC = 5$ ,  $\sin \angle C = 0,6$ , поэтому  $P_{ABC} = 5 \cdot 0,6 \cdot BC$ ,  $P_{ABC} = 3BC$ .

2. Так как  $AB < AC$ , то  $\angle C < \angle B$ . Это означает, что  $\angle C$  острый. Следовательно,  $\cos \angle C > 0$ .

$$\cos \angle C = \sqrt{1 - \sin^2 \angle C} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

3. Выразим сторону  $AB$  через  $BC$ . По теореме косинусов  $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C$ ,  $AB = \sqrt{BC^2 + 25 - 8BC}$ .

4.  $P_{ABC} = AB + BC + AC$ ,  $P_{ABC} = \sqrt{BC^2 + 25 - 8BC} + BC + 5$ , по доказанному  $P_{ABC} = 3BC$ . Пусть  $a$  — длина стороны  $BC$ ,  $a > 0$ , тогда найдём  $a$  из уравнения:

$$(1) \sqrt{a^2 + 25 - 8a} + a + 5 = 3a \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 25 - 8a} = 2a - 5 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + 25 - 8a = (2a - 5)^2, \\ 2a - 5 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3a^2 - 12a = 0, \\ a \geq 2,5; \end{cases} \quad \Rightarrow a = 4.$$

$a = 4$  — корень уравнения (1).  $BC = 4$ .

Ответ: 4.

**603.** Дано:  $\triangle ABC$  — равнобедренный,  $\angle B = 30^\circ$ , точка  $O$  — центр описанной окружности около  $\triangle ABC$ ,  $AD$  — диаметр,  $r = AO = 7\sqrt{2}$ .

Найти: диаметр окружности, описанной около  $\triangle AEC$ .

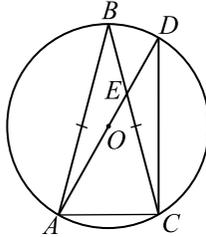


Рис. 31.

*Решение.* Сделаем чертёж (см. рис. 31).

1.  $\triangle ABC$  — равнобедренный,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle A = \angle C = 75^\circ$ .

2. Вписанные углы  $\angle ABC$  и  $\angle ADC$  опираются на одну и ту же дугу  $AC$ , поэтому  $\angle ADC = \angle ABC = 30^\circ$ .

3.  $\angle ACD = 90^\circ$ .  $\triangle ACD$  — прямоугольный,  $AC = \frac{1}{2}AD = 7\sqrt{2}$ , так как  $\angle ADC = 30^\circ$ .

4.  $\triangle AEC$ :  $\angle EAC = 60^\circ$ ,  $\angle ECA = 75^\circ$ , тогда  $\angle AEC = 45^\circ$ . Стороны  $AE$  и  $EC$  найдём по теореме синусов.  $\frac{AE}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle E} = \frac{EC}{\sin \angle A}$ .  $AE =$

$$= \frac{7\sqrt{2} \cdot \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 7\sqrt{2} \cdot \sin 75^\circ \cdot \sqrt{2} = 14 \sin 75^\circ. EC = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} =$$

$$= \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{3}. S_{AEC} = \frac{1}{2}AE \cdot AC \cdot \sin \angle A, S_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot 14 \sin 75^\circ \cdot$$

$$7\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{6}}{2} \sin 75^\circ. d — диаметр  $\triangle AEC$ .  $d = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot S_{AEC}}$ , где  $a, b,$$$

$$c — длины сторон  $\triangle AEC$ .  $d = \frac{7\sqrt{2} \cdot 14 \sin 75^\circ \cdot 7\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{49\sqrt{6}}{2} \sin 75^\circ} = 14.$$$

*Ответ:* 14.

**604.** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром  $O$ . Скалярное произведение векторов  $\vec{OA}$  и  $\vec{OC}$  равно  $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$ .

Найдите длину стороны  $AB$ , если  $\angle ABC = 60^\circ$  и  $\angle BCA = 75^\circ$ .

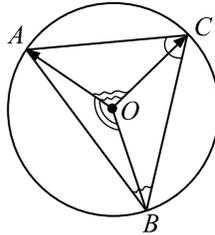


Рис. 32.

Дано:  $\triangle ABC$  (см. рис. 32),  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle BCA = 75^\circ$ , точка  $O$  — центр описанной окружности около треугольника  $ABC$ ,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{\sqrt{3}-2}{2}$ .

Найти:  $AB$ .

*Решение.* Так как  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , то  $OA = OB = OC = R$ , где  $R$  — радиус этой окружности. Центральные углы  $\angle AOB$  и вписанный угол  $\angle ACB$  опираются на одну и ту же дугу  $AB$ , поэтому  $\angle AOB = 2\angle ACB = 150^\circ$ . Аналогична ситуация для центрального угла  $\angle AOC$  и вписанного угла  $\angle ABC$ : они оба опираются на дугу  $AC \Rightarrow \angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$ . Так как  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = OA \cdot OC \cdot \cos \angle AOC$ , то  $R^2 \cdot \cos 120^\circ = \frac{\sqrt{3}-2}{2} \Rightarrow R^2 = \frac{\sqrt{3}-2}{2} \cdot (-2) = 2 - \sqrt{3}$ . Для нахождения  $AB$  воспользуемся теоремой косинусов в треугольнике  $AOB$ :

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 150^\circ = \\ &= 2R^2 \cdot \left(1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 2(2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2} = 4 - 3 = 1. \end{aligned}$$

*Ответ:* 1.

**605.** Дано:  $\triangle ABC$  (см. рис. 33),  $\angle ACB = 45^\circ$ , точка  $O$  — центр описанной окружности около  $\triangle ABC$ ,  $BC = 3\sqrt{2}$ ,  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 9$ .

Найти:  $AB$ .

*Решение.*

1. Так как точка  $O$  — центр описанной окружности около  $\triangle ABC$ , то  $OA = OB = OC = R$ , где  $R$  — радиус этой окружности. Центральные углы  $\angle AOB$  и вписанный угол  $\angle ACB$  опираются на одну и ту же дугу  $AB$ , поэтому  $\angle AOB = 2\angle ACB = 90^\circ$ .

2. Так как  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OB \cdot OC \cdot \cos \angle BOC$ , то  $R^2 \cdot \cos \angle BOC = 9$ ,

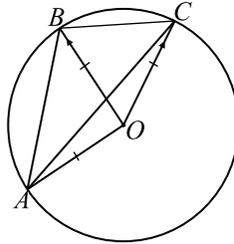


Рис. 33.

$$\cos \angle BOC = \frac{9}{R^2} \quad (\angle BOC \text{ — острый}).$$

3. Для нахождения радиуса окружности воспользуемся теоремой косинусов в  $\triangle BOC$ .  $BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos \angle BOC =$   
 $= R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \frac{9}{R^2} = 2R^2 - 18. 2R^2 - 18 = (3\sqrt{2})^2, 2R^2 = 36, R^2 = 18,$   
 $R = \sqrt{18}.$

4.  $\triangle AOB$ :  $AB = \frac{OB}{\sin 45^\circ}, AB = \sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = 6.$

Ответ: 6.

606. Пусть  $BO$  пересекает  $AC$  в точке  $B_1$ , (см. рис. 34)  $BB_1$  — биссек-

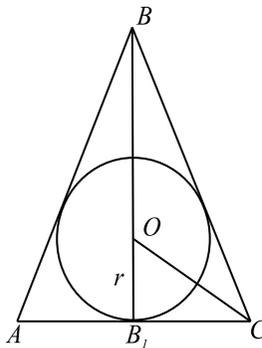


Рис. 34.

триса (центр вписанной окружности —  $O$  является точкой пересечения биссектрис). Так как  $AB = BC$ , то  $BB_1$  является одновременно и медианой, при этом

$$S_{B_1OC} = S_{BB_1C} - S_{BOC} = \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABC}. \text{ Отсюда следу-}$$

ет, что  $\frac{BO}{B_1O} = \frac{S_{BOC}}{S_{B_1OC}} = \frac{S_{ABC}}{3} : \frac{S_{ABC}}{6} = 2 \Rightarrow O$  — точка пересечения медиан ( $BB_1$  — медиана, и она делится точкой  $O$  в отношении 2:1). То есть в  $\triangle ABC$  точка пересечения биссектрис совпадает с точкой пересечения медиан  $\Rightarrow \triangle ABC$  — равносторонний. Пусть  $a$  — сторона  $\triangle ABC$ ,  $r = \sqrt[4]{3}$  радиус вписанной в него окружности, тогда площадь  $\triangle ABC$  равна

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{3}r)^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \cdot r^2 = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9.$$

Ответ: 9.

**607.** Пусть в  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ;  $AC = 6$  (см. рис. 35). Обозначим через  $r$  — радиус вписанной окружности;  $R$  — радиус описанной окружности.



Рис. 35.

Пусть  $BC = x$ ,  $x > 3$ , тогда  $BD = \sqrt{x^2 - 9}$ ,  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ . С другой

стороны  $S_{ABC} = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot r$ . Следовательно  $AC \cdot BD = P_{ABC} \cdot r$ ;

$6\sqrt{x^2 - 9} = (2x + 6) \cdot 1$ ;  $36 \cdot (x^2 - 9) = 4x^2 + 24x + 36$ ;  $32x^2 - 24x - 360 = 0$ ;  
 $4x^2 - 3x - 45 = 0$ ;  $x_1 = 3,75$ ,  $x_2 = -3$  — не удовлетворяет условию  $x > 3$ .

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (3,75 + 3,75 + 6) \cdot 1 = 6,75$ ;  $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} =$   
 $= \frac{3,75 \cdot 3,75 \cdot 6}{4 \cdot 6,75} = 3,125.$

Ответ: 3,125.

**608.** Так как  $O$  — центр вписанной в  $\triangle ABC$  окружности, (см. рис. 36) то прямые  $AM$  и  $BN$  являются биссектрисами углов  $\angle A$  и  $\angle B$  треугольника  $\triangle ABC$ . Пусть градусные меры углов  $\angle A$ ,  $\angle B$  и  $\angle C$  равны  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , соответственно. Тогда,  $\angle CAN = \angle CBN = \beta/2$ , как углы, опирающиеся на одну дугу. Аналогично,  $\angle BNA = \angle BCA = \gamma$ ,  $\angle MNB = \angle MAB = \alpha/2$ . Из условия  $AM = MN \Rightarrow \angle MAN = \angle MNA$ . Выразим углы  $\angle MAN$  и  $\angle MNA$  через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ :  $\angle MAN = \angle MAC + \angle CAN = \alpha/2 + \beta/2$ ,

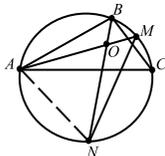


Рис. 36.

$\angle MNA = \angle MNB + \angle BNA = \alpha/2 + \gamma$ . Отсюда мы имеем:  
 $\alpha/2 + \beta/2 = \alpha/2 + \gamma$ ;  $\beta = 2\gamma$ . По условию,  $\alpha = 30^\circ$ , воспользовавшись соотношением  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  и равенством  $\beta = 2\gamma$ , получаем:  $3\gamma = 150^\circ$ ,  $\gamma = 50^\circ$ .

Ответ: 50.

**609.** Дано:  $ABC$  — равнобедренный треугольник,  $AB = BC$ ,  $AD$  — биссектриса треугольника  $ABC$ ,  $BD : DC = 5 : 8$ , радиус  $r$  вписанной окружности треугольника  $ABC$  равен 2.

Найти:  $AC$ .

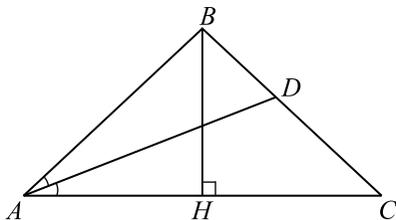


Рис. 37.

Решение. По свойству биссектрисы  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{5}{8} \Rightarrow AB = \frac{5}{8}AC$ .

Пусть  $AC = x$ ,  $x > 0$ , тогда  $AB = BC = \frac{5}{8}x$ .  $r = \frac{S_{ABC}}{p}$ , где  $p$  — по-

лупериметр  $\triangle ABC$ , то есть  $p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{\frac{5}{8}x + \frac{5}{8}x + x}{2} = \frac{9}{8}x$ .

Пусть  $H$  — середина стороны  $AC$ . Так как  $AB = BC$ , то  $BH \perp AC$ .

Поэтому из  $\triangle ABH \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{25}{64}x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{3}{8}x$ . Сле-

довательно,  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{3}{16}x^2$ .

Таким образом,  $r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{3}{16}x^2}{\frac{9}{8}x} = \frac{x}{6}$ . По условию  $r = 2$ , поэтому

$$\frac{x}{6} = 2; x = 12.$$

*Ответ:* 12.

**610.** Пусть  $ABC$  — данный равнобедренный треугольник с основанием  $AC$ ,  $O$  — центр его вписанной окружности,  $T, K, H$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $AB, BC, AC$  соответственно (см. рис. 38), радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$  равен  $r$ , а описанной —  $R$ . Так как отрезки касательных равны, то  $HC = KC$ ,  $HA = AT$ ,  $BT = BK$ . Пусть  $KC = AT = AH = HC = 2x$ ,  $BK = BT = 3x$ ,  $AB = BC = 5x$ . Тогда  $BH = \sqrt{(5x)^2 - (2x)^2} = \sqrt{21}x$ .

Площадь треугольника  $ABC$  равна  $\frac{1}{2}BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{21}x \cdot 4x = 2\sqrt{21}x^2$ .

С другой стороны,  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BC + CA) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4x = 105x$ ,

$$105x = 2\sqrt{21}x^2, x = \frac{15\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = 2,5\sqrt{21}.$$

По теореме синусов  $R = \frac{AB}{2 \sin \angle ACB} = \frac{AB}{2 \frac{BH}{BC}} = \frac{AB \cdot BC}{2BH} =$

$$= \frac{25x^2}{2\sqrt{21}x} = x \cdot \frac{25}{2\sqrt{21}} = \frac{5\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{25}{2\sqrt{21}} = \frac{125}{4}.$$

Длина окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , равна  $2\pi R = \frac{125\pi}{2} = 62,5\pi$ . Таким образом, длина окружности, описанной около данного треугольника, превосходит число  $\pi$  в 62,5 раза.

*Ответ:* 62,5.

**611.** Пусть  $ABC$  — данный равнобедренный треугольник с основанием  $AC$ ,  $O$  — центр его вписанной окружности,  $T, K, H$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $AB, BC, AC$  соответственно (см. рис. 39), а радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$  равен  $r$ . Так как отрезки касательных равны, то  $HC = KC$ ,  $HA = AT$ ,  $BT = BK$ . Пусть  $KC = AT = AH = HC = 2x$ ,  $BK = BT = 5x$ ,  $AB = BC = 7x$ . Тогда  $BH = \sqrt{(7x)^2 - (2x)^2} = 3\sqrt{5}x$ . Площадь тре-

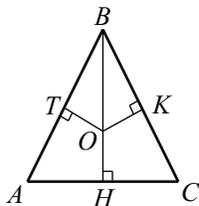


Рис. 38.

угольника  $ABC$  равна  $\frac{1}{2}BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5}x \cdot 4x = 6\sqrt{5}x^2$ . С другой стороны,  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BC + CA) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 18x = 18\sqrt{5}x$ ,  $18\sqrt{5}x = 6\sqrt{5}x^2$ ,  $x = 3$ ,  $AB = BC = 7x = 21$ .

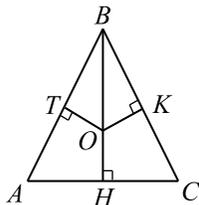


Рис. 39.

Ответ: 21.

612.

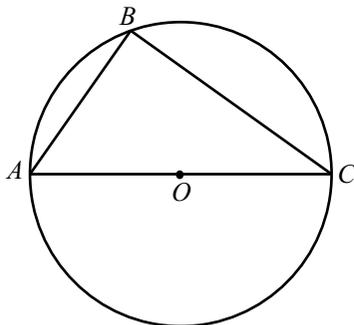


Рис. 40.

Так как вершины треугольника (см. рис. 40), делят окружность в отношении  $1 : 2 : 3$ , то в  $\triangle ABC$   $\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$ . Так как  $OA = \sqrt{2}$ , то  $AC = 2\sqrt{2}$ ;  $AB = \sqrt{2}$ ;  $BC = \sqrt{6}$ .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Если сторона правильного треугольника равна  $a$ , то его площадь

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}. \text{ Отсюда } a^2 = 4; a = 2.$$

Ответ: 2.

613.  $R = \sqrt{\sqrt{12} - 2}$ .  $\sphericalangle AB : \sphericalangle BC : \sphericalangle CA = 3 : 4 : 5$ .

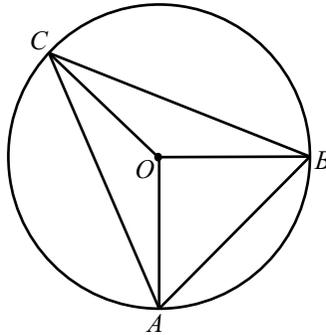


Рис. 41.

$O$  — центр окружности (см. рис. 41).

Определим, на какие части разбивают вершины треугольника окружность:  $3 + 4 + 5 = 12$ ,  $360^\circ : 12 = 30^\circ$ . Значит  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $\angle BOC = 120^\circ$ ,  $\angle COA = 150^\circ$ . Площадь треугольника  $ABC$  будем искать по формуле

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \angle CAB. \angle CAB = \frac{1}{2} \angle COB = 60^\circ \text{ (как вписанный).}$$

Найдём стороны  $AC$  и  $AB$ . Так как  $OC = OA = R =$

$= \sqrt{\sqrt{12} - 2}$  и  $\angle COA = 150^\circ$ , то из  $\triangle OCA$  по теореме косинусов:

$$AC^2 = \sqrt{12} - 2 + \sqrt{12} - 2 - 2 \cdot (\sqrt{12} - 2) \cos 150^\circ, AC^2 = 2 + 2\sqrt{3}. \text{ Значит}$$

$AC = \sqrt{2 + 2\sqrt{3}}$ .  $AB$  можно найти, зная, что  $\triangle AOB$  — прямоугольный и равнобедренный:  $AB = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{12} - 2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2\sqrt{3} - 2}$ . Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2\sqrt{3} - 2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

Пусть  $a$  — искомая сторона правильного треугольника. Известно, что  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  — площадь правильного треугольника. Тогда  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$  и  $a^2 = 4$  или  $a = 2$ .

Ответ: 2.

614. 1. По свойству биссектрисы угла, имеем:

$$\frac{CM}{AC} = \frac{MB}{AB}, \quad AC = \frac{CM \cdot AB}{MB} = \frac{10 \cdot 21\sqrt{2}}{14} = 15\sqrt{2} \text{ (см. рис. 42)}.$$

2. Площадь  $\triangle ABC$  найдём по формуле Герона:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2} = \\ = \frac{24 + 15\sqrt{2} + 21\sqrt{2}}{2}, \quad S_{ABC} = \sqrt{(18\sqrt{2} + 12)(18\sqrt{2} + 12 - 24) \cdot} \\ \cdot \sqrt{(18\sqrt{2} + 12 - 15\sqrt{2})(18\sqrt{2} + 12 - 21\sqrt{2})} = 252.$$

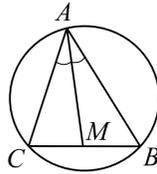


Рис. 42.

3. Из формулы площади треугольника  $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$  найдём радиус,

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{ABC}} = \frac{24 \cdot 15\sqrt{2} \cdot 21\sqrt{2}}{4 \cdot 252} = 15.$$

Ответ: 15.

615. Так как  $CD$  — биссектриса  $\angle ACB$  (см. рис. 43), то  $\frac{CB}{BD} = \frac{AC}{AD} =$

$= \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$ . Значит, мы можем обозначить  $AC = 2x$ ;  $AD = x$ ,  $x > 0$ . Из

$\triangle ABC$  по теореме Пифагора:

$$6^2 + (3+x)^2 = (2x)^2; \text{ или } x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Решениями этого уравнения будут:  $x_1 = 5$ ;  $x_2 = -3$ . Учитывая, что  $x > 0$ , получаем  $x = 5$ .  $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 6 = 15$ .

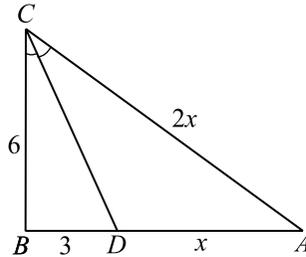


Рис. 43.

Ответ: 15.

616.  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$  (см. рис. 44).  $AC \cdot BC = 48$ . Пусть  $BC = a$ , тогда  $AC = \frac{48}{a}$ ;  $P = AB + BC + AC = 24$ ;  $AB = 24 - a - \frac{48}{a}$ . С другой стороны по теореме Пифагора  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ;

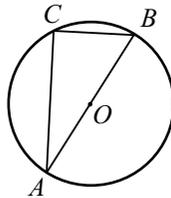


Рис. 44.

$$\left(24 - a - \frac{48}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{48^2}{a^2}; a^2 - 14a + 48 = 0; a_1 = 6; a_2 = 8.$$

Таким образом, либо  $AC = 6$ , тогда  $BC = 8$ , либо  $AC = 8$ , тогда  $BC = 6$ . В любом случае гипотенуза  $AB = 10$ .  $AO = \frac{1}{2} AB = 5$ .

Ответ: 5.

617. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AD = 4$ ,  $DC = 5$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $\angle ABD = \angle ACB$ .

Найти:  $S_{ABD}$ .

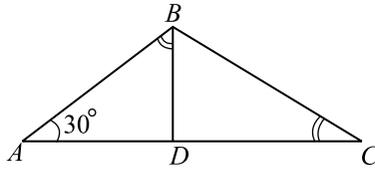


Рис. 45.

*Решение.*  $\triangle ABD \sim \triangle ABC$  (по 2 углам) (см. рис. 45).  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$ ,  
 $AB^2 = AD \cdot AC = 4 \cdot 9$ ,  $AB = 6$ .  $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$ .

*Ответ:* 6.

**618.** Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $AB = BC$ ,  $MK \perp AC$ ,  
 $MK = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $MN \perp AB$ ,  $AB = 3$ ,  $MP \perp BC$ ,  $MP = 3$ .

Найти:  $AC$ .

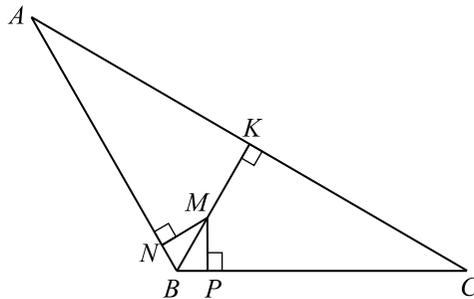


Рис. 46.

*Решение.* Так как расстояние  $MN = MP$ , то  $M \in$  биссектрисе  $\angle B$  (см. рис. 46).  $\triangle ABC$  — равнобедренный, то биссектриса совпадает с высотой ( $B, M, K$  лежат на высоте  $BK$ ). Из  $\triangle BMP$  имеем:  $BM = \frac{MP}{\sin 60^\circ} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ ,  $BK = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ . Из  $\triangle BKC$ :  
 $KC = BK \cdot \operatorname{tg} \angle 60^\circ$ ,  
 $KC = \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 7$ ,  $AC = 2KC = 14$ .

*Ответ:* 14

619. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $S_{ABC} = 96$ ,  $BM$  — медиана,  $BM = 12$ ,  
 $BC = 2\sqrt{97}$ ,  $BC > \frac{1}{2}AC$  (см. рис. 47).

Найти:  $AB$ .

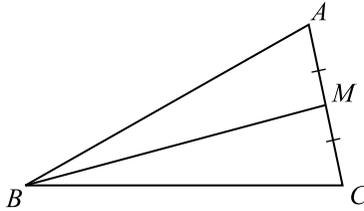


Рис. 47.

Решение.  $S_{BMC} = 48$ ,  $S_{BMC} = \frac{1}{2}BM \cdot BC \cdot \sin \angle MBC$ ,  $48 =$   
 $= 6 \cdot 2\sqrt{97} \cdot \sin \angle MBC$ ,  $\sin \angle MBC = \frac{4}{\sqrt{97}}$ ;  $\cos \angle MBC = \sqrt{\frac{81}{97}} = \frac{9}{\sqrt{97}}$ .

По теореме косинусов из  $\triangle BMC$  имеем:  $MC^2 = BM^2 + BC^2 -$   
 $- 2BM \cdot BC \cdot \cos \angle MBC$ ,  $MC^2 = 144 + 388 -$   
 $- 2 \cdot 12 \cdot 2\sqrt{97} \cdot \frac{9}{\sqrt{97}}$ ,  $MC^2 = 100$ ,  $MC = 10$ ;  $AC = 20$ . Из  $\triangle ABC$  имеем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC \cdot \sin \angle C$$

$$\sin \angle C = \frac{24}{5\sqrt{97}}; \cos \angle C = \pm \sqrt{1 - \frac{576}{25 \cdot 97}} =$$

$$= \pm \frac{43}{5\sqrt{97}}.$$

Из условия следует, что  $BC > BM$ . Значит  $\angle BMC =$

$= \angle BCM$ . Следовательно,  $\angle BCM < 90^\circ$ ;  $\cos \angle C = \frac{43}{5\sqrt{97}}$ . Так как по  
условию  $BC > MC$ , то  $\angle MBC < \angle BMC$ . Следовательно,  $\angle MBC =$   
 $= 90^\circ$ ;  $\cos \angle MBC = \frac{9}{27}$ . По теореме косинусов из  $\triangle ABC$  имеем:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle C,$$

$$AB^2 = 4 \cdot 97 + 400 - 2 \cdot 2\sqrt{97} \cdot 20 \cdot \frac{43}{5\sqrt{97}} = 100; AB = 10.$$

Ответ: 10.

620. Дано:  $\triangle ABC$ , (см. рис. 48)  $\angle A$  — острый,  $AB = 10$ ,  $BM$  — медиана,  
 $AC = 20$ ,  $S_{ABC} = 96$ .

Найти:  $BM$ .

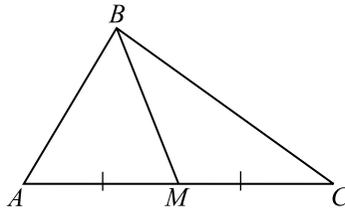


Рис. 48.

*Решение.* 1.  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \angle A$ ;  $96 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20 \cdot \sin \angle A$ ,  
 $\sin \angle A = \frac{96 \cdot 2}{10 \cdot 20} = 0,96$ ;  $\cos \angle A = \pm \sqrt{1 - 0,96^2} =$   
 $= \pm \sqrt{(1 - 0,96)(1 + 0,96)} = \pm \sqrt{0,04 \cdot 1,96} = \pm 0,2 \cdot 1,4 = \pm 0,28$ . Так как  $\angle A$  — острый, то  $\cos \angle A = 0,28$ .  
 2. Из  $\triangle ABM$  имеем:  $BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \cdot AM \cdot \cos \angle A$ ,  
 $BM^2 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0,28$ ;  $BM^2 = 144$ ;  $BM = 12$ .

*Ответ:* 12.

**621.** Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AM : MB = 3 : 4$ ,  $NB : NC = 3 : 5$ ,  $S_{AMN} = 9$ .

Найти:  $S_{ABC}$ .

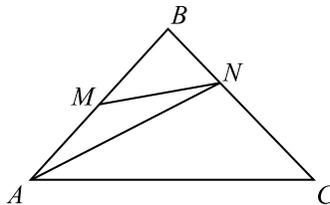


Рис. 49.

*Решение.* Обозначим  $\frac{1}{7}AB = x$ ;  $\frac{1}{8}BC = y$ , тогда  $AB = 7x$ ,  $MB = 4x$ ,  
 $BN = 3y$ ,  $BC = 8y$  (см. рис. 49).

$$1. \frac{S_{ABN}}{S_{MBN}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BN \cdot \sin \angle B}{\frac{1}{2}MB \cdot BN \cdot \sin \angle B} = \frac{7}{4}. \text{ Так как } S_{MBN} = S_{ABN} - S_{AMN} =$$

$$= S_{ABN} - 9, \text{ то } \frac{S_{ABN}}{S_{ABN} - 9} = \frac{7}{4}; 4S_{ABN} = 7S_{ABN} - 63; S_{ABN} = 21, \\ S_{BMN} = 12.$$

$$2. \frac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}BM \cdot BN \cdot \sin \angle B}{\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \angle B}; \frac{12}{S_{ABC}} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 8}; S_{ABC} = 56.$$

Ответ: 56.

622. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AM : MB = 2 : 3$ ,  $BN : NC = 4 : 9$ ,  $S_{ABC} = 130$ .

Найти:  $S_{AMNC}$ .

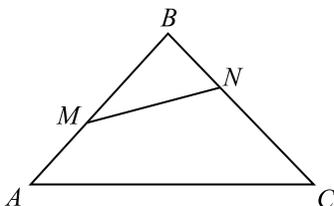


Рис. 50.

Решение. Сделаем чертёж (см. рис. 50).

Обозначим  $\frac{1}{5}AB = x$ ,  $\frac{1}{13}BC = y$ , тогда  $AB = 5x$ ,  $BM = 3x$ ,  $BN = 2y$ ,

$$BC = 13y. S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot 13y \cdot \sin \angle B,$$

$$S_{BNM} = \frac{1}{2}BM \cdot BN \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4y \cdot \sin \angle B, \frac{S_{ABC}}{S_{MBN}} = \frac{65xy \sin \angle B}{12xy \sin \angle B},$$

$$S_{MBN} = S_{ABC} \cdot \frac{12}{65} = \frac{130 \cdot 12}{65} = 24. S_{AMNC} = 130 - 24 = 106.$$

Ответ: 106.

623. Дано:  $\triangle ABC$  (см. рис. 51),  $BC = 2$ ,  $AD = 3$ ,  $\cos \angle BDC = \frac{13}{20}$ ,  
 $\angle ABC + \angle ADB = 180^\circ$ .

Найти: периметр  $\triangle ABC$ .

Решение. Так как по условию  $\angle ABC + \angle ADB = 180^\circ$ , а углы  $ADB$  и  $BDC$  смежные, то  $\angle BDC + \angle ADB = 180^\circ$ . Следовательно,  $\angle ABC = \angle BDC$ . Тогда  $\triangle ABC \sim \triangle BDC$  ( $\angle ABC = \angle BDC$ ,  $\angle C$  — общий).

Значит, справедлива пропорция  $\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ , откуда  $BC^2 = AC \cdot DC$ .

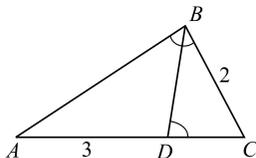


Рис. 51.

Пусть  $DC = x > 0$ . Тогда  $4 = (3 + x)x$ ,  $x^2 + 3x - 4 = 0$ ;  $x_1 = -4$  ( $< 0$  — не подходит),  $x_2 = 1$ . Таким образом,  $DC = 1$ ;  $AC = AD + DC = 4$ , применив к треугольнику  $ABC$  теорему косинусов, имеем:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC.$$

Так как  $\angle ABC = \angle BDC$ , то  $\cos \angle ABC = \cos \angle BDC = \frac{13}{20}$ . Обозначим,  $AB = y$ , ( $y > 0$ ). Получаем уравнение:  $16 = y^2 + 4 - 4y \cdot \frac{13}{20}$ ,  $5y^2 - 13y - 60 = 0$ ,  $y_1 = 5$ ,  $y_2 = -2,4$  ( $< 0$  — не подходит). Значит,  $AB = 5$ , а периметр треугольника  $ABC$  равен  $2 + 4 + 5 = 11$ .

Ответ: 11.

**624.** Дано:  $MH \cap KP = O$ ,  $KP = MH$ ,  $KH \parallel MP$ ,  $OH = 4$ ,  $OM = 5$  (см. рис.52).

Найти:  $\frac{POKM}{POHP}$ .

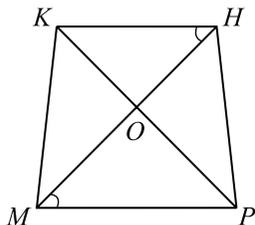


Рис. 52.

*Решение.*  $\triangle KOH \sim \triangle MOP$  ( $\angle KOH = \angle MOP$  — вертикальные;  $\angle KHO = \angle OMP$  — накрест лежащие).  $\frac{HO}{OM} = \frac{KO}{OP}$ ,  $\frac{4}{5} = \frac{KO}{OP}$ , но  $MH = KP = 9$ ;  $OK = \frac{4}{5}OP$ ;  $9 = PK = OK + OP = \frac{4}{5}OP + OP =$

$= \frac{9}{5}OP$ ;  $OP = 5$ ,  $KO = 4$ . Следовательно,  $MKHP$  — равнобедренная

трапеция,  $\frac{POKM}{POHP} = 1$ .

Ответ: 1.

**625.** Дано:  $\triangle ABC$  (см. рис. 53);  $AD$  и  $BE$  — медианы,  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $AC = 30$ ,  $BC = 12\sqrt{5}$ .

Найти:  $AB$ .

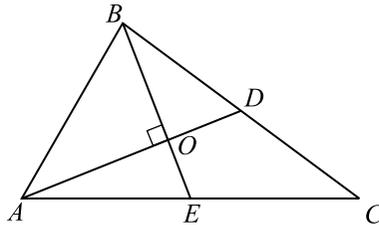


Рис. 53.

Решение.  $OD = \frac{1}{2}AO$ ;  $BD = \frac{1}{2}BC = 6\sqrt{5}$ . Из  $\triangle BOD$  имеем:

$$BD^2 = BO^2 + OD^2 = BO^2 + \frac{1}{4}AO^2. OE = \frac{1}{2}BO; AE = \frac{1}{2}AC = 15.$$

Из  $\triangle AOE$  имеем:  $AE^2 = AO^2 + OE^2 = AO^2 + \frac{1}{4}BO^2$ .

$$\begin{cases} BD^2 = BO^2 + \frac{1}{4}AO^2, \\ AE^2 = AO^2 + \frac{1}{4}BO^2; \end{cases} \begin{cases} 180 = BO^2 + \frac{1}{4}AO^2, \\ 225 = AO^2 + \frac{1}{4}BO^2; \end{cases}$$

$$405 = (AO^2 + BO^2) + \frac{1}{4}(AO^2 + BO^2). \text{ Из } \triangle ABO \text{ имеем } AO^2 + BO^2 =$$

$$= AB^2, \text{ следовательно } 405 = \frac{5}{4}AB^2, AB^2 = 324; AB = 18.$$

Ответ: 18.

**626.** Дано:  $\triangle ABC$  (см. рис. 54),  $AC = 10$ ,  $BC = 12$ ,  $\angle CAB = 2\angle CBA$ .

Найти:  $AB$ .

Решение. Пусть  $\angle CBA = \alpha$ , тогда  $\angle CAB = 2\alpha$ . Воспользуемся теоремой синусов для треугольника  $ABC$ :  $\frac{AC}{\sin \angle CBA} = \frac{BC}{\sin \angle CAB} \Rightarrow$

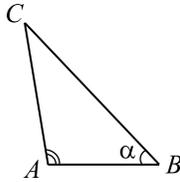


Рис. 54.

$\frac{10}{\sin \alpha} = \frac{12}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{12}{10}; \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{6}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$ . Далее применим теорему косинусов:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \alpha$ . Обозначая  $AB = x, x > 0$ , и подставляя значения известных величин в равенство теоремы косинусов, приходим к уравнению:  $100 = x^2 + 144 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{3}{5}x$ ;  $x^2 - \frac{72}{5}x + 44 = 0; 5x^2 - 72x + 220 = 0; x_1 = 10, x_2 = \frac{22}{5}$ .

Пусть  $AB = 10$ , тогда  $\triangle ABC$  — равнобедренный ( $AB = AC$ ), а значит  $\angle ACB = \angle CBA = \alpha$ . Но тогда из равенства  $\angle CAB + \angle ACB + \angle CBA = 180^\circ \Rightarrow 4\alpha = 180^\circ; \alpha = 45^\circ; \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{3}{5}$ . Получили противоречие. Следовательно,  $AB \neq 10$ . Получаем  $AB = \frac{22}{5} = 4,4$ .

Ответ: 4,4.

**627.** Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle B$  — тупой,  $BD$  — биссектриса,  $S_{ABD} = \frac{60\sqrt{2}}{11}$ ,  $S_{BDC} = \frac{50\sqrt{2}}{11}$ .

Найти:  $AC$ .

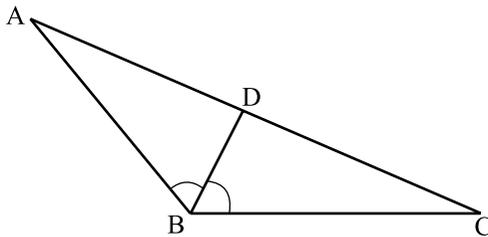


Рис. 55.

Решение. Сделаем чертёж (см. рис. 55).

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{AB \cdot BD}{BC \cdot BD} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{5}, BC = 5, \text{ значит, } AB = 6.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC, AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \\ = \frac{2 \cdot 110\sqrt{2}}{11}, \sin \angle ABC = \frac{2 \cdot 110\sqrt{2}}{11 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$\cos \angle ABC = -\sqrt{1 - \frac{4 \cdot 2}{9}} = -\frac{1}{3}. \text{ По теореме косинусов имеем:}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC; AC^2 = 36 + 25 + 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3},$$

$$AC^2 = 81, AC = 9.$$

Ответ: 9.

628.

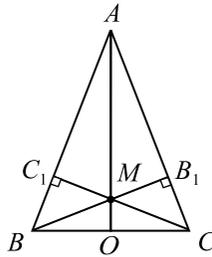


Рис. 56.

1) В  $\triangle ABB_1$  (см. рис. 56):  $\angle B_1 = 90^\circ$ ;  $AB = \sqrt{AB_1^2 + BB_1^2}$ ;  $AB = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40$ .

2) По условию  $AB = AC$ . Следовательно,  $B_1C = AC - AB_1$ ;  $B_1C = 40 - 24 = 16$ .

3) В  $\triangle BB_1C$ :  $\angle B_1 = 90^\circ$ ;  $BC = \sqrt{BB_1^2 + B_1C^2}$ ;  
 $BC = \sqrt{32^2 + 16^2} = 16\sqrt{5}$ .

4) В  $\triangle AOB$ :  $\angle O = 90^\circ$ ;  $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2}$ ;

$$AO = \sqrt{40^2 - (8\sqrt{5})^2} = 16\sqrt{5}.$$

5)  $\triangle AOC \sim \triangle AB_1M$  ( $\angle A$  — общий,  $\angle O = \angle B_1 = 90^\circ$ ), отсюда

$$\frac{AO}{AB_1} = \frac{OC}{MB_1}; \frac{16\sqrt{5}}{24} = \frac{8\sqrt{5}}{MB_1}; MB_1 = 12, \text{ тогда и } MC_1 = 12.$$

$$6) S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MC_1; S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 12 = 240.$$

Ответ: 240.

629.1)  $LP = LO + OP$  (см. рис. 57). Получаем, что  $LP = 5 + 4 = 9$ .

2)  $\triangle MLP \sim \triangle OLB$  ( $\angle L$  — общий,  $\angle P = \angle B = 90^\circ$ ), поэтому

$$\frac{LP}{LB} = \frac{PM}{BO}, \text{ но } PM = KP; \frac{9}{LB} = \frac{KP}{BO}, \text{ отсюда } LB = \frac{9BO}{KP}.$$

3)  $\triangle KOP \sim \triangle LOB$  ( $\angle 1 = \angle 2$  — вертикальные,  $\angle P = \angle B = 90^\circ$ ),

следовательно,  $\frac{OP}{OB} = \frac{KP}{LB}; \frac{4}{OB} = \frac{KP}{LB}$ , отсюда

$$LB = \frac{OB \cdot KP}{4}.$$

4) Из 2) и 3) следует, что  $\frac{9BO}{KP} = \frac{OB \cdot KP}{4}$ , отсюда  $KP^2 = 36; KP = 6$ .

$$5) S_{KLO} = S_{KLP} - S_{KOP} = \frac{1}{2} \cdot KP \cdot LP - \frac{1}{2} KP \cdot OP =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 15.$$

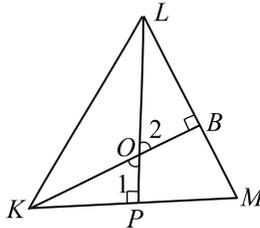


Рис. 57.

Ответ: 15.

$$630. S_{AMNB} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BN \cdot \sin \angle AON \text{ (см. рис. 58).}$$

В равнобедренном  $\triangle ACB$   $\angle C = 120^\circ$ , тогда  $\angle A = \angle B = 30^\circ$ .  $AM$  и  $BN$  биссектрисы  $\Rightarrow \angle MAB = \angle NBA = 15^\circ$ , тогда  $\angle AON = 30^\circ$ .

$$S_{ANMB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 6,25.$$

Ответ: 6,25.

631. 1. По условию  $\triangle ABC$  равнобедренный и  $\angle C = 120^\circ$ , следовательно  $\angle BAC = \angle ABC = 30^\circ$ .

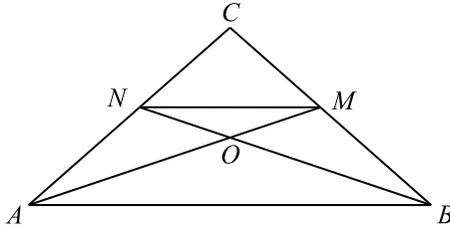


Рис. 58.

2.  $AM$  и  $BN$  биссектрисы, следовательно,  $\angle MAB = \angle NBA = 15^\circ$ , тогда  $\angle AON = 30^\circ$ , как внешний угол  $\triangle AOB$  (см. рис. 58).

$$3. S_{ANMB} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BN \cdot \sin \angle AON \Rightarrow AM \cdot BN = \frac{2S_{ANMB}}{\sin \angle AON} = \frac{2 \cdot 12,5}{0,5} = 49. \text{ Следовательно, } AM = BN = 7.$$

Ответ: 7.

632. Так как  $AD$  — биссектриса  $\angle BAC$  (см. рис. 59), то  $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} =$

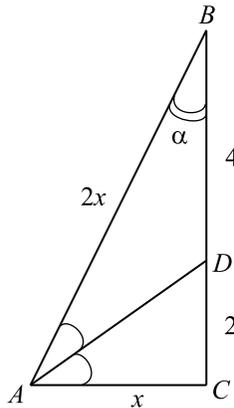


Рис. 59.

$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . Поэтому можем обозначить  $AB = 2x$ ,  $AC = x$ ,  $x > 0$ . Из  $\triangle ABC$  по теореме косинусов:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC$ ;  $36 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \frac{1}{2}$ . Отсюда  $x = 2\sqrt{3}$ . Теперь все стороны

треугольника  $ABC$  известны. По теореме, обратной теореме Пифагора, так как  $(2\sqrt{3})^2 + 6^2 = (4\sqrt{3})^2$  — истинное равенство, то  $\triangle ABC$  является прямоугольным и катет  $AC$  равен половине гипотенузы  $AB$ . Значит  $\angle ABC = 30^\circ$ .

Ответ: 30

**633.** Так как треугольник  $ABC$  — остроугольный (см. рис. 60), то высота  $BH$ , опущенная на боковую сторону  $AC$ , попадает на саму сторону, а не на её продолжение. Найдём  $BH$ .

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = 300 = \frac{1}{2}25 \cdot BH$ . Отсюда  $BH = 24$ . Из  $\triangle BCH$  имеем теперь по теореме Пифагора:  $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$ . Следовательно,  $AH = AC - CH = 25 - 7 = 18$ . Из треугольника  $ABH$  получаем по теореме Пифагора:  
 $AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$ .

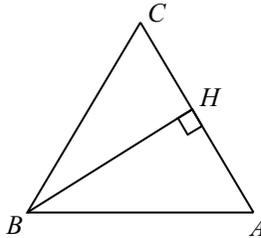


Рис. 60.

Ответ: 30.

**634.**

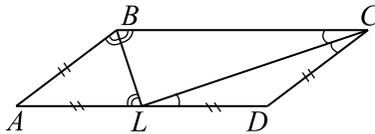


Рис. 61.

1)  $\angle CLD = \angle BCL$ , как накрест лежащие углы при параллельных прямых, (см. рис. 61). Так как  $CL$  — биссектриса  $\angle C$ , то есть  $\angle DCL = \angle BCL$ . Получаем  $\angle CLD = \angle DCL$ ;  $DL = CD$ . Аналогично,  $AL = AB$ . Поскольку  $AB = CD$ , как противоположные стороны параллелограмма, то  $AL = DL$ , и, значит,  $AL = \frac{1}{2}AD$ . Пусть  $h$  — высота парал-

лелогограмма  $ABCD$ , проведённая к стороне  $AD$ . Тогда  $S_{ABCD} = h \cdot AD$ ,  $S_{ABL} = \frac{1}{2}h \cdot AL = \frac{1}{4}h \cdot AD$ . Следовательно,  $S_{ABCD} = 4S_{ABL} = 60$ .

Отметим также, что для периметра  $p$  параллелограмма  $ABCD$  имеем выражение:

$$p = 2(AB + AD) = 2 \cdot \frac{3}{2}AD = 3AD = BC.$$

2)  $\angle BCL = \frac{1}{2}\angle C$ ,  $\angle CBL = \frac{1}{2}\angle B$ ,  $\angle B + \angle C = 180^\circ$ . Значит  $\angle BCL + \angle CBL = 90^\circ$ ,  $\angle BLC = 180^\circ - \angle BCL - \angle CBL = 90^\circ$ . Следовательно,  $\triangle BCL$  — прямоугольный. Значит  $2S_{BCL} = BL \cdot CL = h \cdot BC = S_{ABCD} = 60$ ,  $BL = \frac{60}{CL} = 5$ .

Из  $\triangle BCL$  по теореме Пифагора имеем:  $BC = \sqrt{BL^2 + CL^2} = 13$ . Итак,  $p = 3BC = 39$ .

Ответ: 39.

635.

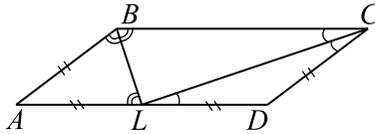


Рис. 62.

1) Так как  $\angle CLD = \angle BCL$  и  $\angle DCL = \angle BCL$ , то  $\angle CLD = \angle DCL$ , (см. рис. 62).

Следовательно,  $DL = CD$ , и, аналогично,  $AL = AB$ . Поскольку  $CD = AB$ , то  $DL = AL = \frac{1}{2}AD$ .

2) Так как  $\angle BCL = \frac{1}{2}\angle C$ ,  $\angle CBL = \frac{1}{2}\angle B$ , то  $\angle BCL + \angle CBL = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B = 90^\circ \Rightarrow \angle BLC = 90^\circ$ . Пусть  $CL = x$ , ( $x > 0$ ), тогда из  $\triangle BLC$  по теореме Пифагора имеем:  $BC = \sqrt{36 + x^2}$ . Таким образом,  $DL = CD = \frac{1}{2}\sqrt{36 + x^2}$  и  $CL + CD + DL = x + \sqrt{36 + x^2}$ . Так как по условию периметр  $\triangle BCL = 18$ , то  $x + \sqrt{36 + x^2} = 18$ ,  $\sqrt{36 + x^2} = 18 - x$ .

Отсюда  $x = 8$ . Итак,  $S_{BCL} = \frac{1}{2}BL \cdot CL = 24$ ,  $S_{ABCD} = 2S_{BCL} = 48$ .

Ответ: 48.

**636.** 1) Так как  $\angle ABL = \angle CBL = \angle BLA$ , то  $AB = AL$ . Аналогично,  $CD = DK$ . Следовательно, учитывая условие, получаем:  $LK = AD - AL - DK = 3AB - 2AB = AB$ , (см. рис. 63). Пусть  $P$  — точ-

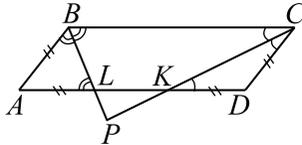


Рис. 63.

ка пересечения прямых  $BL$  и  $CK$ . Так как  $LK \parallel BC$ , то  $\triangle LKP \sim \triangle BCP$  с коэффициентом подобия  $k = \frac{LK}{BC} = \frac{1}{3}$ . Имеем:  $PL = \frac{1}{3}BP$ ,  $BL =$

$= \frac{2}{3}BP$ ,  $BP = \frac{3}{2}BL = 9$ . Аналогично находим, что  $CP = \frac{3}{2}CK = 12$ .

2) Так как  $\angle PBC = \frac{1}{2}\angle B$ ,  $\angle PCB = \frac{1}{2}\angle C$ ,  $\angle PBC + \angle PCB =$   
 $= \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90^\circ$ , то  $\angle BPC = 90^\circ$ .

3)  $S_{BCP} = \frac{1}{2}BP \cdot CP = 54$ ,  $S_{LKP} = k^2 \cdot S_{BPC} = \frac{1}{9} \cdot 54 = 6$ . Итак,

$S_{BCKL} = S_{BCP} - S_{LKP} = 48$ ,  $S_{BCKL} = \frac{h}{2} \cdot (BC + LK) = \frac{h}{2} \cdot \frac{4}{3}BC =$   
 $= \frac{2}{3}S_{ABCD}$  (здесь  $h$  обозначает высоту параллелограмма). Следова-

тельно,  $S_{ABCD} = \frac{3}{2}S_{BCKL} = 72$ .

Ответ: 72.

**637.** Так как  $\angle ABL = \angle CBL = \angle BLA$ , то  $AB = AL$ . Аналогично,  $CD = DK$ . Поскольку  $AL + DK = 2AB = \frac{4}{3}AD > AD$ , то точка пересечения отрезков  $BL$  и  $CK$  лежит внутри параллелограмма. Пусть  $P = BL \cap CK$  (см. рис. 64)  $KL = AL + DK - AD = 2AB - AD = 2 \cdot \frac{2}{3}AD -$

–  $AD = \frac{1}{3}AD$ .  $KL = AL + DK - AD = \frac{1}{3}AD$ . Пусть  $h$  — высота параллелограмма  $ABCD$  к стороне  $AD$ . Тогда

$$S_{BCLK} = \frac{1}{2}h \cdot (BC + KL) = \frac{1}{2}h(BC + \frac{1}{3}AD) = \frac{1}{2}h \cdot \frac{4}{3}BC = \frac{2}{3}S_{ABCD},$$

$$S_{ABCD} = \frac{3}{2}S_{BCLK}.$$

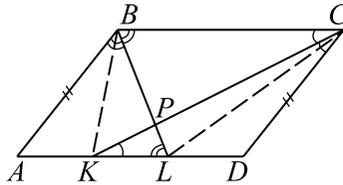


Рис. 64.

2) Заметим, что  $\angle BPC = 90^\circ$ , так как  $\angle PBC + \angle PCB = \frac{1}{2}(\angle B +$

$+ \angle C) = 90^\circ$ . Поэтому  $S_{BCLK} = \frac{1}{2}BL \cdot CK \cdot \sin 90^\circ = 30$ . Получаем

$$S_{ABCD} = \frac{3}{2}S_{BCLK} = \frac{3}{2} \cdot 30 = 45.$$

Ответ: 45.

**638.** Пусть  $ML$  — высота треугольника  $MEC$ . Тогда  $KL$  — высота трапеции  $FECD$  (см. рис. 65).

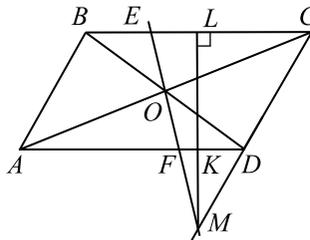


Рис. 65.

Рассмотрим треугольники  $MEC$  и  $MFD$ .  $\angle ECM$  и  $\angle FDM$  — соответственные,  $\angle CEM$  и  $\angle DFM$  — соответственные,  $\angle CME$  и  $\angle DMF$  — совпадают. Следовательно,  $\triangle CME \sim \triangle DMF$  — по трём равным уг-

лам. Так как, по условию,  $EC : FD = 2$ , то  $ML : KM = 2$ . Отсюда,  $EC = 2FD$ ,  $ML = 2KM$ . С учётом того, что  $LK = ML - KM = 2KM - KM = KM$ , получаем  $S_{FECD} = \frac{EC + FD}{2} \cdot KL = \frac{3FD \cdot KM}{2}$ .

$S_{ECM} = \frac{1}{2} EC \cdot ML = \frac{2FD \cdot 2KM}{2} = 2FD \cdot KM$ . Следовательно,

$$\frac{S_{FECD}}{S_{ECM}} = \frac{3FD \cdot KM}{4FD \cdot KM} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

**639.** Искомый периметр  $P_{ABD} = AB + AD + BD$ . Найдём стороны  $AB$ ,  $AD$  и  $BD$  (см. рис. 66).

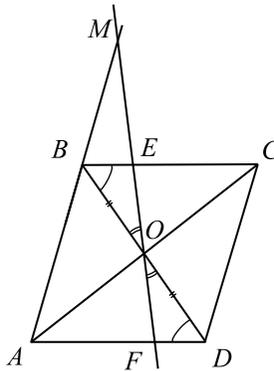


Рис. 66.

$AD = AF + FD$ . Чтобы найти  $FD$  покажем, что треугольники  $BOE$  и  $FOD$  равны.  $\angle EBO$  и  $\angle ODF$  — накрест лежащие,  $\angle BOE$  и  $\angle FOD$  — вертикальные,  $BO = OD$  — так как  $O$  — точка пересечения диагоналей. Следовательно,  $\triangle BOE = \triangle FOD$  — по стороне и двум прилежащим углам. Поэтому  $FD = BE = 1,6$ . Следовательно,  $AD = 6,4 + 1,6 = 8$ .

Найдём сторону  $AB$ . Рассмотрим треугольники  $BME$  и  $AMF$ .  $\angle MBE$  и  $\angle MAF$  — соответственные,  $\angle BME$  и  $\angle AMF$  — совпадают. Следовательно,  $\triangle BME \sim \triangle AMF$  — по двум равным углам. Из подобия треугольников имеем  $\frac{MB}{AM} = \frac{BE}{AF}$ ,  $AM = \frac{MB \cdot AF}{BE} = \frac{1 \cdot 6,4}{1,6} = 4$ . Получаем,  $AB = AM - BM = 4 - 1 = 3$ .

Найдём сторону  $BD$ . По теореме косинусов  
 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cos 60^\circ = 49$ ,  
 $BD = 7$ .

Получаем,  $P_{ABD} = 3 + 8 + 7 = 18$ .

Ответ: 18.

640. 1)  $\triangle BKP \sim \triangle CDP$  (по двум углам).

Значит,  $\frac{BK}{CD} = \frac{PK}{PD} = \frac{PK}{PK + DK} = \frac{6}{6 + 9} = \frac{2}{5}$ . Т.е.  $BK = \frac{2}{5}CD = 4$ .

2) Докажем, что  $\triangle BKP$  – равнобедренный (см. рис. 67).  
 $\angle BPK = \angle PDA$  (как накрест лежащие при параллельных прямых  $AD$ ,  $PC$  и секущей  $PD$ ),  $\angle BKP = \angle CDP$  (как соответственные при параллельных прямых  $AB$ ,  $CD$  и секущей  $PD$ ),  $\angle PDA = \angle CDP$  ( $DP$  – биссектриса  $\angle D$ ). Значит,  $\angle BPK = \angle BKP$  и  $BP = BK = 4$ .

3)  $P_{BKP} = BP + BK + PK = 4 + 4 + 6 = 14$ .

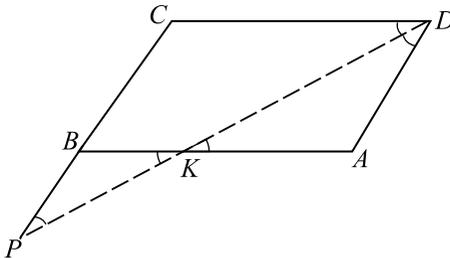


Рис. 67.

Ответ: 14.

641. 1)  $\triangle ABN \sim \triangle DMN$  (по двум углам). Значит,  $\frac{AB}{MD} = \frac{BN}{MN} =$   
 $= \frac{BM + MN}{MN} = \frac{6 + 4}{4} = \frac{5}{2}$ . То есть  $AB = \frac{5}{2}MD = 12,5$ .

2)  $\angle ANB = \angle NBC$  (как накрест лежащие),  $\angle ABN = \angle NBC$ ,  $BN$  – биссектриса  $\angle B$ . Значит,  $\angle ANB = \angle ABN$ , следовательно  $\triangle ABN$  – равнобедренный (см. рис. 68),  $AN = AB = 12,5$ .

3)  $P_{ABN} = AN + AB + BN = 12,5 + 12,5 + 10 = 35$ .

Ответ: 35.

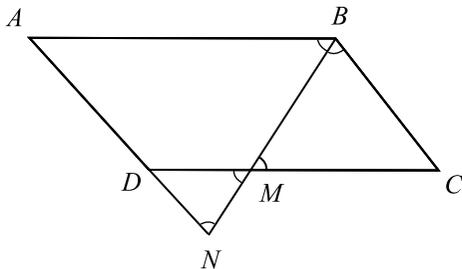


Рис. 68.

642.  $\cos \angle B = \cos(180^\circ - \angle A) = -\cos \angle A = \frac{\sqrt{5}}{5}$  (см. рис. 69).

Пусть  $AH_1$  высота параллелограмма, проведённая к стороне  $CB$ .

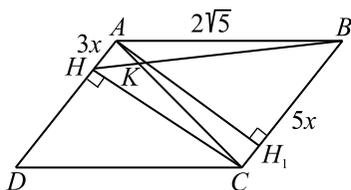


Рис. 69.

$BH_1 = 2\sqrt{5} \cdot \cos \angle B = 2$ ;  $AH_1 = CH = 4$ . Так как  $\triangle AHK \sim \triangle KBC$ , то  $\frac{AK}{KC} = \frac{AH}{BC} = \frac{3}{5}$ . Пусть  $AH = 3x$ , тогда  $BC = 5x$ . Так как четырёхугольник  $AHCH_1$  является прямоугольным, то  $AH = CH_1 = 3x \Rightarrow BH_1 = BC - CH_1 = 2x = 2 \Rightarrow x = 1$ ,  $BC = 5$ .  $S_{ABCD} = BC \cdot AH_1 = 5 \cdot 4 = 20$ .

Ответ: 20.

643.  $\angle CDN = \angle DNA$  (как накрест лежащие),  $\angle CDN = \angle NDA$  ( $DN$  — биссектриса  $\angle D$ ). Следовательно  $\angle ADN = \angle DNA$ . Следовательно  $\triangle ADN$  — равнобедренный (см. рис. 70).  $AD = AN = AB - BN = DC - BN = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle ADN = \angle BMN$  (как накрест лежащие),  $\angle BNM = \angle DNA$  (вертикальные). Так как  $\angle NDA = \angle DNA$ , то  $\angle BNA = \angle BMN$ . Следовательно,  $\triangle NBM$  — равнобедренный.  $BN = BM = \sqrt{3}$ .  $\triangle DCM \sim \triangle NBM$  (по двум углам:  $\angle M$  — общий,  $\angle CDM = \angle BNM$  — соответственные),  $\frac{DC}{BN} = \frac{DM}{NM}$ .  $NM = \frac{BN \cdot DM}{DC}$ ,  $NM = 3$ . Из  $\triangle BNM$  по теореме косинусов

$MN^2 = BN^2 + BM^2 - 2BN \cdot BM \cdot \cos \angle NBM$ ,  $\cos \angle NBM = -\frac{1}{2}$ ,  
 $\angle NBM = 120^\circ$ .  $\angle NBC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ . Из  $\triangle CBN$  по теореме  
 косинусов  
 $CN^2 = BC^2 + BN^2 - 2BC \cdot BN \cos \angle NBC$ ,  $CN^2 = 9$ ,  $CN = 3$ .

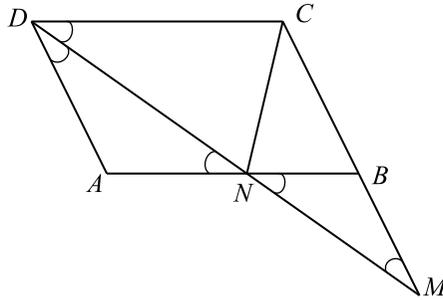


Рис. 70.

Ответ: 3.

644. Пусть  $h_1 = 5$ ,  $h_2 = 7$ ,  $AB = b$ ,  $AD = a$  (см. рис. 71).

$S_{ABCD} = ah_1 = bh_2 \Rightarrow 5a = 7b$ , кроме того периметр параллелограмма равен  $2(a+b) = 48$ .  $\begin{cases} 5a - 7b = 0, \\ a + b = 24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14, \\ b = 10. \end{cases}$  Тогда  $\sin \alpha = \frac{h_1}{b} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ .

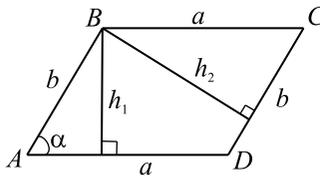


Рис. 71.

Ответ: 0,5.

645. Пусть  $h_1 = 3\sqrt{2}$ ,  $h_2 = 5\sqrt{2}$  (см. рис. 71).  $S_{ABCD} = ah_1 = bh_2$ ,  $\Rightarrow$   
 $3a\sqrt{2} = 5b\sqrt{2}$ , так же  $2(a+b) = 32$ .  $\begin{cases} 3a\sqrt{2} = 5b\sqrt{2}, \\ a + b = 16. \end{cases}$

Решив систему, получим  $a = 10, b = 6. \sin \alpha = \frac{h_1}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1.$

Ответ: 1.

646. 1. Найдём сторону ромба (см. рис. 72).  $S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin \angle A,$   
 $AB > 0, AB = \sqrt{\frac{S_{ABCD}}{\sin \angle A}} = \sqrt{\frac{135 \cdot 5}{3}} = 15.$

2. Найдём высоту  $DK.$   $S_{ABCD} = BC \cdot DK, DK = \frac{S_{ABCD}}{BC} =$   
 $= \frac{135}{15} = 9.$

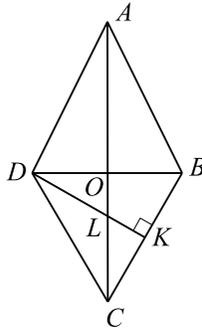


Рис. 72.

3. Найдём  $\sin \angle \frac{A}{2}.$   $\cos \angle A = \frac{4}{5}, 2 \sin^2 \angle \frac{A}{2} = 1 - \cos \angle A =$   
 $= 1 - 0,8 = 0,2, \angle A$  — острый,  $\sin \angle \frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$

4. Найдём  $OB$  и  $BD.$   $OB = AB \cdot \sin \angle \frac{A}{2} = 15 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 1,5\sqrt{10},$   
 $BD = 2 \cdot OB = 3\sqrt{10}.$

5. Найдём  $DL.$   $\triangle DKB \sim \triangle DOL$  ( $\angle D$  — общий,  
 $\angle DKB = \angle DOL = 90^\circ$ ),  $\frac{BD}{DL} = \frac{DK}{DO}, DL = \frac{BD \cdot DO}{DK} =$   
 $= \frac{3\sqrt{10} \cdot 1,5\sqrt{10}}{9} = 5.$

Ответ: 5.

647. Дано:  $ABCD$  — трапеция,  $MN$  — средняя линия,  $MN = 10$ ,  
 $\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{3}{5}$  (см. рис. 73).

Найти:  $AD$ .

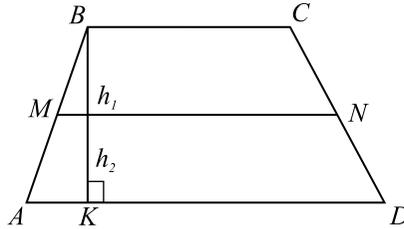


Рис. 73.

*Решение.* Обозначим одну восьмую часть площади трапеции через  $x$ , тогда

$S_{MBCN} = 3x$ ,  $S_{AMND} = 5x$ ,  $S_{ABCD} = 8x$ . Пусть  $AD = a$ ,  $a > 10$ . Так как  $MN = \frac{BC + AD}{2}$  (по теореме о средней линии трапеции),  $BC =$

$= 2MN - AD = 20 - a$ . Проведём высоту  $BK = h_1 + h_2$ , где  $h_1$  — высота трапеции  $MBCN$ ,  $h_2$  — высота трапеции  $AMND$ .

$$S_{MBCN} = \frac{MN + BC}{2} \cdot h_1; 3x = \frac{10 + 20 - a}{2} \cdot h_1; h_1 = \frac{6x}{30 - a}.$$

$$S_{AMND} = \frac{MN + AD}{2} \cdot h_2; 5x = \frac{10 + a}{2} \cdot h_2; h_2 = \frac{10x}{10 + a}.$$

$$S_{ABCD} = 10 \cdot (h_1 + h_2); h_1 + h_2 = \frac{8x}{10} = \frac{4x}{5}, \frac{6x}{30 - a} + \frac{10x}{10 + a} = \frac{4x}{5};$$

$\frac{3}{30 - a} + \frac{5}{10 + a} = \frac{2}{5}$ ;  $a^2 - 25a + 150 = 0$ ;  $a_1 = 15$ ,  $a_2 = 10$  не удовлетворяет условию  $a > 10$ .  $AD = 15$ .

Ответ: 15.

648. Дано:  $ABCD$  — равнобедренная трапеция, вписанная,  $AD = 21$ ,  $BC = 9$ ,  $BH$  — высота,  $BH = 8$  (см. рис. 74).

Найти: диаметр описанной окружности.

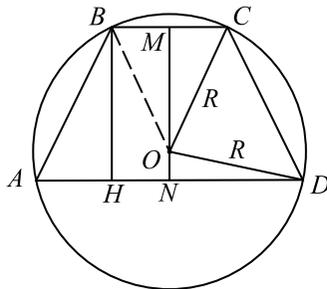


Рис. 74.

*Решение.* Обозначим через  $O$  — центр описанной около трапеции окружности.  $MN$  — высота трапеции, проходящая через точку  $O$ . Так как  $OC = OB$  (радиус описанной окружности), то  $\triangle OBC$  — равнобедренный.  $OM$  — высота  $\triangle BOC$ , а следовательно и медиана. Поэтому

$$BM = MC; MC = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2}. \text{ Аналогично } ND = AN. ND = \frac{AD}{2} = \frac{21}{2}.$$

Пусть  $MO = x$ ,  $x > 0$ , тогда  $ON = 8 - x$ . Так как  $MN$  — высота трапеции, то  $\angle CMO = 90^\circ$ ,  $\angle OND = 90^\circ$ . Следовательно  $\triangle CMO$  и  $\triangle OND$  — прямоугольные. Из  $\triangle MOC$  имеем:

$OC^2 = MC^2 + MO^2$ . Пусть  $R$  — радиус описанной окружности. Тогда

$$R^2 = OC^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + x^2 \quad (1). \text{ Из } \triangle NOD \text{ имеем:}$$

$$OD^2 = ON^2 + ND^2, R^2 = OD^2 = (8 - x)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2 \quad (2). \text{ Из (1) и (2)}$$

$$\text{имеем: } \left(\frac{9}{2}\right)^2 + x^2 = (8 - x)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2; \frac{81}{4} + x^2 = \frac{441}{4} + 64 - 16x + x^2;$$

$$16x = 154; x = \frac{77}{8} = 9\frac{5}{8}. \text{ Из (1) имеем: } R^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{77}{8}\right)^2 = \frac{7225}{64};$$

$$R = \frac{85}{8}. \text{ Диаметр окружности } D = 2R = \frac{85}{4} = 21,25.$$

*Ответ:* 21,25.

649. Дано:  $ABCD$  — трапеция,  $BC = 5$ ,  $AD = 10$ ,  $AC = 9$ ,  $BD = 12$ .

Найти:  $S_{ABCD}$ .

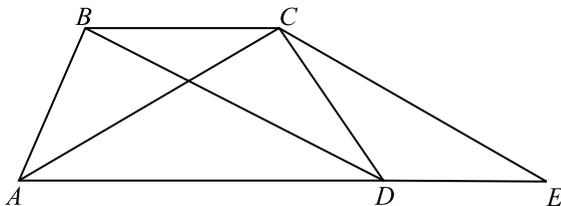


Рис. 75.

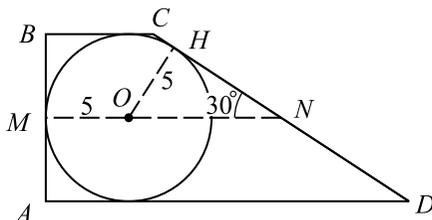


Рис. 76.

*Решение.* Через вершину  $C$  проведём  $CE \parallel BD$  (см. рис. 75). Продолжим отрезок  $AD$  до пересечения с  $CE$ . Четырёхугольник  $DBCE$  — параллелограмм,  $CE = BD = 12$ ,  $DE = BC = 5$ .  $S_{ABCD} = S_{ACE}$ . Найдём  $S_{ACE}$  по формуле Герона.  $AC = 9$ ,  $CE = 12$ ,  $AE = 15$ . Полупериметр  $\triangle ACE$   $p = \frac{9 + 12 + 15}{2} = 18$ .  $S_{ACE} = \sqrt{p(p - AC)(p - CE)(p - AE)} = \sqrt{18(18 - 9)(18 - 12)(18 - 15)} = 3 \cdot 18 = 54$ .  $S_{ABCD} = 54$ .

*Ответ:* 54.

**650.** Пусть  $O$  — центр вписанной в трапецию  $ABCD$  окружности. Точка  $O$  лежит на средней линии (см. рис. 76)  $MN$  трапеции, так как равноудалена от прямых  $AD$  и  $BC$ . А поскольку угол  $BAD = 90^\circ$ , то и угол  $OMA$  — тоже прямой. Значит,  $M$  — точка касания. Поэтому  $MO = 5$ . Пусть  $H$  — точка касания окружности со стороной  $CD$ . Тогда  $\angle NHO = 90^\circ$ ,  $OH = 5$ . Из прямоугольного треугольника  $OHN$  находим  $ON = 2OH = 10$ , то есть  $MN = MO + ON = 15$ .

*Ответ:* 15.

**651.** 1. Пусть  $O$  — центр окружности с диаметром  $AC$ .  $AO = KO$  как радиусы, значит  $\triangle AOK$  равнобедренный. Проведём высоту  $OM$ , тогда  $OM$  — медиана в  $\triangle KOA \Rightarrow AK = 2AM = 2AO \cos \alpha = 18 \cos \alpha$  (см. рис. 77).

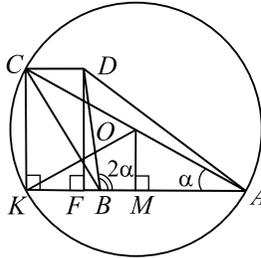


Рис. 77.

2. В трапеции  $ABCD$  проведём высоты  $DF$  и  $CK$  ( $\angle CKA = 90^\circ$  как опирающийся на диаметр  $AC$ ). Пусть  $2\alpha = 90^\circ$ , тогда  $DB$  совпадает с высотой  $DF = FK$ . И, значит,  $CK = DB$ . Но тогда  $CK = 18 \cos \alpha = 18 \cos 45^\circ = 9\sqrt{2} \neq 16 = DB$ . Следовательно,  $2\alpha \neq 90^\circ$ . Из  $\triangle AKC$ ,  $CK = AC \sin \alpha = 18 \sin \alpha$ . Из  $\triangle BFD$  получаем: 1) если  $2\alpha < 90^\circ$ , то  $DF = BD \sin 2\alpha = 16 \sin 2\alpha$ ; 2) если  $2\alpha > 90^\circ$ , то  $DF = BD \sin(180^\circ - 2\alpha) = BD \sin 2\alpha = 16 \sin 2\alpha$ . Тогда  $CK = DF$ ;  $18 \sin \alpha = 32 \sin \alpha \cos \alpha$ ;  $\cos \alpha = \frac{9}{16}$ .

$$3. AK = 18 \cdot \frac{9}{16} = \frac{81}{8} = 10,125.$$

Ответ: 10,125.

652. Пусть  $AC = 12$ ;  $DB = 10$ ;  $\angle OAB = x$ , тогда  $\angle OBA = 2x$  (см. рис. 78).

1. Высоту трапеции можно найти как  $AC \cdot \sin x$ . Пусть  $2x = 90^\circ$ , тогда

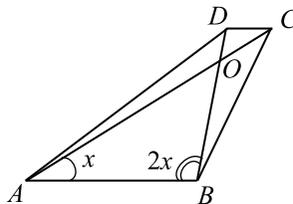


Рис. 78.

$DB$  — высота трапеции. И, значит,  $AC = \sin x = 12 \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \neq 10 = DB$ . Следовательно  $2x \neq 90^\circ$ .

2. Если  $2x > 90^\circ$ , то высота трапеции будет равна  $DB \sin(180^\circ - 2x) = DB \sin 2x$ . Если  $2x < 90^\circ$ , то высота трапеции будет равна  $DB \sin 2x$ . Тогда, с учётом п. 1, получаем  $AC \sin x = DB \sin 2x$ ;  $12 \sin x = 10 \sin 2x$ .

$$\begin{aligned} 3. S_{ADCB} &= \frac{1}{2} AC \cdot DB \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \sin(180^\circ - (x + 2x)) = \\ &= 60 \sin 3x. \text{ Найдём } \sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = \\ &= \frac{108}{125} - \frac{64}{125} = \frac{44}{125}. \text{ Следовательно } S_{ADCB} = GO \cdot \frac{44}{125} = 21,12. \end{aligned}$$

Ответ: 21,12.

653.

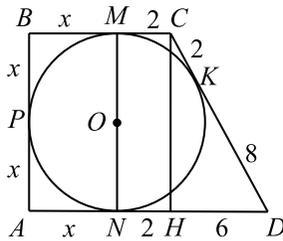


Рис. 79.

Дано:  $ABCD$  — прямоугольная трапеция (см. рис. 79);  $CK = 2$ ;  $KD = 8$ ,  $\angle BAD = 90^\circ$ .

Найти:  $P_{ABCD}$ .

Решение. Проведём  $MN \perp AD$  через центр вписанной окружности. Тогда точки  $M$  и  $N$  являются точками касания окружности со сторонами  $BC$  и  $AD$  соответственно.

$MC = CK = 2$  и  $DK = DN = 8$  как отрезки касательных.

$BM = BP = PA = AN = x$  (аналогично). Опустим высоту  $CH$ .

$HD = DN - NH = 8 - 2 = 6$ . Из  $\triangle HCD$ :  $CH^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2$ ;  $CH = 8$ .

$BA \parallel CH$ , так как по условию  $\angle BAD = 90^\circ$ . Следовательно,  $BA = CH$  (как отрезки, заключённые между параллельными прямыми). Получаем,  $2x = 8$ ;  $x = 4$ . Теперь найдём  $P_{ABCD} = 4x + 2 + 10 + 8 = 20 + 16 = 36$ .

Ответ: 36.

654. Дано:  $ABCD$  — трапеция; (см. рис. 80)  $AD : BC = 3 : 1$ ;  $O$  — точка пересечения диагоналей,  $S_{AOB} = 6$ .

Найти:  $S_{ABCD}$ .

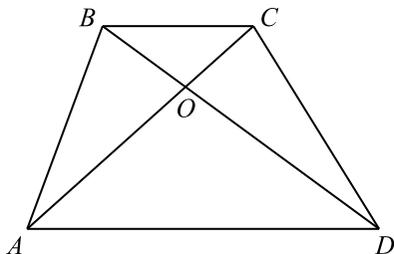


Рис. 80.

1.  $S_{ABD} = S_{ABO} + S_{AOD}$ ;  $S_{ACD} = S_{COD} + S_{AOD}$ . Так как  $S_{ABD} = S_{ACD} = \frac{H \cdot AD}{2}$ , то  $S_{ABO} + S_{AOD} = S_{COD} + S_{AOD}$ ;  $S_{ABO} = S_{COD}$ .

2. Из подобия треугольников  $BOC$  и  $AOD$  следует,  $\frac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = k^2 = \frac{1}{9}$ , где  $k$  — коэффициент подобия;  $S_{\triangle AOD} = 9S_{\triangle BOC}$ .

3. Так как  $OC = \frac{1}{3}AO$ , то  $S_{BOC} = \frac{1}{2}h \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{3}AO = \frac{1}{3}S_{AOB} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ .  $S_{\triangle AOB} = 3S_{\triangle BOC}$ . Получим:

$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} = 6 + 2 + 6 + 18 = 32$ .

Ответ: 32.

655.

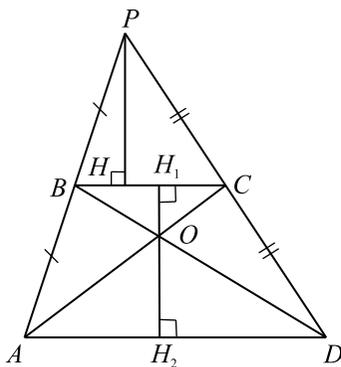


Рис. 81.

Пусть  $BC = x$ , тогда  $AD = 2x$  (см. рис. 81).  $\triangle BOC \sim \triangle AOD$  (по двум углам), значит  $\frac{OH_1}{OH_2} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$ . Так как  $BC = \frac{1}{2}AD$ , то  $BC$  — средняя линия  $\triangle APD$ . Следовательно высота  $\triangle BCC PH = H_1H_2 = 3OH_1$ . По условию  $\frac{x \cdot OH_1}{2} = 3$ , значит  $S_{BOC} = \frac{x \cdot 3OH_1}{2} = 9 = S_{\triangle BPC}$ .  $S_{PCOB} = S_{\triangle BPC} + S_{\triangle BOC} = 9 + 3 = 12$ .

Ответ: 12.

656.

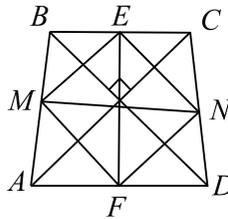


Рис. 82.

В треугольниках  $ABC$  и  $ADC$  (см. рис. 82)  $ME$  и  $FN$  — средние линии. Следовательно,  $ME \parallel NF$ ,  $ME = NF$ , то есть  $MENF$  — параллелограмм. По условию  $AC \perp BD \Rightarrow ME \perp EN \Rightarrow MENF$  — прямоугольник. Значит  $EF = MN = 9$ .

Ответ: 9.

657.

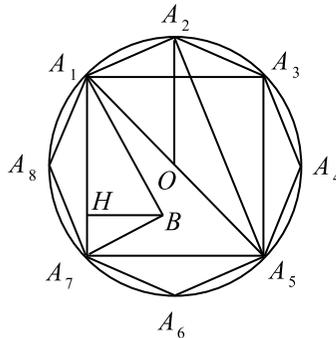


Рис. 83.

Дано:  $A_1A_2\dots A_8$  — правильный восьмиугольник,  
 $S_{A_1A_3A_5} = 9$ ;  $S_{A_2OA_5} = S_{A_1BA_7}$ ;  $BH \perp A_1A_7$ . Найти  $BH$  (см. рис. 83).  
 Решение:

1) Из равенства  $\triangle A_1A_2A_3$  и  $\triangle A_3A_4A_5$  имеем  $A_1A_3 = A_3A_5$ .  
 $\angle A_1A_3A_5 = \angle A_2A_3A_4 - \angle A_2A_3A_1 - \angle A_4A_3A_5$ . Так как  $\angle A_2A_3A_4 =$   
 $= \frac{180^\circ(8-2)}{8} = 135^\circ$  и  $\angle A_2A_3A_1 + \angle A_4A_3A_5 = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ , то  
 $\angle A_1A_3A_5 = 90^\circ$ . Следовательно  $A_3A_5$  — диаметр описанной окружности  
 и  $A_1A_3 = A_3A_5 = R\sqrt{2}$ .

$$S_{A_1A_3A_5} = \frac{1}{2}A_1A_3 \cdot A_3A_5 = R^2; R^2 = 9; R = 3.$$

2) Так как  $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ , то  $\angle A_2OA_5 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ ;

$$S_{A_2OA_5} = \frac{1}{2} \cdot A_2O \cdot A_5O \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{2}R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

3) Из равенства  $\triangle A_1A_8A_7$  и  $\triangle A_1A_2A_3$  имеем  $A_1A_7 = A_1A_3 = R\sqrt{2}$ .

Тогда  $S_{A_1A_7B} = \frac{1}{2}A_1A_7 \cdot BH = \frac{1}{2}R\sqrt{2} \cdot BH = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot BH$ . Учитывая, что по

условию  $\triangle A_1A_7B$  и  $\triangle A_2OA_5$  равновелики, получаем  $\frac{3\sqrt{2}}{2}BH = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ ;  
 $BH = 1,5$ .

Ответ: 1,5.

658.

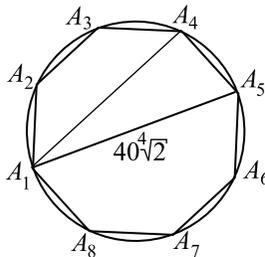


Рис. 84.

1)  $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 135^\circ$ ;  $180n - 360 = 135n$ ;  $45n = 360$ ,  $n = 8$ , значит,  
 дан правильный восьмиугольник (см. рис. 84).

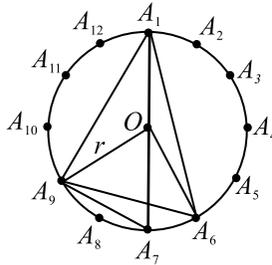


Рис. 85.

2)  $\angle A_1 A_5 A_4 = \angle A_1 A_5 A_6$  (как углы, опирающиеся на равные дуги  $\smile A_1 A_2 A_4$  и  $\smile A_1 A_8 A_6$ ). Следовательно,  $\angle A_1 A_5 A_4 = \frac{1}{2} \angle A_5 =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot 135^\circ = 67,5^\circ$ .

3) Из четырёхугольника  $A_1 A_2 A_3 A_4$  следует  $\angle A_3 A_4 A_1 + \angle A_2 A_1 A_4 = 360^\circ - \angle A_1 A_2 A_3 - \angle A_2 A_3 A_4 = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ$ .  $\angle A_3 A_4 A_1 = \angle A_2 A_1 A_4 = 45^\circ$ . Тогда  $\angle A_1 A_4 A_5 = \angle A_3 A_4 A_5 - \angle A_3 A_4 A_1 = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ . Следовательно,  $A_1 A_5$  — диагональ описанной окружности. Сторона восьмиугольника  $a_8 = 2R \sin \frac{180^\circ}{8}$ , где  $2R = A_1 A_5 = 40 \sqrt[4]{2}$ ;  $a_8 = 40 \sqrt[4]{2} \cdot \sin 22,5^\circ$ .

4)  $S_{A_1 A_4 A_5} = \frac{1}{2} A_1 A_5 \cdot A_4 A_5 \cdot \sin \angle A_4 A_5 A_1 =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot 40 \sqrt[4]{2} \cdot 40 \sqrt[4]{2} \cdot \sin 22,5^\circ \cdot \sin 67,5^\circ = 800 \sqrt{2} \sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ =$   
 $= 400 \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 400 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 400$ .

Ответ: 400.

**659. Решение.** Так как двенадцатиугольник правильный, то  $\angle A_6 O A_9$  равен

$3 \cdot \frac{360^\circ}{12} = 90^\circ$  (см. рис. 85). Обозначим через  $r$  радиус, описанной около двенадцатиугольника окружности. Тогда площадь треугольника

$$S_{\triangle A_6 O A_9} = \frac{1}{2} A_6 O \cdot A_9 O = \frac{1}{2} r^2.$$

$$S_{\triangle A_1 O A_9} = \frac{1}{2} A_1 O \cdot A_9 O \sin 120^\circ = \frac{1}{2} r^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} r^2}{4};$$

$$S_{\triangle A_7 O A_9} = \frac{1}{2} A_7 O \cdot A_9 O \sin 60^\circ = \frac{1}{2} r^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} r^2}{4}.$$

Откуда,  $S_{\triangle A_1 A_7 A_9} = S_{\triangle A_1 O A_9} + S_{\triangle A_7 O A_9} = \frac{\sqrt{3} r^2}{2} = 6\sqrt{3}$ . Следовательно,  $r^2 = 12 \Rightarrow S_{\triangle A_6 O A_9} = 6$ .

Ответ: 6.

**660.** Дано:  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$  — правильный шестиугольник (см. рис. 86),  $A_1 A_2 = \sqrt{2\sqrt{3} + 3}$ ,  $O \in A_4 A_5$ ,  $\angle A_6 A_2 O = \angle A_3 A_2 O$ .

Найти:  $S_{A_2 A_5 O}$ .

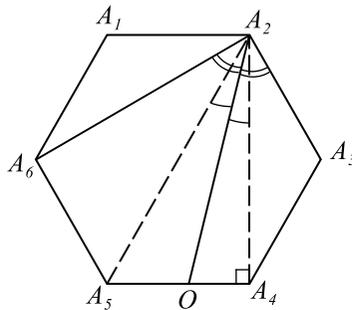


Рис. 86.

1. Так как шестиугольник  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$  — правильный, то все его углы равны по  $120^\circ$ .  $\triangle A_1 A_2 A_6$  — равнобедренный, поэтому

$\angle A_1 A_6 A_2 = \angle A_1 A_2 A_6 = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ . Аналогично,  $\angle A_3 A_2 A_4 = 30^\circ$ .  $\angle A_6 A_2 A_3 = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ . Так как  $A_2 A_5$  — ось симметрии шестиугольника, то  $A_2 A_5$  — биссектриса угла  $A_1 A_2 A_3$ , и  $\angle A_3 A_2 A_5 = 60^\circ$ ,  $A_6 A_2 A_5 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ . Так как  $A_2 O$  — биссектриса  $\angle A_6 A_2 A_3$  и  $\angle A_6 A_2 A_5 = \angle A_3 A_2 A_4$ , то  $A_2 O$  — биссектриса  $\angle A_5 A_2 A_4$ .

2. Обозначим длину стороны шестиугольника через  $a$ . Тогда по теореме косинусов из треугольника  $A_2 A_3 A_4$  следует, что  $A_2 A_4 = \sqrt{A_2 A_3^2 + A_3 A_4^2 - 2 A_2 A_3 \cdot A_3 A_4 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot (-0,5)} = a\sqrt{3}$ . В силу того, что  $\angle A_2 A_4 A_5 = \angle A_5 A_4 A_3 - \angle A_3 A_4 A_2 = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ , из прямоугольного тре-

угольника  $A_2A_4A_5$  находим  $A_2A_5 = \sqrt{A_5A_4^2 + A_2A_4^2} = 2a$ . Так как  $A_2O$  — биссектриса в треугольнике  $A_2A_4A_5$ , то по свойству биссектрисы  $\frac{A_5O}{OA_4} = \frac{A_5A_2}{A_2A_4} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{A_5O}{A_4A_5} = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow A_5O = \frac{2a}{2 + \sqrt{3}}$ .

$$\begin{aligned} 3. S_{A_2A_5O} &= \frac{1}{2} A_5O \cdot A_2A_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{2 + \sqrt{3}} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{(2\sqrt{3} + 3) \cdot \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

**661.** Пусть  $A_1A_2 = a$ ,  $a > 0$ , тогда так как  $\triangle OA_1A_2$  — равносторонний, (покажите это) то  $OB_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  (см. рис. 87).

$$S_{A_1A_2A_3A_6} = 3 \cdot S_{A_1OA_2} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

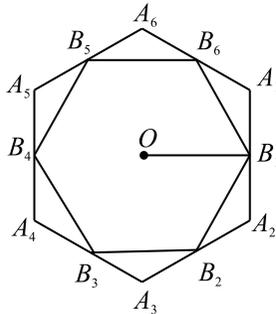


Рис. 87.

$$\begin{aligned} S_{B_1B_2B_3B_4B_5B_6} &= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{B_1OB_2} = 3 \cdot OB_1 \cdot OB_2 \sin \angle B_1OB_2 = \\ &= 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} \sin 60^\circ = \frac{9a^2\sqrt{3}}{8}; \end{aligned}$$

$$\frac{S_{B_1B_2B_3B_4B_5B_6}}{S_{A_1A_2A_3A_6}} = \frac{9 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8}}{3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

**662.** Пусть сторона шестиугольника равна  $a$ , радиус описанной окружности около шестиугольника  $R = a$ , а сторона треугольника  $A_1A_3 = R\sqrt{3} = a\sqrt{3}$  (см. рис. 88). Тогда сторона шестиугольника

$B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ , например,  $B_1B_2 = \frac{1}{3}A_1A_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Отсюда

$S_{\Delta B_1OB_2} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ ;  $a = \sqrt[4]{27}$ . Площадь фигуры, которая

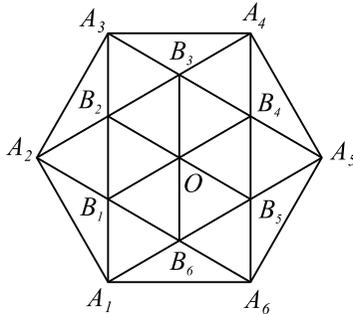


Рис. 88.

является объединением  $\Delta A_1A_3A_5$  и  $\Delta A_2A_4A_6$ , это  $S_{A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_5B_5A_6B_6} = 2S_{B_1B_2B_3B_4B_5B_6} = \frac{12 \cdot a^2\sqrt{3}}{12} = a^2\sqrt{3} = (\sqrt[4]{27})^2 \cdot \sqrt{3} = 9$ .

Ответ: 9.

**663.** Углы  $APH$  и  $ADP$  равны, так как каждый из них в сумме с углом  $PAH$  даёт  $90^\circ$ . Следовательно  $\angle APH = 30^\circ$ .  $AP = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = 4$ .

$PD = AP \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3}$ . Углы  $DAC$  и  $DBC$  равны, как опирающиеся на одну дугу.  $\angle BPC = \angle APD$  (как вертикальные). Следовательно, треугольники  $ADP$  и  $BCP$  подобны.

$$AP : PD = BP : PC. BP = \frac{AP \cdot PC}{DP} = 2\sqrt{3}. \frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}DP \cdot AC}{\frac{1}{2}PB \cdot AC} = \frac{DP}{PB} = 2.$$

Ответ: 2.

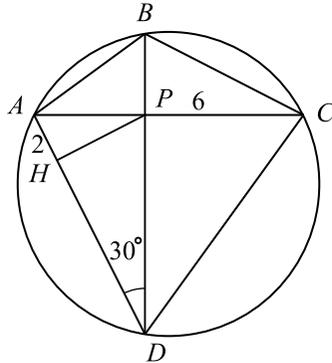


Рис. 89.

**664.** Так как  $O_1A = 3$ ,  $O_2A = 4$ ,  $O_1O_2 = 5$ , то  $\triangle O_1O_2A$  является прямоугольным по теореме, обратной теореме Пифагора (см. рис. 90).

$$S_{O_1O_2A} = \frac{1}{2} \cdot O_1O_2 \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot S_{O_1O_2A}}{O_1O_2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot O_1A \cdot O_2A}{O_1O_2} = \frac{12}{5}.$$

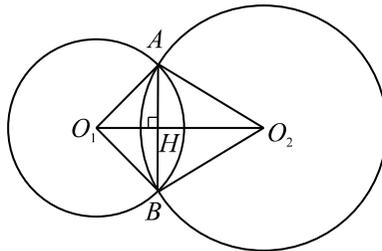


Рис. 90.

$$AB = 2 \cdot AH = \frac{24}{5}.$$

Ответ: 4,8.

**665.** Дано: сектор,  $O$  — центр окружности, вписанной в сектор,  $AC$  — радиус сектора,  $AC = 9$ ,  $P_{\text{сект.}} = 18 + 3\pi$  (см. рис. 91).

Найти: радиус окружности.

*Решение.* Пусть  $\ell_{BC}$  — длина дуги  $BC$ ;  $\angle BAC = \alpha$ . Тогда  $\ell_{BC} = \alpha \cdot AC = \alpha \cdot 9 = 9\alpha$ .

$$P_{\text{сект.}} = AB + \ell_{BC} + AC = 2 \cdot 9 + 9\alpha = 18 + 9\alpha.$$

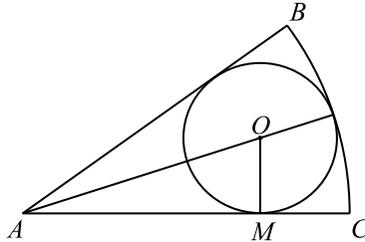


Рис. 91.

По условию  $P_{\text{сект.}} = 18 + 3\pi$ , значит  $9\alpha = 3\pi$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .  $\angle CAO =$   
 $= \angle BAO = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6}$ . Пусть  $r$  — радиус окружности, вписанной в сектор.

Из  $\triangle AOM$ :  $\sin \angle OAM = \frac{OM}{AO}$ ;  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{r}{9-r}$ ;  $\frac{r}{9-r} = \frac{1}{2}$ ;  $r = 3$ .

Ответ: 3.

666.

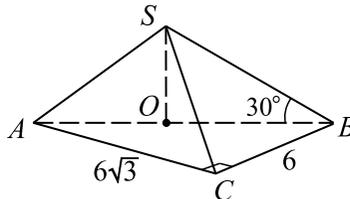


Рис. 92.

Дано:  $SABC$  — пирамида (см. рис. 92).  
 $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 6\sqrt{3}$ ,  $BC = 6$ .  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  наклонены к плоскости основания под углом  $30^\circ$ .

Найти:  $V_{SABC}$ .

Решение. Так как боковые рёбра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ . А так как  $\triangle ABC$  — прямоугольный, то центр  $O$  описанной окружности лежит на середине  $O$  гипотенузы. Следовательно,  $\angle SBA = 30^\circ$ .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}, AB = \sqrt{36 + 3 \cdot 36} = 12, OB = \frac{1}{2}AB = 6.$$

$$SO = OB \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{6}{\sqrt{3}}. V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} 18\sqrt{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = 36.$$

Ответ: 36.

667. Дано:  $SABC$  — пирамида,  $AB = 6$ ;  $BC = 3$ ;  $\angle ABC = 60^\circ$ ;  $SC = \sqrt{21}$ ;  $\angle SAO = \angle SCO = \angle SBO$  (см. рис. 93).

Найти:  $V_{\text{пир.}}$ .

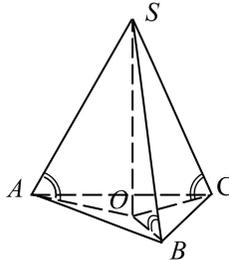


Рис. 93.

Решение.

$$1) V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot SO; S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

2) Пусть  $R$  — радиус описанной окружности около  $\triangle ABC$ . Тогда, по теореме синусов  $\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2R$ . 3) Из  $\triangle ABC$  по теореме косинусов имеем  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ$ ;

$$AC^2 = 36 + 9 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}; AC^2 = 27; AC = 3\sqrt{3}. \text{ Тогда имеем:}$$

$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R$ ;  $\frac{3\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2R$ ;  $R = 3$ . Так как боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ . Следовательно  $OC = R = 3$ .

$$4) \text{ Из } \triangle SOC \text{ имеем: } SO = \sqrt{SC^2 - CO^2}; SO = \sqrt{21 - 9} = 2\sqrt{3}.$$

$$5) V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 9.$$

Ответ: 9.

**668.** Дано:  $SABC$  — пирамида,  $AB = BC = 6$ ;  $\angle ABC = 120^\circ$ ;  
 $\angle SAO = \angle SCO = \angle SBO$ ;  $SC = 4\sqrt{3}$ .

Найти:  $V_{\text{пир.}}$ .

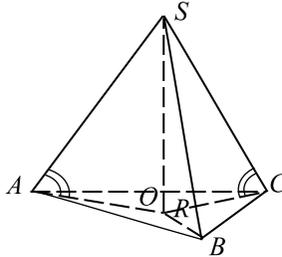


Рис. 94.

*Решение.*  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO$ .

$$1) S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}.$$

$$2) \angle BAC = \angle BCA = 30^\circ.$$

3) Пусть  $R$  — радиус описанной около окружности  $\triangle ABC$ . Тогда, по теореме синусов  $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2R$ ;  $\frac{6}{\frac{1}{2}} = 2R$ ;  $R = 6$ . Так как боковые рёбра

пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

$$4) \text{ Из } \triangle SOC \text{ имеем: } SO = \sqrt{SC^2 - CO^2};$$

$$SO = \sqrt{16^2 \cdot 3 - 36} = 2\sqrt{3}; V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18.$$

*Ответ:* 18.

**669.** Дано:  $SABC$  — пирамида,  $\angle SKO = \angle SMO = \angle SPO = \alpha$ ,  
 $\text{tg } \alpha = 3$ ;  $\angle ACB = 90^\circ$ ;  $AC = 8$ ;  $BC = 6$ .

Найти:  $V_{\text{пир.}}$ .

*Решение.*  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot SO$ .

$$1) S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$

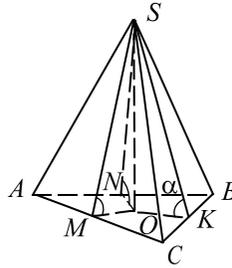


Рис. 95.

2)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot r_{\text{вп.}}$ , где  $P_{ABC}$  — периметр  $\triangle ABC$ ,  $r_{\text{вп.}}$  — радиус окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ .

3) Из  $\triangle ABC$  имеем:  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ;

$$r_{\text{вп.}} = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot 24}{6 + 8 + 10} = 2.$$

4) Так как двугранные углы при основании пирамиды равны между собой, то высота пирамиды проходит через центр вписанной окружности. Следовательно,  $OK = r_{\text{вп.}} = 2$ . Тогда из  $\triangle SOK$  имеем:  $SO = OK \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ;  $SO = 2 \cdot 3 = 6$ .

$$5) V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6 = 48.$$

Ответ: 48.

**670.** Дано:  $SABC$  — правильная пирамида;  $AM = BM$ ;  $CN = BN$ ;  $MEN \perp ABC$ ;  $AB = 2$ ;  $SO$  — высота;  $SO = 24$  (см. рис. 96).

Найти:  $S_{MEN}$ .

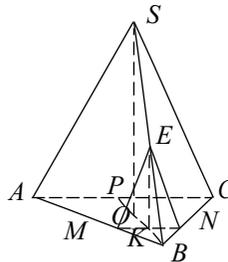


Рис. 96.

*Решение.* Сечением пирамиды плоскостью, указанной в условии задачи, является  $\triangle MEN$ .  $S_{MEN} = \frac{1}{2}MN \cdot EK$ , где  $EK$  — высота  $\triangle MEN$ . Из условия следует, что  $MN$  — средняя линия  $\triangle ABC$ . Поэтому  $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ . Пусть  $P$  — точка пересечения высоты, опущенной из вершины  $B$  к стороне  $AC$  с прямой  $AC$ . Из  $\triangle BCP$  имеем:  $BP = BC \cdot \sin 60^\circ$ ;  $BP = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ . Так как  $SABC$  — правильная пирамида, то точка  $O$  является центром вписанной окружности,  $O \in BP$ ,  $\frac{BO}{OP} = \frac{1}{2}$ . Следовательно  $BO = \frac{2}{3}BP = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;  $BK = \frac{1}{2}BP$ ;  $BK = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .  $\triangle OSB \sim \triangle BKE$  (по двум углам:  $\angle EKB = \angle SOB = 90^\circ$ ;  $\angle EBK = \angle SBO$ ), тогда имеем:  $\frac{SO}{EK} = \frac{BO}{BK}$ ;  $EK = \frac{SO \cdot BK}{BO} = \frac{24 \cdot \sqrt{3} \cdot 3}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = 18$ ;  $S_{MEN} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 18 = 9$ .

Ответ: 9.

671. Дано:  $SABC$  — пирамида;  $\angle ACB = 90^\circ$ ;  $AC = 8$ ;  $BC = 6$ ;  $\angle SMO = \angle SNO = \angle SPO = 60^\circ$  (см. рис. 97).

Найти:  $S_{\text{бок}}$ .

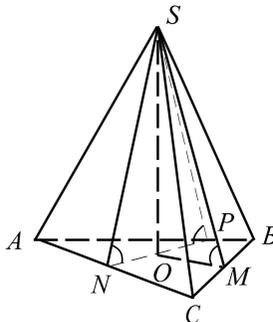


Рис. 97.

$$\text{Решение. } S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos 60^\circ}; S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}AC \cdot BC; S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24;$$

$$S_{\text{бок.}} = \frac{24}{\frac{1}{2}} = 48.$$

Ответ: 48.

**672.** Дано:  $SABC$  — правильная пирамида;  $SO$  — высота;  $SO = 3\sqrt{6}$ ; двугранный угол при ребре  $AS = 120^\circ$  (см. рис. 98).

Найти  $BC$ .

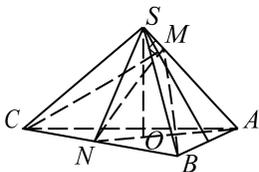


Рис. 98.

*Решение.* Проведём прямые  $CM \perp AS$ ;  $BM \perp AS$ , тогда  $\angle BMC = 120^\circ$ . Из того, что пирамида  $SCAB$  — правильная, следует, что  $\triangle BMC$  — равнобедренный;  $\angle CBM = \angle BCM = 30^\circ$ . Пусть  $N$  — середина отрезка  $CB$ . Обозначим  $BN = x$ . Из  $\triangle MNB$  имеем  $MN = BN \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$ ;  $MN = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ . Из  $\triangle ABN$  имеем  $AN = AB \cdot \sin 60^\circ =$

$$= \frac{2x \cdot \sqrt{3}}{2}; S_{ANS} = \frac{1}{2}AS \cdot MN. \text{ Пусть } SO \text{ — высота пирамиды. Так как}$$

$SABC$  — правильная, то  $SO$  — высота  $\triangle NSA$ , тогда  $S_{ANS} = \frac{1}{2}AN \cdot SO$ ;

$$AS \cdot MN = AN \cdot SO = \frac{AN \cdot SO}{MN} = \frac{x\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6}}{\frac{x\sqrt{3}}{3}} = 9\sqrt{6}. \text{ Из } \triangle ASO \text{ имеем:}$$

$AO = \sqrt{AS^2 - SO^2} = \sqrt{81 \cdot 6 - 9 \cdot 6} = 12\sqrt{3}$ . Так как  $O$  является точкой пересечения медиан  $\triangle CAB$ , то  $NA = \frac{3}{2}AO = \frac{3}{2} \cdot 12\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ . Тогда

$$AB = \frac{AN}{\sin 60^\circ} = \frac{18\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 36.$$

Ответ: 36.

673.

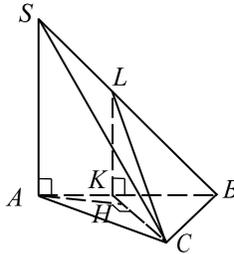


Рис. 99.

*Решение.* Пусть  $L$  — середина отрезка  $SB$ . Проведём  $LK \parallel AS$ , тогда угол между  $AS$  и  $LC$  равен  $\angle KLC = 60^\circ$ .

1) Так как  $KL$  — средняя линия  $\triangle SAB$ , то  $CK$  — является медианой и высотой правильного  $\triangle ABC$ . Значит,  $AK \perp KC$  и  $AK \perp KL$  (по построению). Следовательно  $AK \perp KLC$ , отсюда  $AK \perp LC$ . Значит  $AK$  — расстояние между прямыми  $AS$  и  $CL$ . Тогда согласно условию  $AK = \sqrt{3}$ . Так как  $CK$  — медиана  $\triangle ABC$ , то  $AB = 2AK = 2\sqrt{3}$ . Так как  $CK$  — высота  $\triangle ABC$ , то  $CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{12 - 3} = 3$ . Получаем  $S_{ABC} = \frac{1}{2}CK \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ .

2) Из прямоугольного  $\triangle KLC$  находим  $KL = CK \cdot \operatorname{tg} KLC = 3 \operatorname{tg} 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ .

Так как  $KL$  — средняя линия  $\triangle ASB$ , то  $AS = 2\sqrt{3}$ .  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot AS = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6$ .

*Ответ:* 6.

**674.** Дано:  $SABC$  — правильная пирамида;  $AB = 12$ ;  $AN = CN$ ;  $AM = BM$ ;  $SMN$  — сечение,  $S_{SMN} = 3\sqrt{6}$ .

Найти  $V_{\text{пир.}}$ .

*Решение.*  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot SO$ ;  $MN = \frac{1}{2}BC$ ;  $MN = 6$  (средняя линия). Из  $\triangle ABF$  имеем  $AF = AB \cdot \sin 60^\circ$ ;  $AF = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ .  $AO = \frac{2}{3}AF$ ;

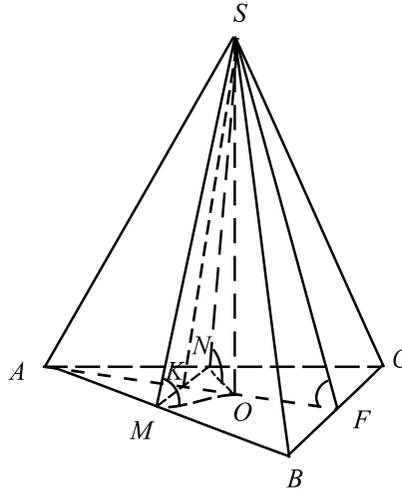


Рис. 100.

$AO = \frac{2}{3}6\sqrt{3}$ ;  $KO = AO - AK$ ;  $KO = \sqrt{3}$ . Из  $\triangle KSO$  имеем:

$$SO^2 = KS^2 - KO^2; S_{\triangle MSN} = \frac{1}{2}MN \cdot SK; 3\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot SK; SK = \sqrt{6};$$

$$SO = \sqrt{6 - 3} = \sqrt{3}; V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = 36.$$

Ответ: 36.

**675.** Дано:  $SABCD$  — правильная четырёхугольная пирамида с основанием  $ABCD$  (см. рис. 101),  $SO$  — высота пирамиды  $ABCD$ ;  $AB = BC = CD = AD = 8$ ,  $SO = 3$ .

Найти: расстояние между скрещивающимися прямыми  $CD$  и  $SB$ .

*Решение.* Рассмотрим плоскость  $SAB$ . Она содержит прямую  $SB$  и прямую  $AB \parallel CD$ . Поэтому пл.  $SAB \parallel CD$ , а значит, расстояние между скрещивающимися прямыми  $CD$  и  $SB$  равно расстоянию между прямой  $CD$  и плоскостью  $SAB$ , и равно расстоянию от любой точки прямой  $CD$  до плоскости  $SAB$ . Найдём расстояние от точки  $N$  — середины ребра  $CD$  — до плоскости  $SAB$ . Пусть  $M$  — середина ребра  $AB$  и пусть  $NH$  — высота  $\triangle SMN$ , тогда в искомое расстояние равно длине высоты  $NH$ . Найдём её.  $OB = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot AB = 4\sqrt{2}$ . Так как  $SO$  — высота пирамиды, то в прямоугольном треугольнике  $SOB$ :

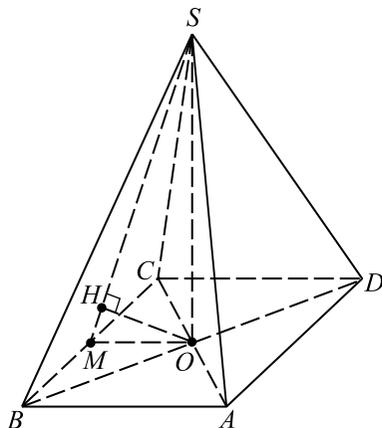


Рис. 101.

$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{9 + 32} = \sqrt{41}$ . В прямоугольном треугольнике  $SMB$ :  $SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{41 - 16} = 5$ . Рассмотрим треугольник  $SMN$ . С одной стороны  $S_{SMN} = \frac{1}{2} \cdot SO \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12$ , с другой стороны  $S_{SMN} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot NH = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot NH = \frac{5}{2} \cdot NH$ . Следовательно, справедливо равенство  $12 = \frac{5}{2} \cdot NH$ , откуда  $NH = \frac{24}{5} = 4,8$ .

Ответ: 4,8.

**676.** Дано:  $SABC$  — правильная пирамида;  $AB = 2$ ;  $SO = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

(см. рис. 102).

Найти расстояние между  $SP$  и  $BD$ .

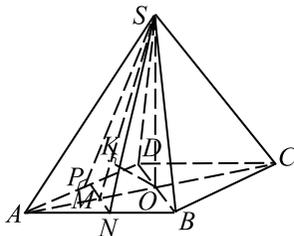


Рис. 102.

*Решение.* Проведём  $PN \parallel BD$ , тогда  $PSN \parallel BD$ ;  $OK \perp PSN$ ;  $OK$  — искомое расстояние.  $AO = \frac{1}{2}AC$ ;  $AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ;  $AO = \sqrt{2}$ ,

$MO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , так как  $PN$  — средняя линия  $\triangle ABD$ . Из  $\triangle SMO$  имеем:

$$SM = \sqrt{SO^2 + MO^2}; SM = \sqrt{\frac{49 \cdot 2}{4} + \frac{2}{4}} = 5;$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } S_{SMO} &= \frac{1}{2}SM \cdot KO \text{ и } S_{SMO} = \frac{1}{2}MO \cdot SO, \text{ то } SM \cdot KO = \\ &= MO \cdot SO = \frac{MO \cdot SO}{SM}; KO = \frac{\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{7}{10} = 0,7. \end{aligned}$$

*Ответ:* 0,7.

**677.** Дано:  $SABCD$  — пирамида;  $\angle ACB = 90^\circ$ ;  $AC = 12$ ;  $BC = 5$ ;  $\angle SMO = \angle SNO = \angle SPO = 30^\circ$ ;  $h = SO$  — высота (см. рис. 103).

Найти:  $2\sqrt{3}h$ .

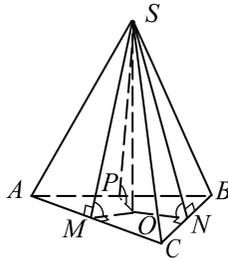


Рис. 103.

*Решение.* Так как  $\angle SMO = \angle SNO = \angle SPO$ , то  $O$  — центр вписанной окружности.  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC$ ;  $S_{ABC} = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot r_{\text{вп.}}$ , где  $r_{\text{вп.}}$  — радиус вписанной окружности.  $AC \cdot BC = P_{ABC} \cdot r_{\text{вп.}}$ ;  $r_{\text{вп.}} = \frac{AC \cdot BC}{P_{ABC}}$ .

Из  $\triangle ABC$  имеем:  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ ;  $AB = \sqrt{144 + 25} = 13$ ;

$r_{\text{вп.}} = \frac{12 \cdot 5}{30} = 2$ ;  $MO = 2$ . Из  $\triangle SMO$  имеем:  $SO = MO \cdot \text{tg } 30^\circ$ ;

$$SO = \frac{2\sqrt{3}}{3}; 2\sqrt{3}h = 2\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4.$$

*Ответ:* 4.

678. Дано:  $\triangle ABC$ ;  $\angle B = 120^\circ$ ;  $AB = AC$ ;  $SO \perp ABC$ ;  $SO = 15\sqrt{5}$ ;  $AS = BS = CS = 35$ .

Найти:  $AB$ .

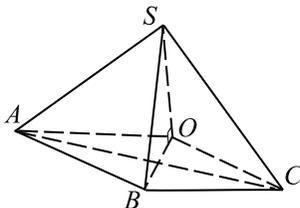


Рис. 104.

*Решение.* Так как  $AS = BS = CS$ , то  $AO = BO = CO = R$ , ( $R$  — радиус описанной окружности около  $\triangle ABC$ ). Из  $\triangle SBO$  имеем:

$BO = \sqrt{BS^2 - SO^2} = \sqrt{35^2 - 15^2} \cdot \frac{1}{5} = 10$ . По теореме синусов имеем:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R;$$

$$AB = 2R \cdot \sin 30^\circ; AB = 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 10.$$

*Ответ:* 10.

679.

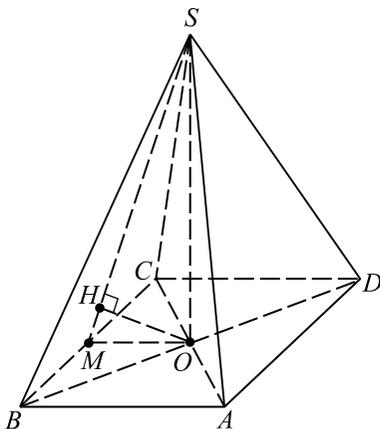


Рис. 105.

Дано:  $SABCD$  — правильная четырёхугольная пирамида (см. рис. 105),  $AB = 10$ ,  $O$  — центр основания  $ABCD$ , расстояние от точки  $O$  до грани  $SBC$  равно  $\sqrt{5}$ .

Найти:  $SA$ .

*Решение.* Так как пирамида  $SABCD$  правильная, а  $O$  — центр её основания, то  $SO$  — высота этой пирамиды. Пусть  $M$  — середина ребра  $BC$ , тогда  $OM \perp BC$ . Проведём высоту  $OH$  в треугольнике  $SOM$ . Так как  $OM \perp BC$  и  $SO \perp BC$ , то  $BC \perp \text{пл. } SOM \Rightarrow BC \perp OH$ . Так как  $OH \perp BC$  и  $OH \perp SM$ , то  $OH \perp \text{пл. } SBC$ . Следовательно, длина высоты  $OH$  равна расстоянию от точки  $O$  до грани  $SBC$ , то есть  $OH = \sqrt{5}$ . Так как  $ABCD$  — квадрат со стороной, равной 10,  $O$  — его центр, а  $M$  — середина его стороны, то  $OM = 5$ . Из  $\triangle OHM$ :  $HM = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{25 - 5} = 2\sqrt{5}$ ;  $\cos \angle HMO = \frac{HM}{OM} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

Из  $\triangle SOM$ :  $SM = \frac{OM}{\cos \angle OMS} = 5 \cdot \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ . Из прямоугольного

$$\triangle SMB: SB = \sqrt{BM^2 + SM^2} = \sqrt{25 + \frac{125}{4}} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}.$$

Ответ: 7,5.

680.

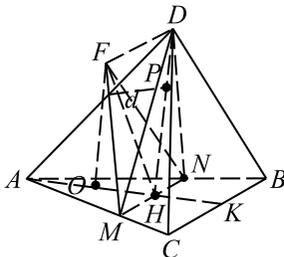


Рис. 106.

Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $H$  параллельно плоскости  $DBC$  (см. рис. 106). Для этого через точку  $H$  проведём

$MN \parallel BC$ . Через точку  $M$  проведём  $MF \parallel CD$ . Сечение  $MFN$  — искомое. Пусть  $d$  — расстояние от точки  $D$  до плоскости  $MFN$ .

1) В  $\triangle ABC$  проведём высоту  $AK$ ;  $AK = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9$ . Так как пирамида  $DABC$  — правильная, то  $H$  является в  $\triangle ABC$  точкой пересечения медиан. Следовательно  $AH = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ .

2)  $\triangle CAB \sim \triangle MAN$  с коэффициентом подобия  $k = \frac{2}{3}$ . Тогда

$MC = \frac{1}{3}AC$ ,  $MN = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ ;  $\triangle CAD \sim \triangle MAF$  с коэффициентом подобия  $k = \frac{2}{3}$ . Следовательно  $FD = \frac{1}{3}AD$ . Проведём  $FO \parallel DH$ ,  $O \in ABC$ . Тогда  $\triangle HAD \sim \triangle OAF$  с коэффициентом подобия  $k = \frac{2}{3}$ , следовательно  $OH = \frac{1}{3}AH = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$ ,  $OF = \frac{2}{3}DH = \frac{8}{3}$ .

3) Так как  $DH \perp$  пл.  $ABC$ , то  $OF \perp$  пл.  $ABC$ , следовательно  $OF \perp AH$ . Из  $\triangle FOH$ :  $FH = \sqrt{FO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{10}{3}$ .

4) Проведём  $FP \parallel AH$ ,  $AH \perp (MDN)$ , значит  $FP \perp (MDN)$ , следовательно  $FP$ -высота пирамиды  $FMND$ .

5) Рассмотрим пирамиду  $DFMN$ :  $V = \frac{1}{3} \cdot S_{FMN} \cdot d$ , с другой стороны  $V = \frac{1}{3} \cdot S_{MDN} \cdot FP$ ,  $FP = OH = 2$ ,  
 $d = \frac{S_{MDN} \cdot FP}{S_{FMN}} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3}{4\sqrt{3} \cdot 10} = 2,4$ .

Ответ: 2,4.

**681.** Пусть  $AB = x$ ,  $x > 0$ . Так как в основании пирамиды лежит квадрат, то  $AC = x\sqrt{2}$ ,  $HC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ . Из  $\triangle SHC$  получаем:

$$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{100 + \frac{x^2}{2}} \text{ (см. рис. 107).}$$

$$NL = MK = \frac{1}{2} \sqrt{100 + \frac{x^2}{2}} \text{ (так как } NL \parallel SC \text{ и } LC = \frac{1}{2}BC). KL = \\ = AB = x, MN = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2}x.$$

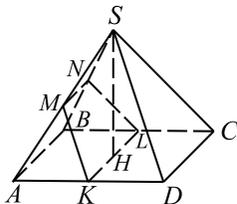


Рис. 107.

Сечение  $MNLK$  представляет собой равнобедренную трапецию (см. рис. 108). Следовательно  $KT = \frac{KL - MN}{2} = \frac{x}{4}$ . Из  $\triangle KMT$ :

$$MT = \sqrt{KM^2 - KT^2} = \sqrt{\frac{200 + x^2}{8} - \frac{x^2}{16}} = \frac{\sqrt{400 + x^2}}{4}.$$

$$S_{KMNL} = \frac{1}{2}(MN + KL) \cdot MT = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}x \cdot \frac{\sqrt{400 + x^2}}{4}.$$

По условию  $S_{KMNL} = 6\sqrt{29}$ , значит  $\frac{3x\sqrt{400 + x^2}}{16} = 6\sqrt{29}$ ;

$x\sqrt{400 + x^2} = 2^5\sqrt{29}$ ;  $400x^2 + x^4 = 2^{10} \cdot 29$ ;  $x^4 + 2^4 \cdot 5^2x^2 - 2^{10} \cdot 29 = 0$ . Пусть  $x^2 = t$ ,  $t > 0$ , тогда  $t^2 + 2^4 \cdot 5^2t - 2^{10} \cdot 29 = 0$ , Учитывая, что  $t > 0$ , получаем  $t = \frac{-400 + 2^4 \cdot 3 \cdot 11}{2} = 64$ . Тогда  $x^2 = 64$ ,  $x = 8$ , значит сторона основания равна 8.

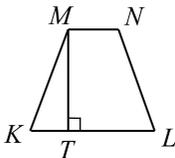


Рис. 108.

Ответ: 8.

**682.** Рассмотрим правильную треугольную пирамиду  $OABC$  с треугольником  $\triangle ABC$  в основании, удовлетворяющую условию (см. рис. 109). Так как пирамида правильная, то  $\triangle ABC$  — равносторонний. Обозначим через  $a$  длину стороны  $\triangle ABC$ , тогда  $AB = AC = BC = a$ ,  $a > 0$ .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle ABC = \frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Пусть  $M$  — середина ребра  $AC$ , тогда  $BM$  — высота  $\triangle ABC \Rightarrow$

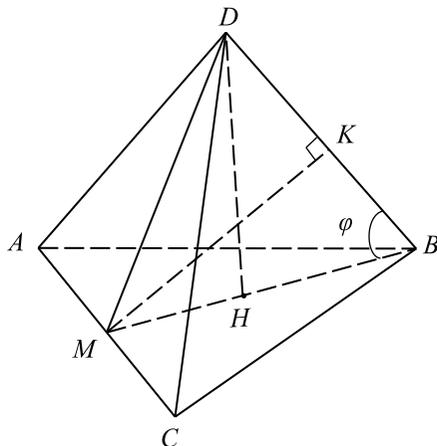


Рис. 109.

$BM = AC \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ . Обозначим через  $H$  — центр  $\triangle ABC$ , тогда

$BH = \frac{2}{3}BM = \frac{\sqrt{3}a}{3}$ ,  $DH$  — высота пирамиды,  $\angle DBH$  — угол между ребром  $DB$  и плоскостью основания  $\Rightarrow \angle DBH = \varphi$ . Из  $\triangle DHB$ :  $\frac{DH}{BH} = \operatorname{tg}\varphi$ ;  $DH = \operatorname{tg}\varphi \frac{\sqrt{3}a}{3}$ . Так как  $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , то

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{2}. \text{ Тогда объём данной пирамиды } V = \frac{1}{3}DH \cdot S_{\triangle ABC} = \\ = \frac{a^3}{12} \operatorname{tg}\varphi = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} = 16\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{6}.$$

Обозначим через  $K$  основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на ребро  $DB \Rightarrow \triangle MKB$  — прямоугольный  $\Rightarrow \frac{MK}{BM} = \sin \varphi$   
 $\Rightarrow MK = BM \sin \varphi = \sin \varphi \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{6} = 4.$

Таким образом, расстояние между боковым ребром и серединой противоположной стороны равно 4.

Ответ: 4.

**683.** Рассмотрим правильную треугольную пирамиду  $ABCD$  с треугольником  $\triangle ABC$  в основании, удовлетворяющую условию (см. рис. 110). Так как пирамида правильная, то  $\triangle ABC$  — равносторонний. Обозначим че-

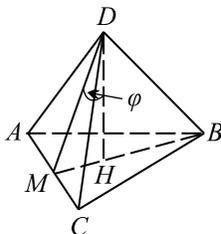


Рис. 110.

рез  $a$  длину стороны  $\triangle ABC$ , тогда  $AB = AC = BC = a$ , ( $a > 0$ ).

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle ABC = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Пусть  $M$  — середина ребра  $AC$ , тогда  $BM$  — высота  $\triangle ABC \Rightarrow$   
 $BM = AC \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ . Обозначим через  $H$  — центр  $\triangle ABC$ , тогда

$DH$  — высота пирамиды,  $MH = \frac{1}{3} BM = \frac{\sqrt{3}a}{6}$ . Поскольку  $DM$  — апофема пирамиды, то  $\angle HDM = \varphi$ . В прямоугольном треугольнике  $\triangle HDM$  выполняются следующие соотношения:

$$DH = \operatorname{ctg} \varphi \cdot MH = \operatorname{ctg} \varphi \frac{\sqrt{3}a}{6}. \text{ Вычислим } \operatorname{ctg} \varphi. \text{ Имеем,}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{5}{6}}, \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}. \text{ Таким образом, объём пирамиды}$$

$$V = \frac{1}{3} DH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3}{24} \operatorname{ctg} \varphi = \frac{a^3}{24\sqrt{5}} = 40\sqrt{3} \Rightarrow a = 4\sqrt{15}.$$

$$\text{Следовательно, высота пирамиды } DH = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 4\sqrt{15} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 2.$$

*Ответ:* 2.

**684.** Рассмотрим треугольную пирамиду  $ABCD$ , удовлетворяющую условию (см. рис. 111). Обозначим через  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  точки пересечения секущей плоскости с рёбрами  $AD$ ,  $BD$  и  $CD$ , соответственно. Пусть для определённости  $\frac{A_1D}{A_1A} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{B_1D}{B_1B} = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{C_1D}{C_1C} = \frac{2}{3}$ . Обозначим через  $H$  и  $H_1$  основания перпендикуляров, опущенных из точек  $A$  и  $A_1$  на плоскость  $B_1C_1D$ . Ясно, что треугольники  $\triangle ADH$  и  $\triangle A_1DH_1$  подобны.

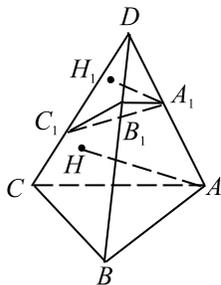


Рис. 111.

Следовательно,  $\frac{AH}{A_1H_1} = \frac{AD}{A_1D} = \frac{3+1}{1} = 4$ .

Треугольники  $\triangle BDC$  и  $\triangle B_1DC_1$  имеют общий угол  $\angle D$ , следовательно, их площади относятся как произведения прилежащих к углу сторон:

$$\frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle B_1DC_1}} = \frac{BD \cdot CD}{B_1D \cdot C_1D} = \frac{(1+4)(2+3)}{1 \cdot 2} = \frac{25}{2}.$$

Имеем,  $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH \cdot S_{\triangle BDC}$  и  $V_{A_1B_1C_1D} = \frac{1}{3}A_1H_1 \cdot S_{\triangle B_1DC_1}$ .

Отсюда получаем,  $\frac{V_{ABCD}}{V_{A_1B_1C_1D}} = 4 \cdot \frac{25}{2} = 50$ .

Таким образом искомое отношение  $\frac{V_{ABCD} - V_{A_1B_1C_1D}}{V_{A_1B_1C_1D}} =$   
 $= \frac{V_{ABCD}}{V_{A_1B_1C_1D}} - 1 = 49$ .

Ответ: 49.

**685.** Дано:  $SABC$  — правильная треугольная пирамида (см. рис. 112), угол между прямой  $SA$  и плоскостью основания  $ABC$  равен  $\alpha$ ,  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ ,  $AB = AC = BC = 6$ ,  $SK = KA$ .

Найти: расстояние от точки  $K$  до прямой  $BC$ .

Решение.

1) Обозначим через  $L$  середину ребра  $BC$ . Тогда плоскость  $ASL$  перпендикулярна прямой  $BC$ , так как  $AL$  и  $SL$  — высоты. Следовательно, прямая  $KL$  перпендикулярна прямой  $BC$ . Таким образом, расстояние от точки  $K$  до ребра  $BC$  равно  $KL$ .

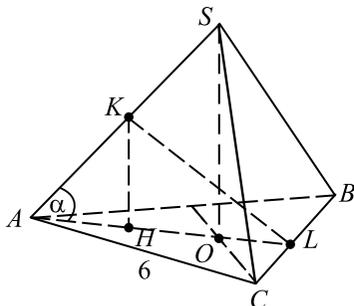


Рис. 112.

2) Так как треугольник  $ABC$  равносторонний, то  $AL = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = 3\sqrt{3}$ . Пусть  $O$  — центр треугольника  $ABC$ ,  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $K$  на плоскость  $ABC$ . Тогда по свойству точки пересечения медиан  $AO = \frac{2}{3} \cdot AL = 2\sqrt{3}$ . Поскольку точка  $H$  делит  $AO$  на две равны части, то  $AH = \sqrt{3}$ . Тогда  $HL = AL - AH = 2\sqrt{3}$ .

3) Рассмотрим треугольник  $KAH$ . Имеем,  $KH = AH \cdot \operatorname{tg} \alpha$ . Так как  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ , то  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = 2\sqrt{2}$ . Следовательно,  $KH = 2\sqrt{6}$ .

4) Рассмотрим прямоугольный треугольник  $KHL$ . По теореме Пифагора получаем  $KL = \sqrt{KH^2 + HL^2} = 6$ .

Ответ: 6.

**686.** Дано:  $SABC$  — правильная треугольная пирамида (см. рис. 113), угол между прямой  $SA$  и плоскостью основания  $ABC$  равен  $\alpha$ ,  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ ,  $SK = KB$ ; расстояние от точки  $K$  до прямой  $AC$  равно 12.

Найти:  $BC$ .

Решение.

1) Обозначим через  $L$  середину ребра  $AC$ . Тогда плоскость  $ASL$  перпендикулярна прямой  $AC$ , так как  $BL$  и  $SL$  — высоты. Следовательно, прямая  $KL$  перпендикулярна прямой  $AC$ . Таким образом, расстояние от точки  $K$  до ребра  $AC$  равно  $KL$ .

2) Обозначим через  $x$ ,  $x > 0$  сторону основания  $ABC$ . Так как треугольник  $ABC$  равносторонний, то  $BL = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC = \frac{\sqrt{3}x}{2}$ . Пусть  $O$  —

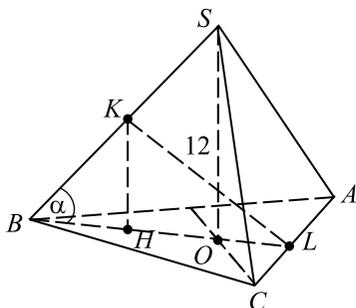


Рис. 113.

центр треугольника  $ABC$ ,  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $K$  на плоскость  $ABC$ . Тогда по свойству точки пересечения медиан  $BO = \frac{2}{3} \cdot BL = \frac{\sqrt{3}x}{3}$ . Поскольку точка  $H$  делит  $BO$  на две равные части, то  $BH = \frac{\sqrt{3}x}{6}$ . Тогда  $HL = BL - BH = \frac{\sqrt{3}x}{3}$ .

3) Рассмотрим треугольник  $KBH$ . Имеем,  $KH = BH \cdot \operatorname{tg} \alpha$ . Так как  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ , то  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = 2\sqrt{2}$ . Следовательно,  $KH = \frac{\sqrt{6}x}{3}$ .

4) Рассмотрим прямоугольный треугольник  $KHL$ . По теореме Пифагора получаем  $KL = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}x}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)^2} = \sqrt{KH^2 + HL^2} = x = 12$ .

*Ответ:* 12.

**687.** Дано:  $SABC$  — правильная треугольная пирамида (см. рис. 114), угол между прямой  $SA$  и плоскостью основания  $ABC$  равен  $30^\circ$ ,  $AB = AC = BC = 7$ ,  $SK : KA = 1 : 3$ .  
Найти: площадь треугольника  $KBC$ .

*Решение.*

1) Обозначим через  $L$  середину ребра  $BC$ . Тогда плоскость  $ASL$  перпендикулярна прямой  $BC$ , так как  $AL$  и  $SL$  — высоты. Следовательно, прямая  $KL$  перпендикулярна прямой  $BC$ . Таким образом, высота треугольника  $KBC$  равна  $KL$ .

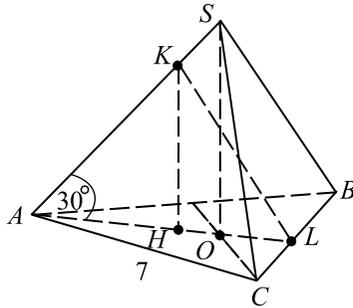


Рис. 114.

2) Так как треугольник  $ABC$  равносторонний, то  $AL = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ . Пусть  $O$  — центр треугольника  $ABC$ ,  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $K$  на плоскость  $ABC$ . Тогда по свойству точки пересечения медиан  $AO = \frac{2}{3} \cdot AL = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ . Поскольку точка  $H$  делит  $AO$  в отношении  $1 : 3$ , считая от центра  $O$ , то  $AH = \frac{3}{4} \cdot AO = \frac{7\sqrt{3}}{4}$ .

3) Рассмотрим треугольник  $KAH$ . Имеем,  $KH = AH \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{7}{4}$ . Тогда  $HL = AL - AH = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ .

4) Рассмотрим прямоугольный треугольник  $KHL$ . По теореме Пифагора получаем  $KL = \sqrt{KH^2 + HL^2} = \frac{7}{2}$ . Тогда  $S_{KBC} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot BC = \frac{49}{4} = 12,25$ .

Ответ: 12,25.

**688.** Дано:  $SABC$  — правильная треугольная пирамида (см. рис. 115), угол между прямой  $SB$  и плоскостью основания  $ABC$  равен  $30^\circ$ ,  $SK : KA = 1 : 3$ ;  $S_{KBC} = 36$ .

Найти: расстояние от точки  $K$  до прямой  $BC$ .

Решение.

1) Обозначим через  $L$  середину ребра  $BC$ . Тогда плоскость  $ASL$  перпендикулярна прямой  $BC$ , так как  $AL$  и  $SL$  — высоты. Следовательно,

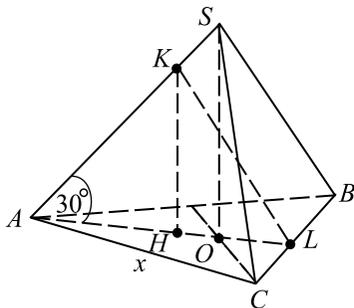


Рис. 115.

прямая  $KL$  перпендикулярна прямой  $BC$ . Таким образом, высота треугольника  $KBC$  и расстояние от точки  $K$  до прямой  $BC$  равно  $KL$ .

2) Пусть  $AB = AC = BC = x$ ,  $x > 0$ . Так как треугольник  $ABC$  равносторонний, то  $AL = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = \frac{\sqrt{3}x}{2}$ . Пусть  $O$  — центр треугольника  $ABC$ ,  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $K$  на плоскость  $ABC$ .

Тогда по свойству точки пересечения медиан  $AO = \frac{2}{3} \cdot AL = \frac{\sqrt{3}x}{3}$ .

Поскольку точка  $H$  делит  $AO$  в отношении  $1 : 3$ , считая от центра  $O$ , то  $AH = \frac{3}{4} \cdot AO = \frac{\sqrt{3}x}{4}$ ;  $HL = AL - AH = \frac{\sqrt{3}x}{4}$ .

3) Рассмотрим треугольник  $KAH$ . Так как пирамида правильная, то  $\angle SAL = \angle SBO = 30^\circ$ . Имеем,  $KH = AH \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{4}$ .

4) Рассмотрим прямоугольный треугольник  $KHL$ . По теореме Пифагора получаем  $KL = \sqrt{KH^2 + HL^2} = \frac{x}{2}$ . Тогда  $S_{KBC} = \frac{x^2}{4} = 36$ . Откуда получаем, что  $x = 12$ . Следовательно,  $KL = 6$ .

Ответ: 6.

**689.** Опустим перпендикуляр  $AH$  (см. рис. 116) на продолжение отрезка  $BC$ . Поскольку  $SA$  — перпендикуляр к плоскости  $ABC$ , то  $AH \perp SA$ . Поэтому  $AH$  — общий перпендикуляр к прямым  $AS$  и  $BC$ . То есть  $AH$  — расстояние между этими прямыми. Из прямоугольного  $\triangle SAB$  находим:  $AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = 3$ ;  $AH = AB \cdot \sin ABH = AB \cdot \sin(180^\circ - 150^\circ) = \frac{AB}{2} = 1,5$ .

Ответ: 1,5.

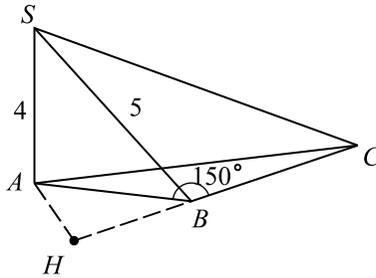


Рис. 116.

**690.** 1) Обозначим искомый угол через  $\alpha$ . Через вершину  $A$  в плоскости  $ACD$  проведём прямую параллельно ребру  $CD$ , и пусть  $K$  — проекция вершины  $B$  на эту прямую, а  $L$  — проекция точки  $K$  на  $CD$ , (см. рис. 117).

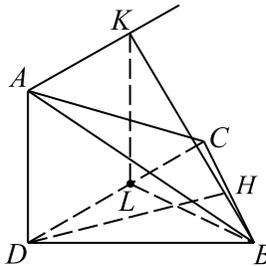


Рис. 117.

Тогда  $\alpha = \angle KAB$ ,  $\sin \alpha = \frac{BK}{AB}$ . Очевидно, что  $KL \parallel AD$ , и, значит, прямая  $KL$  перпендикулярна плоскости  $BCD$ ,  $\angle KLB = 90^\circ$ . Так как  $DL \parallel AK$  и  $AK \perp BK$ , то  $DL \perp BK$ , поэтому, по теореме о трёх перпендикулярах,  $DL \perp BL$ .

2) Учитывая, что  $KL = AD = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , из  $\triangle BKL$  и  $\triangle ABD$  по теореме Пифагора имеем:

$$BK = \sqrt{KL^2 + BL^2} = \frac{\sqrt{1 + 3BL^2}}{\sqrt{3}}, \quad AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Высоту  $BL$   $\triangle BDC$  найдём выразив площадь  $\triangle BDC$  двумя способами:  $2S_{BDC} = BL \cdot CD = BC \cdot DH$ , где  $DH$  — высота к стороне  $BC$ . Так как  $BD = CD$ , то  $DH$  является и медианой  $\triangle BDC$ , то есть теореме Пифаго-

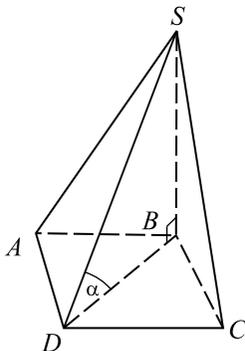


Рис. 118.

ра  $DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = 1$ . Итак, имеем:

$$BL = \frac{BC \cdot DH}{CD} = \frac{\sqrt{15}}{2}, BK = \frac{\sqrt{1 + 3BL^2}}{\sqrt{3}} = \frac{7}{2\sqrt{3}},$$

$$\sin \alpha = \frac{BK}{AB} = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{6}, \text{ градусная мера } \alpha \text{ составляет } 30^\circ.$$

*Ответ:* 30.

**691.** Так как  $SB$  перпендикулярен к плоскости основания (см. рис. 118), то прямая  $SD$  при проекции переходит в  $BD$ , таким образом, угол  $SDB$  — угол между прямой  $SD$  и плоскостью основания. Из основного тригонометрического тождества  $\frac{1}{\cos^2 \angle SDB} = 1 + \operatorname{tg}^2 \angle SDB = \frac{25}{16}$ , отку-

да  $\cos \angle SDB = \frac{4}{5}$ . Из  $\triangle SBD$  находим:  $BD = SD \cdot \cos \angle SDB = 12$ ,

$SB = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ . Из прямоугольных треугольников  $CBS$  и  $ABS$  находим:

$$BC = \sqrt{SC^2 - SB^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12; AB = \sqrt{SA^2 - SB^2} =$$

$= \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ . Следовательно  $AB = BC$ . Таким образом, параллелограмм в основании пирамиды — ромб со стороной 12. Его периметр равен 48.

*Ответ:* 48.

**692.** Угол между прямой  $SD$  (см. рис. 118) и плоскостью основания — это угол  $SDB$ , так как прямая  $SB$  перпендикулярна плоскости основания. Катет  $SB$  находим из прямоугольного треугольника  $SAB$

$SB = \sqrt{AS^2 - AB^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ . Угол между прямыми  $SC$  и  $AB$  равен углу  $SCD$ , так как  $AB \parallel CD$ , поэтому в треугольнике  $SCD$  мы знаем стороны:  $SC$  и  $CD$ , и косинус угла между ними.

По теореме косинусов найдём  $SD$ :

$$SD^2 = SC^2 + DC^2 - 2 \cdot SC \cdot DC \cdot \cos \angle SCD = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 0,4 = 15^2,$$

$SD = 15$ . Теперь в прямоугольном треугольнике  $SBD$  находим

$$BD = \sqrt{SD^2 - SB^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12, \text{ а значит, и тангенс угла } SDB.$$

$$\operatorname{tg} SDB = \frac{SB}{DB} = \frac{9}{12} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

**693.**  $AB \parallel CD$  (см. рис. 118), так что угол между  $SC$  и  $AB$  равен углу  $SCD$ . Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то  $CD = AB = 16$ . Из прямоугольного треугольника  $ABS$  знаем  $AS = 20$ ,  $AB = 16$ , находим  $SB = \sqrt{AS^2 - AB^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ . Угол между  $SD$  и плоскостью основания — это угол  $SDB$ , так как  $SB$  перпендикулярно плоскости основания. Поэтому  $\angle \operatorname{tg} SDB = 0,75$ , а так как  $SB = 12$ , то

$$BD = \frac{SB}{\operatorname{tg} \angle SDB} = 16, \text{ а } SD = \sqrt{SB^2 + DB^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20.$$

Теперь мы знаем три стороны в треугольнике  $SCD$  и хотим найти косинус угла  $SCD$ . Для этого воспользуемся теоремой косинусов:

$$SD^2 = SC^2 + DC^2 - 2 \cdot SC \cdot DC \cdot \cos \angle SCD; 20^2 + 16^2 - 2 \cdot 20 \cdot 16 \cdot \cos \angle SCD = 20^2;$$

$$\cos \angle SCD = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

**694.** Не нарушая общности можем считать, что указанное сечение проведено через вершину  $B$  основания  $ABC$  пирамиды  $SABC$ .

Пусть  $K$  — точка пересечения заданного сечения с апофемой  $SP$  грани  $ASC$  (см. рис. 119).

Из условия следует, что  $BK \perp SP$ ,  $\operatorname{tg} \angle KBP = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Пусть  $SO$  — высота пирамиды  $SABC$ , проведённая из вершины  $S$  к основанию  $ABC$ . Тогда объём пирамиды  $V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO$ . Так как пирамида  $SABC$  — правильная, то  $BP$  — высота  $\triangle ABC$  и  $BP = BA \cdot \sin 60^\circ = 6$ . Тогда  $S_{ABC} = \frac{1}{2} BP \cdot AC = 12\sqrt{3}$ . Так как  $BP$  — медиана  $\triangle ABC$ , то

$OP = \frac{1}{3}BP = 2$ .  $\triangle BKP \sim \triangle SOP$  (по двум углам). Значит,  $\angle OSP =$   
 $= \angle KBP$ . Поэтому  $\operatorname{tg} \angle OSP = \frac{OP}{SO} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

Отсюда  $SO = \sqrt{3}$ , и, следовательно,  $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$ .

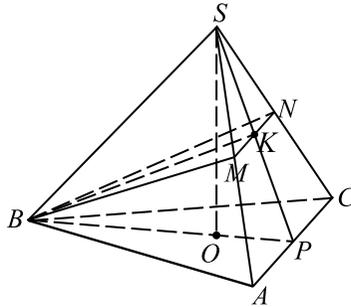


Рис. 119.

Ответ: 12.

**695.** Не нарушая общности можем считать, что указанное сечение проведено через вершину  $B$  основания  $ABC$  пирамиды  $SABC$ . Пусть  $K$  — точка пересечения заданного сечения с апофемой  $SP$  грани  $ASC$  (см. рис. 119).

Так как  $\triangle ABC$  — правильный со стороной, равной  $3\sqrt{3}$ , то  $BP = \frac{9}{2}$ ,  
 $OP = \frac{1}{3}BP = \frac{3}{2}$ ,  $BO = BP - OP = 3$ . Обозначим  $\angle KBP = \alpha$ . Согласно условию  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{8}$ . Тогда:  $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{73}}$ ;  $\cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{73}}$ . В  $\triangle BKP$  и  $\triangle OSP$   $\angle KPO$  — общий и  $\angle PKB = \angle POS = 90^\circ$ . Поэтому они подобны (по двум углам). Значит:  $\frac{SO}{BK} = \frac{OP}{KP}$ ,  $SO = \frac{BK \cdot OP}{KP}$ . Из прямоугольного  $\triangle BKP$ :  $PK = BP \sin \alpha = \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{73}} = \frac{27}{2\sqrt{73}}$ ;  $BK = BP \cos \alpha =$   
 $= \frac{9}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{73}} = \frac{36}{\sqrt{73}}$ . Поэтому  $SO = \frac{36 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{73}}{\sqrt{73} \cdot 2 \cdot 27} = 4$ .

Итак,  $SO = 4$ ;  $BO = 3$ . Из  $\triangle BOS$  по теореме Пифагора находим  $SB = \sqrt{BO^2 + SO^2} = 5$ .

Ответ: 5.

**696.** 1) Пусть  $SM$  — медиана  $\triangle SAB$ . Так как  $O$  точка пересечения медиан  $\triangle SAB$ , то  $SO : OM = 2 : 1$  (см. рис. 120).  $\triangle SOK \sim \triangle SMB$ ,

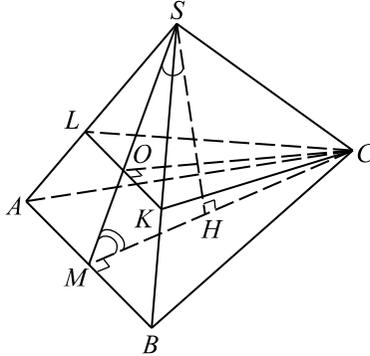


Рис. 120.

так как  $SO : OM = SK : SB$  и угол при вершине  $S$  общий. Значит  $\frac{LK}{AB} = \frac{SK}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow LK = \frac{2}{3}AB = 2$ .

2) Так как  $\triangle ABC$  — правильный, то  $CM$  — высота  $\triangle ABC$ . Следовательно  $CM = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

Из прямоугольного треугольника  $SMB$  находим  $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \frac{3}{2}\sqrt{15}$ ;  $OM = \frac{1}{3}SM = \frac{\sqrt{15}}{2}$ . Из  $\triangle ABC$  находим  $MH = \frac{1}{3}CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos \angle SMH = \frac{MH}{SM} = \frac{1}{3\sqrt{5}}$ .

Из  $\triangle COM$  по теореме косинусов получаем  $CO = \sqrt{OM^2 + CM^2 - 2 \cdot OM \cdot CM \cdot \cos \angle OMC} = 3$ .

3)  $S_{CLK} = \frac{1}{2}CO \cdot LK = 3$ .

Ответ: 3.

**697.** Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через её высоту и апофему (см. рис. 121). Пусть  $SH$  — высота пирамиды  $SABCD$ .

Тогда  $H$  — центр основания  $ABCD$  пирамиды. Пусть  $HP$  — перпендикуляр, проведённый из точки  $H$  на боковую грань пирамиды.

Из  $\triangle HSP$  по теореме Пифагора  $SP = \sqrt{SH^2 - HP^2} = \sqrt{64 - 4,8^2} =$

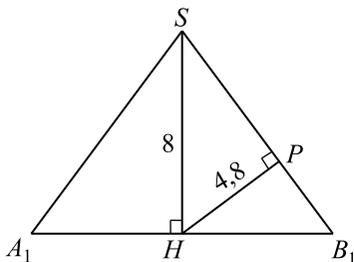


Рис. 121.

$= 6,4$ .  $\triangle SPH \sim \triangle SHB_1$ , значит  $\frac{SH}{SP} = \frac{HB_1}{HP}$ , отсюда  $HB_1 =$

$= \frac{SH \cdot HP}{SP} = 6$ , тогда  $A_1B_1 = AB = 12$ .

Ответ: 12.

**698.** Пусть  $SO$  — высота пирамиды  $SABCD$ . Тогда  $O$  — центр основания  $ABCD$  пирамиды. Пусть  $OH$  — перпендикуляр, проведённый из точки  $O$  на боковое ребро  $SC$ . Из  $\triangle SOH$  по теореме Пифагора

$SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \sqrt{16 - \frac{16}{9}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$  (см. рис. 122).

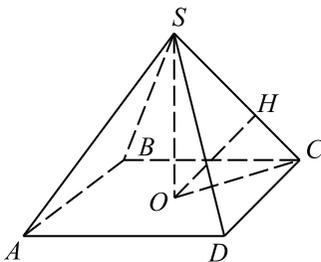


Рис. 122.

$\triangle SOC \sim \triangle SOH$  (по двум углам:  $\angle HSO = \angle CSO$ ;  $\angle SHO = \angle SOC = 90^\circ$ ), поэтому  $\frac{SO}{SH} = \frac{OC}{OH} \Rightarrow OC = \frac{SO \cdot OH}{SH} = \sqrt{2}$ .

$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}CD \cdot \sqrt{2}, \text{ отсюда } CD = \frac{OC}{\sqrt{2}} \cdot 2 = 2.$$

Ответ: 2.

**699.** Так как боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, то высота пирамиды  $SO$  проецируется в центр вписанной окружности  $\triangle ABC$  (см. рис. 123). Отсюда  $OH = r$ ,  $S_{\triangle ABC} = pr \Rightarrow 60 = 18 \cdot r$ ,  $r = \frac{10}{3}$ .  $\triangle SOH$  — равнобедренный, поэтому  $SO = OH = r = \frac{10}{3}$ .

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot \frac{10}{3} = \frac{200}{3} \cdot \frac{1}{V_{SABC}} = 0,015.$$

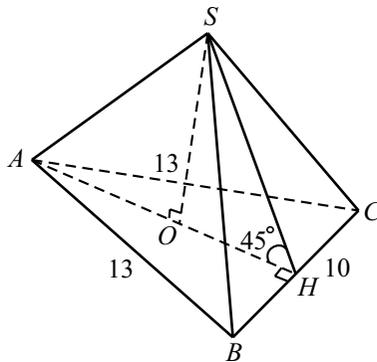


Рис. 123.

Ответ: 0,015.

**700.** Из теоремы, обратной к теореме Пифагора, следует, что основание пирамиды — прямоугольный треугольник. Высота, проведённая из вершины  $S$  пирамиды, падает в центр описанной около  $\triangle ABC$  окружности, так как боковые рёбра пирамиды наклонены к основанию под одним углом (см. рис. 124). Пусть  $AB$  — гипотенуза  $\triangle ABC$ , тогда  $AB = 10$ .  $H$  — середина гипотенузы  $AB$ , является центром описанной около  $\triangle ABC$  окружности, так как  $\triangle ABC$  — прямоугольный, то  $SH$  — высота пирамиды.  $SH = BH$ , так как  $\angle SBH = 45^\circ \Rightarrow SH = 5$ .  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 24$ .

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 24 = 40.$$

Ответ: 40.

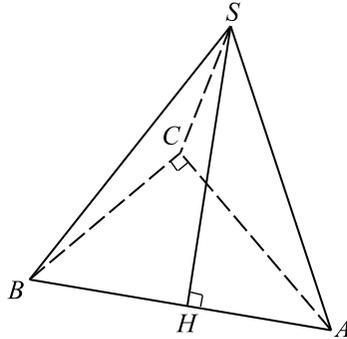


Рис. 124.

**701.** Из условия следует, что двугранный угол при основании пирамиды составляет  $45^\circ$ , поэтому высота пирамиды равна половине стороны основания. Пусть  $N$  — вершина пирамиды с основанием  $ABCD$ ;  $H$  — центр основания,  $HM$  — перпендикуляр, проведённый к боковому ребру (см. рис. 125),  $a$  ( $a > 0$ ) — сторона основания. Из  $\triangle HND$  имеем:

$$HN \cdot HD = HM \cdot ND = 2S, \text{ где } S \text{ — площадь } \triangle HND; \quad HN = \frac{a}{2},$$

$$HD = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad HM = \sqrt{6},$$

$$ND = \sqrt{HN^2 + HD^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Получаем равенство } \frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}, \text{ от-}$$

куда  $a = 6$ . Объем пирамиды:  $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = 36$ .

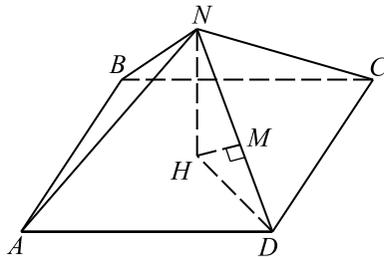


Рис. 125.

Ответ: 36.

702. 1) Так как, по условию  $\frac{SK}{SC} = \frac{4}{5}$ , то  $\frac{SK}{KC} = \frac{4}{1}$ .

2) Так как пирамида  $SABC$  — правильная, то  $\triangle ACS = \triangle BCS$ . Тогда высоты  $AK$  и  $BK$  соответственно  $\triangle ACS$  и  $\triangle BCS$  равны (см. рис. 126). Следовательно из  $\triangle ASK$  и  $\triangle BKC$  имеем  $\sqrt{AS^2 - SK^2} = \sqrt{BC^2 - KC^2}$ . Пусть  $KC = y$  ( $y > 0$ ), тогда  $SK = 4y$ ;  $SA = SC = SB = 5y$ . Получаем  $\sqrt{25y^2 - 16y^2} = \sqrt{16 - y^2}$ ;  $9y^2 = 16 - y^2$ ;  $10y^2 = 16$ ;  $y^2 = \frac{8}{5}$ ;  $y = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$ .

$$3) BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = \sqrt{16 - \frac{8}{5}} = \sqrt{\frac{72}{5}} = 6\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

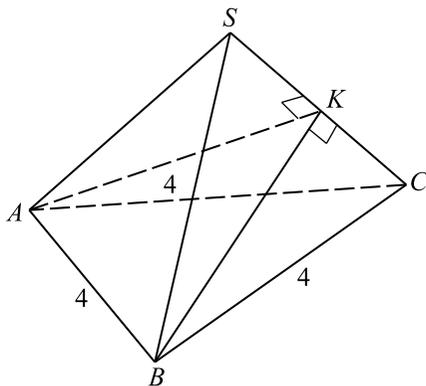


Рис. 126.

$$4) SK = 4KC = 8\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

$$5) SC = 5 \cdot 2\sqrt{\frac{2}{5}} = 2\sqrt{10};$$

$$6) S_{\text{бок.}} = 3 \cdot S_{\triangle SBC} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot SC \cdot BK = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 36.$$

Ответ: 36.

703. Пусть  $SO$  — высота пирамиды  $SABCD$ .  $M$  — середина стороны  $CD$ ,  $Q$  — середина стороны  $AD$ .  $SO = OM \operatorname{tg} \angle SMO = 3$  (см. рис. 127).

Пусть  $OH \perp QM$ . Тогда  $OH = \frac{1}{4}BD = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ .  $QM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD =$   
 $= \frac{3}{\sqrt{2}}$ . Из  $\triangle OSH$  получаем  $SH = \sqrt{OH^2 + SO^2} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$ . Так как  
 $SNPMQ$  — правильная пирамида, то площадь её боковой поверхности  
 равна половине произведения периметра основания на апофему. То есть  
 $S_{\text{бок. } SNPMQ} = \frac{1}{2} \cdot 4QM \cdot SH = 13,5$ .

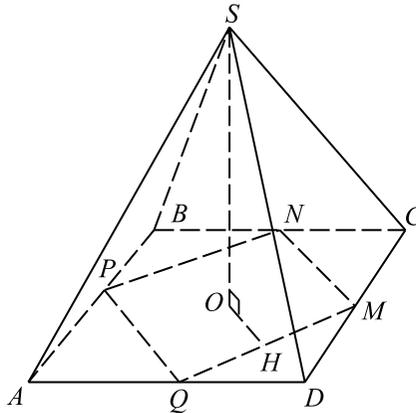


Рис. 127.

Ответ: 13,5.

**704.** Пусть  $KH \perp AB$ ,  $KH_1 \perp BC$ . Обозначим  $KH = x$ . Так как  $BK$  —  
 биссектриса угла  $B$ , то  $\triangle KHB = \triangle BKH_1$  и  $KH = HB = KH_1 = BH_1$ .  
 Тогда  $x = AH \cdot \operatorname{tg} \angle HAK = KH_1 = CH_1 \cdot \operatorname{tg} \angle KCH_1$  (см. рис. 128).  
 Учитывая, что  $AH = AB - HB = 2 - x$ ,  $CH_1 = BC - BH_1 = 4 - x$ ;  
 $\operatorname{tg} \angle KAH = \operatorname{tg} \angle CAB = \frac{BC}{AB} = 2$ ;  $\operatorname{tg} \angle KCH_1 = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{1}{2}$ , по-  
 лучаем  $(2 - x) \cdot 2 = (4 - x) \cdot \frac{1}{2}$ , откуда  $x = \frac{4}{3}$ . Пусть  $KO$  — перпенди-  
 куляр из  $K$  на  $ASB$ , тогда  $KO = KH \cdot \sin \angle OHK$ . Из прямоугольного  
 $\triangle SHK$  находим  $SH = \sqrt{SK^2 + HK^2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \sin \angle OHK = \frac{SK}{SH} = \frac{3}{5}$ .  
 $OK = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = 0,8$ .

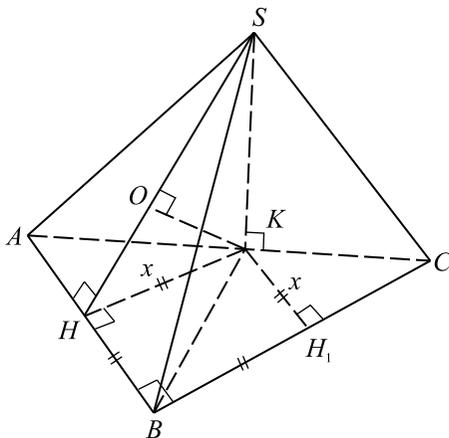


Рис. 128.

Ответ: 0,8.

**705.** Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — призма (см. рис. 129).  $\triangle ABC$  — равносторонний;  $AA_1, BB_1, CC_1$ , наклонены к плоскости основания под углом  $60^\circ$ ,  $AC_1 \perp$  пл.  $ABC$ ,  $S_{\text{бок.}} = 3\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})$ .

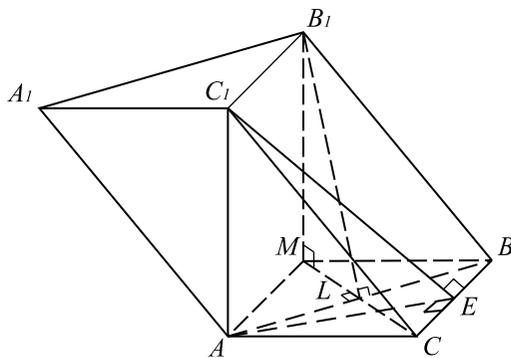


Рис. 129.

1) Пусть  $M$  — проекция точки  $B_1$  на плоскость  $ABC$ . Тогда  $AMC_1B_1$  — прямоугольник,  $C_1B_1 = AM = CB = AC$ ,  $CB \parallel C_1B_1 \parallel AM$ . Следовательно  $AMBC$  — ромб,  $MC \perp AB$ ,  $B_1MC \perp AB$ . Пусть  $L = MC \cap AB$ . Тогда  $B_1L \perp AB$ .

2) Пусть  $AE$  — высота  $\triangle ABC$ . Так как  $AC_1 \perp ABC$ ,  $C_1E$  — наклонная к плоскости  $ABC$ ,  $AE$  — проекция наклонной,  $AE \perp BC$ , то по теореме о трёх перпендикулярах  $C_1E \perp BC$ .

3) Покажем, что  $C_1E = B_1L$ . Так как  $\triangle ABC$  — равносторонний, то  $AE$  — медиана  $\triangle ABC$ ,  $CE = \frac{1}{2}BC$ .

$L$  — точка пересечения диагоналей ромба  $MACB$ , и значит  $LB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = CE$ .

Таким образом в треугольниках  $CC_1E$  и  $BB_1L$ :  $B_1B = C_1C$ ,  $\angle B_1LB = \angle C_1EC = 90^\circ$ ,  $BL = CE$ . Следовательно  $\triangle CC_1E = \triangle BB_1L$  и  $B_1L = C_1E$ .

4) Так как  $AC = AB$  и  $B_1L = C_1E$ , то  $S_{A_1B_1BA} = S_{C_1B_1BC}$ . Следовательно площадь боковой поверхности заданной призмы  $S_{\text{бок.}} = S_{AA_1C_1C} + 2S_{C_1B_1BC}$ .

5) Пусть  $AC_1 = x$  ( $x > 0$ ), тогда  $AC = \frac{AC_1}{\text{tg} \angle ACC_1} = \frac{x}{\text{tg} 60^\circ} = \frac{x}{\sqrt{3}}$ .

$$S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AC_1 = \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot x = \frac{x^2}{\sqrt{3}}.$$

6)  $AE$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABC$  — правильный,  $AE = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{x}{2}$ .

Из  $\triangle EAC_1$ :  $C_1E = \sqrt{AE^2 + AC_1^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{5}$ .

7)  $S_{CC_1B_1B} = BC \cdot C_1E = \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x}{2}\sqrt{5} = \frac{x^2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$ .

8)  $S_{\text{бок.}} = \frac{x^2}{\sqrt{3}} + \frac{2 \cdot x^2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{x^2(1 + \sqrt{5})}{\sqrt{3}}$ .

По условию  $S_{\text{бок.}} = 3\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})$ . Найдём  $x$  из уравнения

$$\frac{x^2(1 + \sqrt{5})}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}(1 + \sqrt{5}), x^2 = 9, x = 3. AC_1 = 3.$$

Ответ: 3.

**706.** Дано:  $ABC A_1 B_1 C_1$  — наклонная призма (см. рис. 130),  $\triangle ABC$  — правильный,  $O$  — центр  $\triangle ABC$ ,  $A_1 O \perp$  пл.  $ABC$ ,  $\angle A_1 O A = 45^\circ$ ,  $AC = \sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{6}}$ .

Найти:  $S_{\text{бок. пов.}}$ .

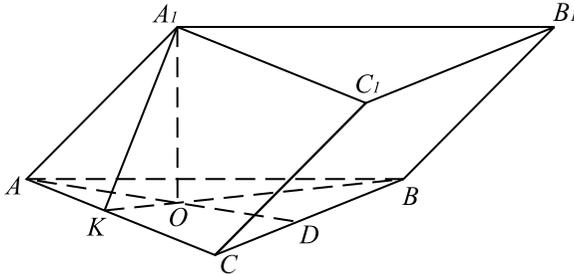


Рис. 130.

*Решение.*

1) Боковые грани призмы  $AA_1C_1C$  и  $AA_1B_1B$  — равные параллелограммы, а грань  $CC_1B_1B$  — прямоугольник (покажите самостоятельно).

$$S_{\text{бок. пов.}} = 2S_{AA_1C_1C} + S_{CC_1B_1B}.$$

2) Пусть  $a$  — длина стороны основания.  $AD$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABC$  — правильный,  $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $AO = \frac{2}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

3) Рассмотрим  $\triangle AOA_1$ :  $\angle A_1AO = 45^\circ$ , тогда  $AA_1 = AO \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

4)  $BK$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $BK \perp AC$ , тогда  $A_1K \perp AC$ .

$$\text{Из } \triangle AA_1K \text{ находим: } A_1K = \sqrt{AA_1^2 - AK^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{9} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

$$5) S_{AA_1C_1C} = AC \cdot A_1K = a \cdot \frac{a\sqrt{15}}{6} = \frac{a^2\sqrt{15}}{6}.$$

$$S_{CC_1B_1B} = BC \cdot CC_1 = a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2\sqrt{6}}{3}.$$

$$S_{\text{бок. пов.}} = \frac{2a^2\sqrt{15}}{6} + \frac{a^2\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2(\sqrt{15} + \sqrt{6})}{3}.$$

По условию  $a = \sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{6}}$ .

$$S_{\text{бок. пов.}} = \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{6})(\sqrt{15} + \sqrt{6})}{3} = 3.$$

Ответ: 3.

707.

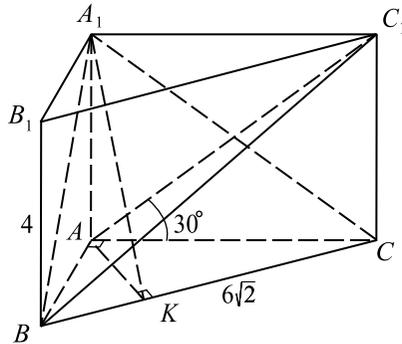


Рис. 131.

1) Из прямоугольного  $\triangle AC_1C$  находим:  $AC = CC_1 \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3}$  (см. рис. 131).

$$2) \text{ Из прямоугольного } \triangle ABC: AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

3) Пусть  $AK$  — высота  $\triangle ABC$ , проведённая к стороне  $BC$ .

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB$ , с другой стороны  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AK \cdot BC$ . Следовательно

$$AK = \frac{AC \cdot AB}{BC} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = 4$$

4)  $\triangle A_1AK$ :  $\angle A_1AK = 90^\circ$ ,  $AA_1 = AK$  следовательно,  $\angle KAA_1 = 45^\circ$ .

\*Доказать самостоятельно, что  $\angle CAC_1$  — линейный угол двугранного угла  $C_1ABC$ , а  $\angle KAA_1$  — линейный угол двугранного угла  $A_1BCA$ .

Ответ:  $45^\circ$ .

708. Рассмотрим рисунок 132.

Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,  $\angle BOC = 60^\circ$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ;  $BA_1C \perp AA_1C$ ;  $S_{BCA_1} = 16$ ;  $O$  — центр описанной окружности, угол между  $A_1BC$  и  $ABC$  равен  $30^\circ$ .

Найти  $R$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

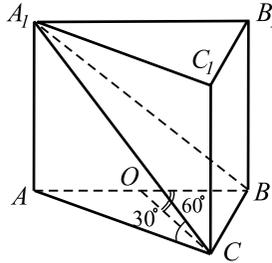


Рис. 132.

*Решение.*  $\angle A_1CB = 90^\circ$  (так как  $AC \perp BC$ , то по теореме о трёх перпендикулярах  $A_1C \perp BC$ ), поэтому  $\angle A_1CA = 30^\circ$  — линейный угол двугранного угла  $A_1BCA$ .

$BO = OC = R_{\text{оп.}}$ , тогда  $\triangle BOC$  — равносторонний,  $BC = R_{\text{оп.}}$ .

Из  $\triangle ABC$  имеем:  $AC = \frac{BC}{\operatorname{tg} 30^\circ} = BC\sqrt{3} = R\sqrt{3}$ .

Из  $\triangle AA_1C$  имеем:  $A_1C = \frac{AC}{\cos 30^\circ} = \frac{R\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2R$ .

$S_{\triangle A_1BC} = \frac{1}{2}A_1C \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2$ .

По условию  $S_{\triangle A_1BC} = 16$ ;  $R^2 = 16$ ;  $R = 4$ .

*Ответ:* 4.

**709.** Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая треугольная призма с основаниями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  (см. рис. 133),  $ABC$  — равнобедренный треугольник,  $AB = AC = 15$ ,  $BC = 12$ ,  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 0,8$ ,  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ ,  $K_1$  — середина ребра  $B_1C_1$ ,  $N_1$  — середина ребра  $B_1A_1$ ,  $\alpha$  — плоскость,  $K_1, N_1, M \in \alpha$ .

Найти: площадь сечения призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью  $\alpha$ .

*Решение.* Проведём через точку  $M$  отрезок  $KN$  параллельно  $K_1N_1$ , где  $K \in BC$ , а  $N \in AB$ . Тогда так как  $M \in KN$ ,  $M \in \alpha$ ,  $K_1N_1 \subset \alpha$  и  $KN \parallel K_1N_1$ , то  $KN \subset \alpha$ , а трапеция  $K_1N_1NK$  — сечение призмы плоскостью  $\alpha$ . Так как  $K_1N_1$  — средняя линия треугольника  $A_1B_1C_1$ , то

$K_1N_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 = 7,5$  и  $K_1N_1 \parallel A_1C_1 \parallel AC$ . Поэтому  $KN \parallel AC$ .

Так как  $KN \parallel AC$  и  $KN$  делит медиану треугольника  $ABC$ , проведённую из вершины  $B$ , в отношении  $2 : 1$ , считая, от вершины, то треугольники  $BKN$  и  $BKA$  подобны с коэффициентом подобия  $\frac{2}{3}$ . Тогда

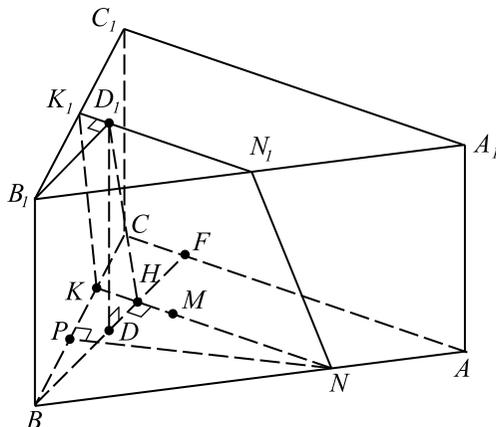


Рис. 133.

$BK = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ ,  $KN = BN = \frac{2}{3}BA = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$ . Пусть  $P$  — середина отрезка  $BK$ . Так как  $BN = KN$ , то  $NP \perp BK$ . Поэтому из  $\triangle BNP \Rightarrow NP = \sqrt{BN^2 - \frac{BK^2}{4}} = \sqrt{100 - 16} = 2\sqrt{21}$ . Пусть

$H \in KN$  и  $BH \perp KN$ . Тогда  $S_{BKN} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot NK \Rightarrow BH = \frac{BK \cdot NP}{NK} = \frac{8\sqrt{21}}{5}$ . Пусть  $F = AC \cap BH$ , а  $D_1 \in K_1N_1$ ,

так что  $B_1D_1 \perp KN$ . Опустим перпендикуляр  $D_1D$  на плоскость  $ABC$ ,  $DD_1 = BB_1 = 0,8$ . Так как  $B_1D_1 \perp K_1N_1$  и  $D_1$  принадлежит средней линии треугольника  $A_1B_1C_1$ , то  $D \in BF$  и  $BD = DF$ . Из подобия треугольников  $BKN$  и  $BCA$  следует, что  $BH = \frac{2}{3}BF$ . Таким образом,

$$DH = BH - BD = BH - \frac{1}{2}BF = BH - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}BH = \frac{1}{4}BH = \frac{2\sqrt{21}}{5}.$$

Из  $\triangle DD_1H \Rightarrow D_1H = \sqrt{DD_1^2 + DH^2} = \sqrt{0,64 + \frac{84}{25}} = 2$ . По теореме о трёх перпендикулярах так как  $DD_1 \perp$  пл.  $ABC$  и  $DH \perp KN$ , то  $D_1H \perp KN$ .

Следовательно, искомая площадь

$$S_{K_1N_1NK} = \frac{1}{2} \cdot (K_1N_1 + KN) \cdot D_1H = \frac{1}{2} \cdot 17,5 \cdot 2 = 17,5.$$

Ответ: 17,5.

710. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма (см. рис. 134),  $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ$ ,  $CC_1 = AA_1 = BB_1 = 2$ , расстояние от точки  $B_1$  до прямой  $AC$  равно  $\sqrt{40}$ , расстояние от точки  $A_1$  до прямой  $BC$  равно  $2\sqrt{17}$ .

Найти: расстояние от точки  $C_1$  до прямой  $AB$ .

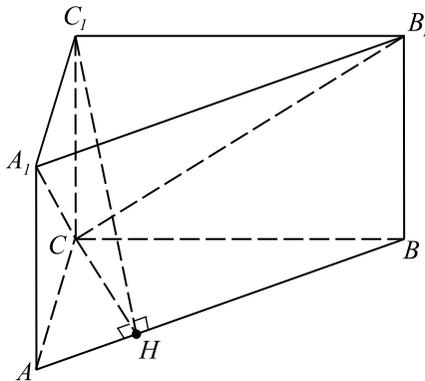


Рис. 134.

*Решение.* Так как  $AC \perp CB$  и  $AC \perp C_1C$ , то  $AC \perp$  пл.  $CC_1B_1 \Rightarrow AC \perp CB_1 \Rightarrow CB_1$  — расстояние от точки  $B_1$  до прямой  $AC \Rightarrow CB_1 = \sqrt{40}$ . Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что  $CA_1 = 2\sqrt{17}$ . По теореме Пифагора из  $\triangle CAA_1 \Rightarrow AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1^2} = \sqrt{68 - 4} = 8$ , а из  $\triangle CBB_1 \Rightarrow BC = \sqrt{B_1C^2 - BB_1^2} = \sqrt{40 - 4} = 6$ .

Тогда из  $\triangle ABC$  по теореме Пифагора  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$ . Пусть  $H \in AB$  и  $CH \perp AB$ . Так как  $AB \perp CH$  и  $CC_1 \perp AB$ , то  $AB \perp$  пл.  $CC_1H$ . Поэтому  $C_1H \perp AB$ , а значит,  $C_1H$  — расстояние от точки  $C_1$  до прямой  $AB$ .  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}CH \cdot AB \Rightarrow$

$$CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = 4,8.$$

По теореме Пифагора из  $\triangle HCC_1 \Rightarrow C_1H = \sqrt{CH^2 + CC_1^2} = \sqrt{23,04 + 4} = 5,2$ .

Ответ: 5,2.

711.

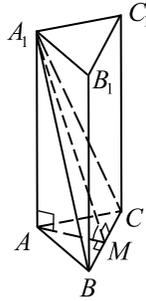


Рис. 135.

Так как  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма, то треугольник  $ABC$  является ортогональной проекцией треугольника  $A_1BC$  (см. рис. 135). Пусть  $A_1M$  — высота  $\triangle BA_1C$ , тогда  $AM$  — проекция  $A_1M$  на плоскость  $ABC$ , и значит  $AM \perp BC$ . По определению линейным углом двугранного угла между плоскостями  $ABC$  и  $A_1BC$  является  $\angle AMA_1$ .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AM = 2AM = 6 \Rightarrow AM = 3.$$

$$S_{\triangle A_1BC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot A_1M = 2A_1M = 6\sqrt{10} \Rightarrow A_1M = 3\sqrt{10}.$$

$$\text{Из } \triangle A_1AM: \operatorname{tg} \angle AMA_1 = \frac{A_1M}{AM} = \frac{\sqrt{A_1M^2 - AM^2}}{AM} = \frac{\sqrt{90 - 9}}{3} = 3.$$

Ответ: 3.

712. Так как  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямая призма, то  $\triangle ABC$  является ортогональной проекцией  $\triangle ABC_1$ . Пусть  $C_1K$  — высота  $\triangle ABC_1$ , тогда  $CK$  — проекция  $C_1K$  на плоскость  $ABC$ , и  $CK \perp AB$ .

Следовательно  $\angle KCC_1$  — линейный угол двугранного угла между плоскостями  $ABC$  и  $ABC_1$  (см. рис. 136).

$$S_{ABCD} = AB \cdot CK = 7CK = 28 \Rightarrow CK = 4.$$

$$\text{Из } \triangle C_1CK: C_1C = CK \cdot \operatorname{tg} \angle KCC_1 = 4 \cdot 2,75 = 11.$$

Ответ: 11.

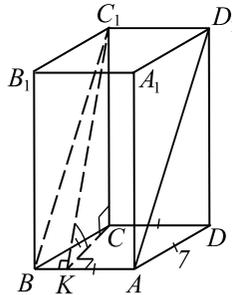


Рис. 136.

**713.** Пусть  $\alpha$  — величина угла между прямыми  $A_1B$  и  $AC$ . Поскольку  $A_1C_1 \parallel AC$ , то  $\alpha = \angle C_1A_1B$ , (см. рис. 137). Так как  $A_1C_1 \perp C_1B_1$  и

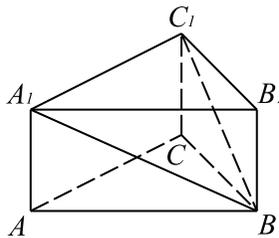


Рис. 137.

$A_1C_1 \perp C_1C$ , то  $A_1C_1 \perp B_1C_1C$ . Следовательно,  $A_1C_1 \perp BC_1$ ,  $\cos \alpha = \frac{A_1C_1}{A_1B}$ . Из  $\triangle ACB$  и  $\triangle A_1AB$  по теореме Пифагора имеем:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 13, A_1B = \sqrt{AA_1^2 + AB^2} = 4 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{4} = 0,75.$$

*Ответ:* 0,75.

**714.** Обозначим искомый угол через  $\alpha$  и заметим, что  $\alpha = \angle BA_1C_1$ . Пусть  $K$  — проекция точки  $B$  на прямую  $A_1C_1$ , а  $L$  — проекция точки  $K$  на прямую  $AC$ , (см. рис. 138). Тогда  $AC \perp LKB$ , и значит  $AC \perp LB$ . Из  $\triangle A_1KB$  имеем:  $\sin \alpha = \frac{BK}{A_1B}$ . Длины  $BK$  и  $A_1B$  выразим по теореме Пифагора из  $\triangle BKL$  и  $\triangle BA_1A$ :

$$BK = \sqrt{KL^2 + BL^2} = \sqrt{1 + BL^2}, A_1B = \sqrt{AA_1^2 + AB^2} = 3.$$

Высоту  $BL$  в  $\triangle ABC$  найдём выразив площадь  $\triangle ABC$  двумя способами:  $2S_{ABC} = BL \cdot AC = BC \cdot AH$ , где  $AH$  — высота к основанию  $BC$ . Так как

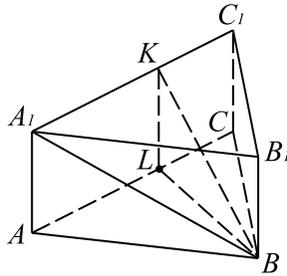


Рис. 138.

$AB = AC$ , то  $AH$  является и медианой  $\triangle ABC$ , то есть  $BH = BC/2 = 1$ . По теореме Пифагора  $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{7}$ . Итак,  $BL = \frac{AH \cdot BC}{AC} = \sqrt{\frac{7}{2}}$ ,  $BK = \sqrt{1 + BL^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Так как  $\triangle A_1KB$  — прямоугольный, то следовательно  $\angle \alpha < 90^\circ$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , градусная мера  $\alpha$  составляет  $45^\circ$ .

Ответ: 45.

**715.** Так как диаметр описанной около боковой грани окружности равен диагонали прямоугольника  $AA_1B_1B$ , то  $AB = \sqrt{A_1B^2 - AA_1^2} = \sqrt{69 - 49} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ . Найдём отрезок  $AC$  (см. рис. 139). По теореме косинусов из треугольника  $ABC$  находим  $AC = AB\sqrt{3} = 2\sqrt{15}$ .  $AK = \frac{1}{2}AC = \sqrt{15}$ . Так как  $AK \perp A_1F_1$ , то по теореме о трёх перпендикулярах  $KA_1 \perp A_1F_1$ . Тогда  $\angle AA_1K$  — линейный угол двугранного угла между плоскостями  $A_1BE$  и  $AFF_1$ , то есть искомый угол.

$$\cos \angle AA_1K = \frac{AA_1}{A_1K} = \frac{7}{\sqrt{7^2 + \sqrt{15}^2}} = 0,875.$$

Ответ: 0,875.

**716.** Так как основанием правильной шестиугольной призмы является правильный шестиугольник, то сторона основания равна радиусу описанной окружности, то есть  $AB = \sqrt{3}$ . Найдём отрезок  $AC$  (см. рис. 140). По теореме косинусов из треугольника  $ABC$  находим  $AC = AB\sqrt{3} = 3$ . Так как  $AC \perp CD$ , то по теореме о трёх перпендикулярах  $A_1C \perp CD$ .

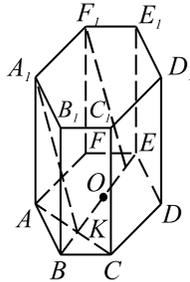


Рис. 139.

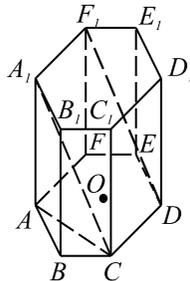


Рис. 140.

Тогда  $\angle A_1CA$  — линейный угол двугранного угла между плоскостями  $A_1CD$  и  $ACD$ , то есть искомый угол.  $\sin \angle A_1CA = \frac{AA_1}{A_1C} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8$ .

*Ответ:* 0,8.

**717.** Так как основанием правильной шестиугольной призмы является правильный шестиугольник, то сторона основания равна радиусу описанной окружности, то есть  $AB = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$ . Найдём отрезок  $AC$  (см. рис. 141).

По теореме косинусов из треугольника  $ABC$  находим  $AC = AB\sqrt{3} = \sqrt{11}$ . Так как  $AC \perp A_1F_1$ , то по теореме о трёх перпендикулярах  $A_1C \perp A_1F_1$ . Тогда  $\angle AA_1C$  — линейный угол двугранного угла между плоскостями  $A_1CD$  и  $A_1AF$ , то есть искомый угол.  $\cos \angle AA_1C = \frac{AA_1}{A_1C} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + \sqrt{11}^2}} = \frac{5}{6}$ ,  $\frac{1}{\cos \angle AA_1C} = \frac{6}{5} = 1,2$ .

*Ответ:* 1,2.

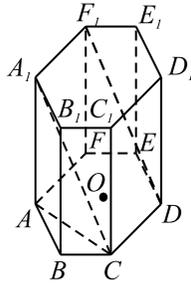


Рис. 141.

718. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма (см. рисунок 142),  
 $BC = 20$ , расстояние от точки  $B_1$  до прямой  $AC$  равно 15,  
 $\sin \angle(B_1C_1, AC) = \frac{3}{5}$ .

Найти:  $BB_1$ .

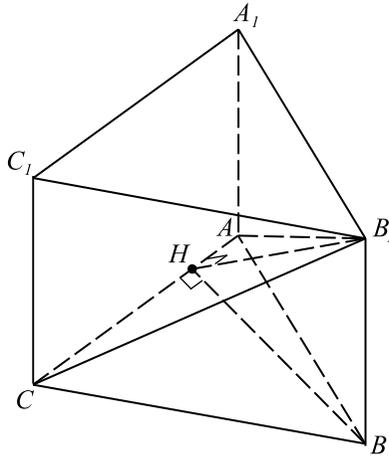


Рис. 142.

План решения: 1. Рассмотрим такую точку  $H$  прямой  $AC$ , что  $AC \perp$  пл.  $BB_1H$ . 2. Из треугольника  $BHC$  найдём  $BH$ . 3. Из треугольника  $BHB_1$  найдём  $BB_1$ .

Решение. 1. Пусть  $H \in AC$ , так что  $AC \perp$  пл.  $BB_1H$ , тогда  $AC \perp BH$  и  $AC \perp B_1H$ . Так как  $B_1H \perp AC$ , то  $B_1H$  — расстоя-

ние от точки  $B_1$  до прямой  $AC$  и следовательно,  $B_1H = 15$ . 2. Так как  $B_1C_1 \parallel BC$ , то  $\angle(B_1C_1, AC) = \angle(BC, AC) \Rightarrow \sin \angle ACB =$   
 $= \sin \angle(B_1C_1, AC) = \frac{3}{5}$ . Из прямоугольного треугольника  $BCH$  находим

$BH = BC \cdot \sin \angle ACB = 20 \cdot \frac{3}{5} = 12$ . 3. Из прямоугольного треугольника  $BB_1H$  находим по теореме Пифагора  
 $BB_1 = \sqrt{B_1H^2 - BH^2} = \sqrt{225 - 144} = 9$ .

Ответ: 9.

719. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма (см. рисунок 143),  $BC = 15$ , расстояние между прямыми  $B_1C_1$  и  $AC$  равно 8,  $\sin \angle(B_1C_1, AC) = \frac{2}{5}$ .

Найти: расстояние от точки  $B_1$  до прямой  $AC$ .

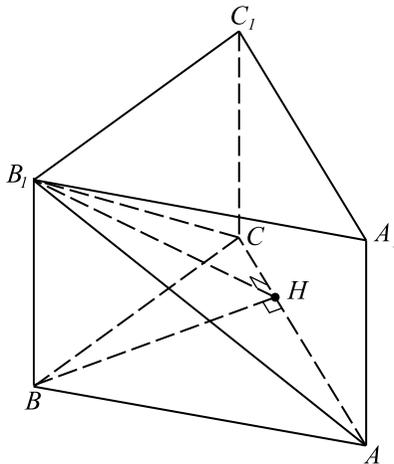


Рис. 143.

План решения: 1. Рассмотрим такую точку  $H$  прямой  $AC$ , что  $AC \perp$  пл.  $BB_1H$ . 2. Из треугольника  $BHC$  найдём  $BH$ . 3. Из треугольника  $BHB_1$  найдём  $B_1H$ .

Решение. 1. Пусть  $H \in AC$ , так что  $AC \perp$  пл.  $BB_1H$ , тогда  $AC \perp BH$  и  $AC \perp B_1H$ . Так как  $B_1H \perp AC$ , то расстояние от точки  $B_1$  до прямой  $AC$  равно длине отрезка  $B_1H$ . Так как параллельные плоско-

сти  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  содержат скрещивающиеся прямые  $B_1C_1$  и  $AC$  соответственно, то расстояние между прямыми  $B_1C_1$  и  $AC$  равно расстоянию между плоскостями  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$ . Значит,  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 8$ .  
 2. Так как  $B_1C_1 \parallel BC$ , то  $\angle(B_1C_1, AC) = \angle(BC, AC) \Rightarrow \sin \angle ACB = \sin \angle(B_1C_1, AC) = \frac{2}{5}$ . Из прямоугольного треугольника  $BCH$  находим

$BH = BC \cdot \sin \angle ACB = 15 \cdot \frac{2}{5} = 6$ . 3. Из прямоугольного треугольника

$BB_1H$  находим по теореме Пифагора  
 $B_1H = \sqrt{BB_1^2 + BH^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$ .

Ответ: 10.

720.

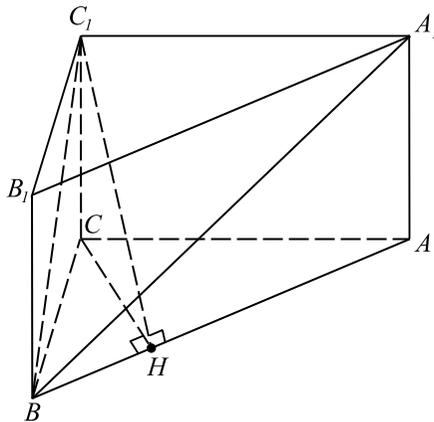


Рис. 144.

1. Так как  $AC \perp BC_1$  и  $AC \perp CC_1$ , то  $AC \perp$  пл.  $BCC_1$ . Следовательно,  $AC \perp BC$  и  $A_1C_1 \perp BC_1$ , то есть треугольники  $ACB$  и  $A_1C_1B$  — прямоугольные.

2. Из прямоугольного треугольника  $ABA_1$  по теореме Пифагора находим  $AB = \sqrt{A_1B^2 - AA_1^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ . Так как  $AC \parallel A_1C_1$ , то угол между прямыми  $A_1B$  и  $AC$  равен углу между прямыми  $A_1B$  и  $A_1C_1$ . Поэтому из условия задачи следует, что  $\sin \angle BA_1C_1 = \frac{4\sqrt{10}}{13}$ . Из

$\triangle A_1BC_1$  находим:  $BC_1 = A_1B \cdot \sin \angle BA_1C_1 = 13 \cdot \frac{4\sqrt{10}}{13} = 4\sqrt{10}$  и

$A_1C_1 = \sqrt{A_1B^2 - BC_1^2} = \sqrt{169 - 160} = 3$ . Так как  $AC = A_1C_1$ , то из  $\triangle ABC$  имеем:  $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ .

3. Пусть  $CH$  — высота  $\triangle ABC$ , тогда по теореме о трёх перпендикулярах  $C_1H \perp AB$ . Так как  $AB$  — линия пересечения плоскостей  $BC_1A$  и  $ABC$  и  $AB \perp$  пл.  $CC_1H$ , то угол между плоскостями  $BC_1A$  и  $ABC$  равен углу  $C_1HC$ .

4. Так как  $2S_{ABC} = BC \cdot AC = AB \cdot CH$ , то  $CH = \frac{BC \cdot AC}{AB} = \frac{12}{5}$ .

Из прямоугольного треугольника  $C_1CH$  находим:  $\operatorname{tg} \angle C_1HC = \frac{CC_1}{CH} = 5$ .

Ответ: 5.

721.

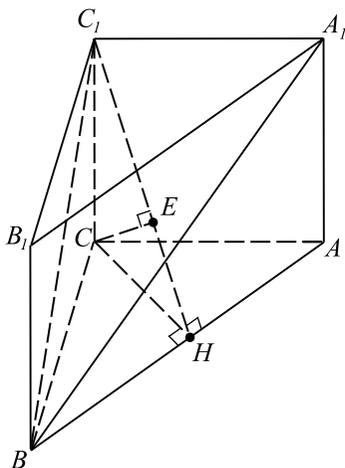


Рис. 145.

План решения: 1. Докажем, что  $AC \perp$  пл.  $BCC_1$ . 2. Найдём длины рёбер призмы  $ABCA_1B_1C_1$ . 3. Рассмотрим такую точку  $H$  прямой  $AB$ , что  $AB \perp$  пл.  $CC_1H$  и докажем, что угол между плоскостью  $AC_1B$  и прямой  $CC_1$  равен углу  $CC_1H$ . 4. Из треугольника  $CC_1H$  найдём  $\angle CC_1H$ .

Решение. 1. Так как  $AC \perp BC_1$  и  $AC \perp CC_1$ , то  $AC \perp$  пл.  $BCC_1$ , а значит, и  $A_1C_1 \perp$  пл.  $BCC_1$ . Следовательно,  $AC \perp BC$  и  $A_1C_1 \perp BC_1$ , то есть треугольники  $ACB$  и  $A_1C_1B_1$  — прямоугольные. 2. Из прямоугольного треугольника  $ABA_1$  по теореме Пифагора находим  $AB = \sqrt{A_1B^2 - AA_1^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ . Так как  $AC \parallel A_1C_1$ , то  $\angle(A_1B, AC) =$

$= \angle(A_1B, A_1C_1)$ . Значит,  $\sin \angle BA_1C_1 = \sin \angle(A_1B, AC) = \frac{\sqrt{21}}{5}$ . Тогда из прямоугольного треугольника  $A_1BC_1$  находим  $BC_1 =$   
 $= A_1B \cdot \sin \angle BA_1C_1 = 5 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = \sqrt{21}$  и  $A_1C_1 = \sqrt{A_1B^2 - BC_1^2} =$   
 $= \sqrt{25 - 21} = 2$ . Так как  $AC = A_1C_1$ , то из прямоугольного треугольника  $ABC$  следует, что  $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$ . 3. Пусть  $H \in AB$  так, что  $AB \perp$  пл.  $CC_1H$ , тогда  $CH \perp AB$  и  $C_1H \perp AB$ . Опустим из точки  $C$  перпендикуляр  $CE$  на прямую  $C_1H$ . Так как  $AB \perp CE$  (в силу того, что  $AB \perp$  пл.  $CC_1H$ ) и  $CE \perp C_1H$ , то  $CE \perp$  пл.  $ABC_1$ . Следовательно, угол между плоскостью  $AC_1B$  и прямой  $CC_1$  равен углу  $CC_1H$ . 4. Так как  $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2}AB \cdot CH$ , то  $CH = \frac{BC \cdot AC}{AB} =$   
 $= \sqrt{3}$ . Из прямоугольного треугольника  $C_1CH$  находим  $\operatorname{tg} \angle HC_1C =$   
 $= \frac{CH}{CC_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Поэтому  $\angle HC_1C = 30^\circ$ .

Ответ: 30.

**722.** Проведём из точки  $O$  перпендикуляр  $OK$  на сторону  $AC$  (см. рис. 146). Так как треугольники  $ABC$  и  $AOC$  имеют общее основание  $AC$ , то отношение площадей этих треугольников равно отношению их высот, то есть,  $S_{OAC} : S_{ABC} = OK : BK$ .

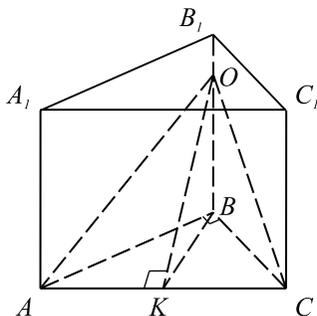


Рис. 146.

Найдём  $BK$ . Так как по условию треугольник  $ABC$  равнобедренный и прямоугольный, то по теореме Пифагора  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ . Отсюда  $2AB^2 = AC^2$ ,  $AB = \sqrt{\frac{AC^2}{2}} = \sqrt{\frac{10^2}{2}} = 5\sqrt{2}$ . Из треугольника

$ABK$  по теореме Пифагора  $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{50 - 25} = 5$ .

Найдём высоту  $OK$ . Так как, по условию, точка  $O$  делит  $B_1B$  в отношении  $1 : 3$ , то  $OB = \frac{3}{4}B_1B = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$ .  $OK$  находим из прямоугольного треугольника  $OKB$  по теореме Пифагора  $OK = \sqrt{OB^2 + KB^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ . Получаем,  $\frac{OK}{BK} = \frac{13}{5} = 2,6$ .

Ответ: 2,6.

**723.** Так как треугольники  $AOC$  и  $AB_1C$  имеют одно основание  $AC$ , то отношение квадратов площадей этих треугольников равно отношению квадратов их высот  $OK^2 : B_1K^2$  (см. рис. 147).

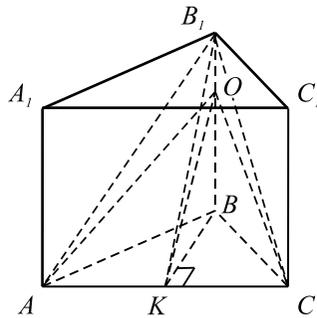


Рис. 147.

Из треугольника  $OKB$ , по теореме Пифагора,  $OK^2 = OB^2 + BK^2$ . Или, учитывая, что треугольник  $OBK$  — равнобедренный,  $OK^2 = 2OB^2$ . Из треугольника  $B_1KB$ , по теореме Пифагора,  $B_1K^2 = B_1B^2 + BK^2$ . Так как по условию  $B_1O : OB = 1 : 3$ , то  $B_1B = \frac{4}{3}OB$ . И, учитывая, что

$OB = BK$ , получим  $B_1K^2 = \frac{16}{9}OB^2 + OB^2 = \frac{25}{9}OB^2$ . Следовательно,

$$\frac{OK^2}{B_1K^2} = \frac{9 \cdot 2OB^2}{25OB^2} = \frac{18}{25} = 0,72.$$

Получаем,  $S_{AOC}^2 : S_{AB_1C}^2 = 0,72$ .

Ответ: 0,72.

724. По условию задачи сделаем чертёж (см. рис. 148).

$\operatorname{tg} \alpha = 1$ ,  $\operatorname{tg} \beta = 4$ . (1) Проведём высоту  $BK$  в  $\triangle ABC$ . Искомым уг-

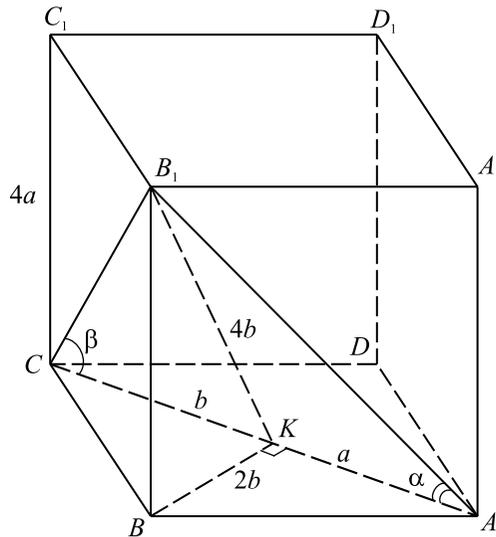


Рис. 148.

лом будет  $\angle BKB_1$ . Обозначим  $AK = a$ ,  $CK = b$ . Из условий (1) и из прямоугольных треугольников  $AKB_1$  и  $CKB_1$  следует, что  $B_1K = 4b$  и  $B_1K = a$ . То есть  $4b = a$ .

Высота  $BK$  прямоугольного  $\triangle ABC$   $BK^2 = ab = 4b^2$ . Значит  $BK = 2b$ .

Из прямоугольного  $\triangle B_1BK$   $\cos \angle BKB_1 = \frac{1}{2}$ , то есть  $\angle BKB_1 = 60^\circ$ .

Ответ: 60.

725. По условию задачи сделаем чертёж (см. рис. 149).  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ ,

$\operatorname{tg} \beta = 4$ . (1)

Проведём высоту  $CH$  в  $\triangle DCB$ . Искомым углом будет  $\angle H_1CH$ . Обозначим  $DH = a$ ,  $BH = b$ . Из условий (1) и из прямоугольных треугольников  $B_1H_1C$  и  $D_1H_1C$  следует, что  $CH_1 = b \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{2}$  и  $CH_1 = a \operatorname{tg} \beta = 4a$ . Отсюда  $b = 8a$ .  $CH = \sqrt{ab} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}a$ .

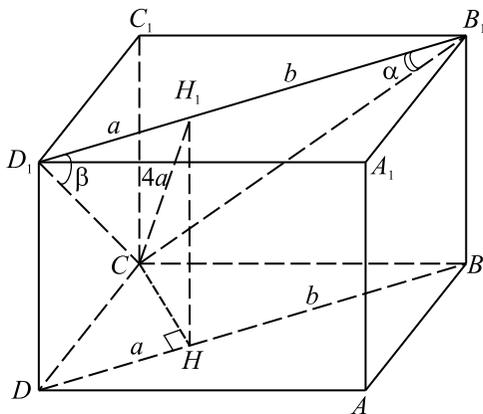


Рис. 149.

Из прямоугольного треугольника  $H_1CH$  находим, что  $\cos \angle H_1CH = \frac{CH}{CH_1} = \frac{2\sqrt{2}a}{4a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Значит  $\angle H_1CH = 45^\circ$ .

Ответ: 45.

**726. 1.** Сечение  $KLPD_1$  является трапецией, так как  $PL \parallel KD_1$  (см. рис. 150).

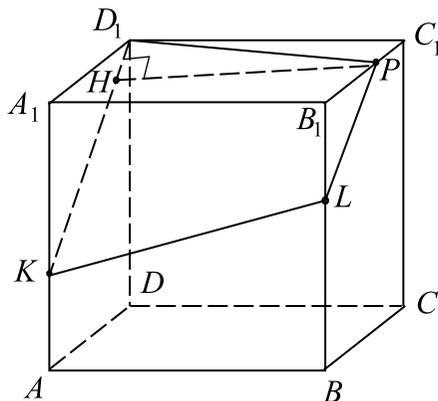


Рис. 150.

$$2. \triangle K A_1 D_1 \text{ — прямоугольный} \Rightarrow K D_1 = \sqrt{A_1 K^2 + A_1 D_1^2} = 4\sqrt{2}.$$

$$3. \triangle L B_1 P \sim \triangle K A_1 D_1 \Rightarrow \frac{PL}{K D_1} = \frac{B_1 L}{A_1 K} \Rightarrow PL = \frac{B_1 L \cdot K D_1}{A_1 K} = 3\sqrt{2}.$$

4. Так как  $KL = D_1 P$ , то  $KL P D_1$  — равнобочная трапеция. Пусть  $PH \perp D_1 K$ , тогда  $D_1 H = \frac{1}{2}(D_1 K - PL) = \frac{1}{2}(4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\triangle P D_1 C_1 \text{ — прямоугольный} \Rightarrow P D_1 = \sqrt{D_1 C_1^2 + P C_1^2} = \sqrt{5}.$$

$$\triangle P H D_1 \text{ — прямоугольный} \Rightarrow P H = \sqrt{P D_1^2 - D_1 H^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$5. S_{K L P D_1} = \frac{1}{2}(K D_1 + P L) \cdot P H = 10,5.$$

Ответ: 10,5.

**727.** 1. Сечение  $A_1 B C$  разбивает призму  $A B C A_1 B_1 C_1$  на две пирамиды  $A A_1 B C$  и  $A_1 B B_1 C_1 C$  (см. рис. 151). Пусть  $V$  — объём призмы,  $V_1$  — объём пирамиды  $A A_1 B C$ ,  $V_2$  — объём пирамиды  $A_1 B B_1 C_1 C$ . По свойству объёмов  $V = V_1 + V_2$ . (1)

2. Проведём  $A M \perp B C$ , тогда  $A_1 M \perp B C$ . Обозначим  $A M = h$ ,  $A_1 M = \sqrt{100 + h^2}$ . Проведём  $M M_1 \parallel A A_1$ , тогда  $A M \perp M M_1$ , значит  $A M \perp B B_1 C_1$ ,  $A_1 M_1 \parallel A M \Rightarrow A_1 M_1 \perp B B_1 C_1$ ,  $A_1 M_1 = A M = h$ .

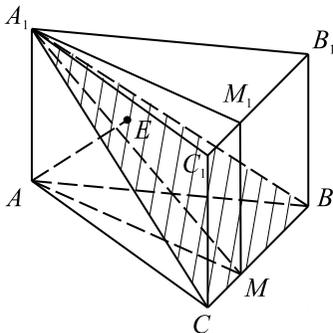


Рис. 151.

$$3. \text{Найдём } V, V_1, V_2. V = S_{A B C} \cdot A A_1 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot h \cdot 10 = 80h;$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{A_1 B C} \cdot A E = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \sqrt{100 + h^2} \cdot 6 = 16 \cdot \sqrt{100 + h^2};$$

$V_2 = \frac{1}{3} \cdot S_{BB_1C_1C} \cdot A_1M_1 = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 10 \cdot h = \frac{160}{3}h$ . Найденные значения

объёмов подставим в формулу (1):  $80h = 16\sqrt{100 + h^2} + \frac{160}{3}h$ . Положительный корень этого уравнения  $h = 7,5$ .

$$4. S_{A_1BC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot A_1M = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \sqrt{100 + 56,25} = 100.$$

Ответ: 100.

728. Так как  $\sin \alpha = 0,6$ , то  $A_1M = \frac{12}{\sin \alpha} = 20$  (см. рис. 152).

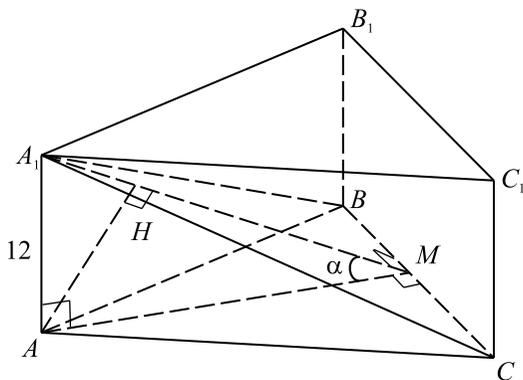


Рис. 152.

Из  $\triangle AA_1M$  следует  $AM = \sqrt{A_1M^2 - AA_1^2} = 16$ ,  $AH$  — искомое расстояние.  $AH = AM \sin \alpha$ ,  $AH = 16 \cdot \sin \alpha$ ,  $AH = 16 \cdot 0,6 = 9,6$ .

Ответ: 9,6.

729. Если в боковую грань прямой призмы можно вписать окружность, то такая грань является квадратом. Пусть сторона этого квадрата равна  $a$ .

Тогда имеем:  $S_{\text{пол}} = 3a^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = (3 + \frac{\sqrt{3}}{2})a^2 = 12 + 2\sqrt{3}$ . Отсюда  $a = 2$ . Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине стороны квадрата:  $r = \frac{a}{2} = 1$ .

Ответ: 1.

730.  $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot CC_1$ . Из  $\triangle C_1OC$ :  $CC_1 = OC$  (см. рис. 153).

$CO = \frac{2}{3}CH$  (по свойству медиан). Из  $\triangle ACH$   $CH = \sqrt{100 - 36} = 8$ .

$$CO = \frac{16}{3}, CC_1 = \frac{16}{3}. S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48. V_{ABCA_1B_1C_1} = 256.$$

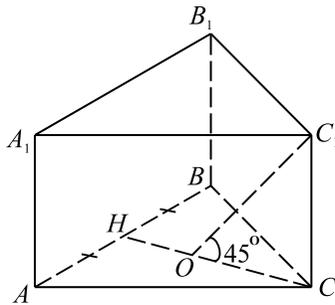


Рис. 153.

Ответ: 256.

731.

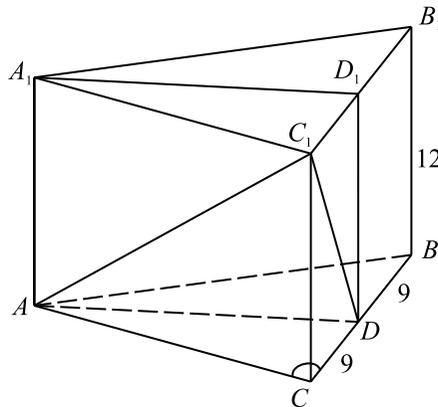


Рис. 154.

Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма (см. рис. 154);  $CC_1 = 12$ ,  $BC = 18$ ,  $\operatorname{tg} \angle ACD = 0,4$ ,  $AC = AB$ .

Найти: тангенс угла между прямой  $AC_1$  и плоскостью  $BB_1C$ .

Проведём  $AD \perp BC$ . Тогда искомым углом будет  $\angle AC_1D$ . Так как

$\operatorname{tg} \angle ACD = \frac{AD}{CD} = \frac{AD}{9}$ , то  $AD = 9 \cdot 0,4 = 3,6$ . Для нахождения угла

$AC_1D$  найдём  $C_1D$ . Из  $\triangle CC_1D$ :  $C_1D^2 = 144 + 81 = 225$ .

$$\begin{aligned} \text{Значит } C_1D = 15. \angle C_1DA = 90^\circ. \operatorname{tg} \angle AC_1D = \frac{AD}{C_1D} = \frac{3,6}{15} = \\ = \frac{1,2}{5} = 0,24. \end{aligned}$$

Ответ: 0,24.

**732.** Пусть  $CM$  — перпендикуляр, проведённый из точки  $C$  к плоскости  $BC_1D$  (см. рис. 155). Так как  $BC = CD$  и  $BC_1 = C_1D$ , то высота  $C_1K$  (она же и медиана) треугольника  $BC_1D$  проходит через точку  $M$ . В  $\triangle KMC$ :

$$KC = \frac{CM}{\sin \angle MKC} = \frac{3\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = 6\sqrt{2}. \text{ Так как } ABCD \text{ — квадрат, то } KC = KD, \text{ и из } \triangle KCD \text{ имеем } CD^2 = (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 = 144, CD = 12.$$

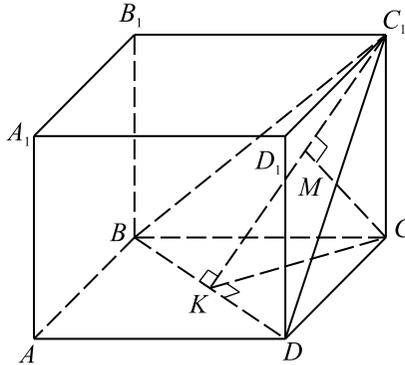


Рис. 155.

Ответ: 12.

**733.** Пусть  $CH$  — высота из  $C$  на  $DBC_1$  (см. рис. 156). Так как по условию  $\angle HOC = 45^\circ$ , то  $OC = \frac{CH}{\sin 45^\circ} = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ .  $\triangle COC_1$  — равнобедренный и  $OC = CC_1$ , поэтому  $CC_1 = 4\sqrt{2}$ .  $CD = OC \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$ .  $V_{\text{призмы}} = 64 \cdot 4\sqrt{2}$ ;

$$S_{\text{бок. пов.}} = 32 \cdot 4\sqrt{2}; \quad \frac{V_{\text{призмы}}}{S_{\text{бок. пов.}}} = \frac{64 \cdot 4\sqrt{2}}{32 \cdot 4\sqrt{2}} = 2.$$

Ответ: 2.

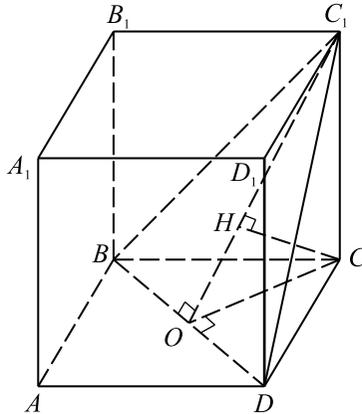


Рис. 156.

734. 1. Построим линейный угол двугранного угла между плоскостями  $ABC$  и  $D_1BC$  (см. рис. 157).  $BK \perp BC$ ,  $FK \parallel AA_1$ ,  $AA_1 \perp ADC \Rightarrow FK \perp ADC$ ,  $FB$  — наклонная к  $ADC \Rightarrow FB \perp BC$  по теореме о трёх перпендикулярах.  $\angle FBK$  — искомый.

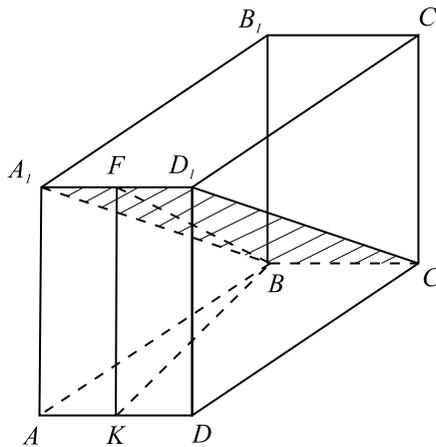


Рис. 157.

2. В прямоугольном треугольнике  $FKB$   $\operatorname{tg} \angle FBK = \frac{FK}{BK}$ ,  $FK =$   
 $= AA_1 = 15$ ,  $BK = \frac{1}{2}AB$  как катет, лежащий против угла  $30^\circ$ ,  $AB =$   
 $= CD \Rightarrow BK = 5$ .

$$\operatorname{tg} \angle FBK = \frac{15}{5} = 3.$$

Ответ: 3.

735.

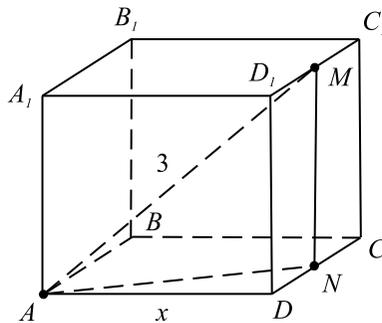


Рис. 158.

Пусть ребро куба равно  $x$  (см. рис. 158). Точки  $N$  и  $M$  — середины рёбер  $DC$  и  $D_1C_1$  соответственно. Тогда  $AN^2 + MN^2 = AM^2$ ,  
 $\left(x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) + x^2 = 9$ ,  $2x^2 + \frac{x^2}{4} = 9$ ,  $\frac{9x^2}{4} = 9$ ,  $x = 2$ .  
 $S = 6 \cdot x^2 = 6 \cdot 4 = 24$ .

Ответ: 24.

**736.** По условию точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  — середины попарно скрещивающихся рёбер куба. Зная это, постараемся установить вид  $\triangle ABC$ , для чего выполним рисунок и укажем на нём соответствующие длины сторон, применяя теорему Пифагора (см. рис. 159).

Делаем вывод: если ребро куба обозначить через  $a$ , то  $AB = BC =$   
 $= AC = a\sqrt{1,5}$ , следовательно,  $\triangle ABC$  — равносторонний. Расстояние от точки  $A$  до прямой  $BC$  равно длине высоты  $AK$ .



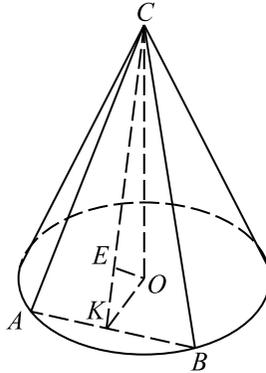


Рис. 160.

б) В прямоугольном  $\triangle COK$   $OK = \sqrt{CK^2 - OC^2} = 10$ .

$$3. CK \cdot OE = OC \cdot OK, OE = \frac{OC \cdot OK}{CK} = \frac{7,5 \cdot 10}{12,5} = 6.$$

Ответ: 6.

738. Дано: конус с центром основания  $O$  и вершиной  $S$  (см. рис. 161),  $SO = 15$ ,  $OA = OB = 25$ , расстояние от точки  $O$  до плоскости  $SAB$  равно 12.

Найти:  $AB$ .

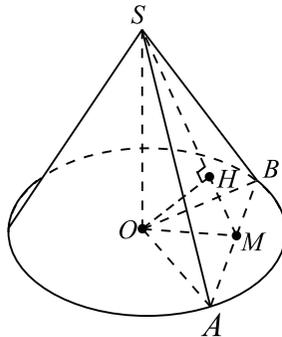


Рис. 161.

План решения:

1. Опустим перпендикуляр  $OH$  на плоскость  $SAB$  и отметим середину  $M$  отрезка  $AB$ .

2. Из треугольника  $SOM$  найдём  $OM$ .

3. Из треугольника  $AOM$  найдём  $AM$  и  $AB$ .

*Решение.* 1. Пусть  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на плоскость  $SAB$ . Рассмотрим точку  $M$ , являющуюся серединой отрезка  $AB$ . Тогда  $OM \perp AB$  и  $SM \perp AB$  в силу равнобедренности треугольников  $OAB$  и  $SAB$ . Значит,  $AB \perp$  пл.  $OSM$ . Поэтому плоскость  $OSM$  — плоскость, проходящая через точку  $O$  и перпендикулярная плоскости  $SAB$ . Следовательно, точка  $H$  лежит на отрезке  $SM$ .

2. Из прямоугольных треугольников  $SOH$  и  $SOM$  находим

$$\sin \angle OSH = \frac{OH}{OS} = \frac{4}{5}, \cos \angle OSH = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} \angle OSH = \frac{4}{3},$$

$$OM = SO \cdot \operatorname{tg} \angle OSH = 20.$$

3. В силу теоремы Пифагора из треугольника  $OAM$  получаем, что  $AM = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ . Значит,  $AB = 2AM = 30$ .

*Ответ:* 30.

**739.** Пусть  $SO$  — высота конуса. Проведём  $OK \perp SA$  (см. рис. 162). Имеем:  $MN \perp SA$  по условию,  $SO \perp MAN \Rightarrow SO \perp MN \Rightarrow MN \perp SOA$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости,  $OK \subset SOA \Rightarrow MN \perp OK$ .

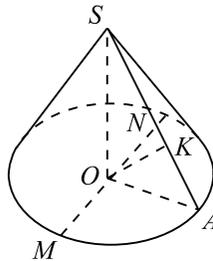


Рис. 162.

Таким образом,  $OK$  — общий перпендикуляр прямых  $MN$  и  $SA$ , а значит, его длина есть расстояние между ними.

$$OK = \frac{SO \cdot OA}{SA} = \frac{SO \cdot OA}{\sqrt{SO^2 + OA^2}} = \frac{7 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{7^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = 3,5.$$

*Ответ:* 3,5.



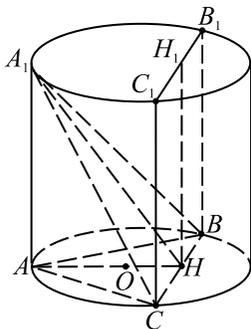


Рис. 164.

центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , тогда  $AH = AO + OH$ .

$$\begin{aligned} \text{В } \triangle BOH \quad OH &= \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \\ &= \sqrt{(26 - 10)(26 + 10)} = \sqrt{16 \cdot 36} = 4 \cdot 6 = 24, \quad AH = 26 + 24 = 50. \end{aligned}$$

3. В прямоугольном  $\triangle AHA_1$   $\operatorname{tg} \angle AHA_1 = \frac{AA_1}{AH} = \frac{80}{50} = 1,6$ .

Ответ: 1,6.

742. 1. Пусть  $AB = a = AC$ ,  $AM = b$ ,  $R$  — радиус основания

(см. рис. 165). Тогда  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = 10b$  или  $S_{ABC} = \frac{a^2 \cdot BC}{4R} =$

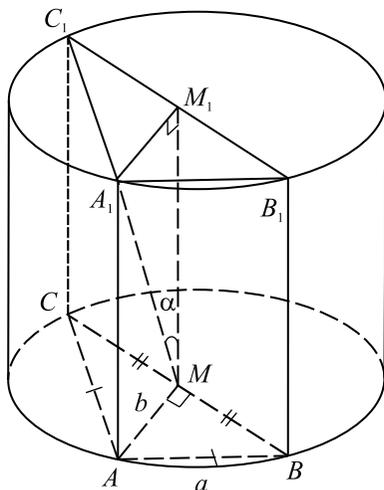


Рис. 165.

$= \frac{5}{26}a^2$ . Из  $\triangle ABM \Rightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2$ . Получим систему

$$\begin{cases} 10b = \frac{5}{26}a^2, \\ b^2 + 100 = a^2. \end{cases} \quad \text{Она имеет два положительных решения } b_1 = 50,$$

$a_1 = \sqrt{52 \cdot 50}$  и  $b_2 = 2$ ,  $a_2 = \sqrt{52 \cdot 2}$ . Так как по условию  $\triangle ABC$  — тупоугольный, то  $a < BC = 20$ . Значит  $AM = 2$ .

$$2. \text{ Из } \triangle MM_1A_1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1M_1}{MM_1} = \frac{2}{40} = 0,05.$$

Ответ: 0,05.

743. 1) Четырёхугольник  $ADBC$  является прямоугольником, так как его диагонали  $AB$  и  $CD$  равны и точкой пересечения  $O$  делятся пополам. Следовательно, угол между прямыми  $A_1C$  и  $BD$  равен углу  $\angle A_1CA$  (см. рис. 166).

2) Угол  $\angle A_1CA$  найдём из прямоугольного треугольника  $AA_1C$ . Для этого вычислим сначала сторону  $DB$ .  $\sin \angle BCD = \frac{DB}{DC}$ ,

$$DB = DC \cdot \sin \angle BCD = 2\sqrt{30} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = 6\sqrt{3}. \text{ Поскольку } DB = AC, \text{ то}$$

имеем:  $\operatorname{tg} \angle A_1CA = \frac{AA_1}{AC} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Так как  $0 < \angle A_1CA < 90^\circ$ , получаем  $\angle A_1CA = 30^\circ$ .

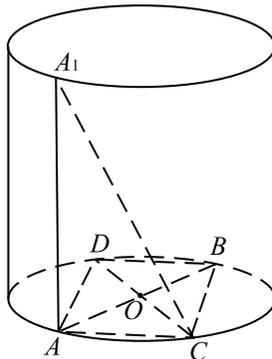


Рис. 166.

Ответ: 30.

744. 1) Четырёхугольник  $ADBC$  является прямоугольником, так как его диагонали  $AB$  и  $CD$  равны и точкой пересечения  $O$  делятся пополам. Следовательно, угол между прямыми  $A_1D$  и  $BC$  равен углу  $\angle A_1DA$  (см. рис. 167).

2) Угол  $\angle A_1DA$  найдём из прямоугольного треугольника  $AA_1D$ .

$\sin \angle BCD = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \angle BCD = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  (так как  $\angle BCD$  — острый).

Так как  $\cos \angle BCD = \frac{BC}{DC}$ , то  $BC = DC \cdot \cos \angle BCD = 12\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$ , а поскольку  $BC = AD$ , имеем:  $\operatorname{tg} \angle A_1DA = \frac{AA_1}{AD} = \frac{8}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Так как  $0 < \angle A_1DA < 90^\circ$ , то  $\angle A_1DA = 30^\circ$ .

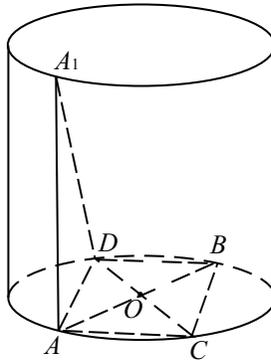


Рис. 167.

Ответ: 30.

745. Дано:  $AB, CD$  — диаметры;  $OA = 5$ ;  $AA_1 = 4$ .

Найти: тангенс угла между  $A_1C$  и  $BD$  (см. рис. 168).

$DB \parallel AC$ , поэтому искомым углом будет  $\angle A_1CA$ . Из  $\triangle ABC$  по теореме

Пифагора  $AC = 8$ .  $\operatorname{tg} \angle A_1CA = \frac{4}{8} = 0,5$ .

Ответ: 0,5.

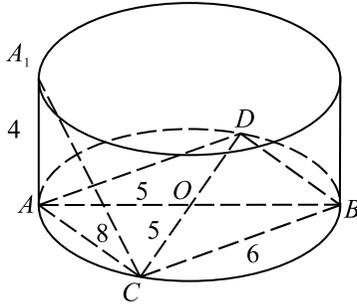


Рис. 168.

746.  $AK = A_1K = \frac{1}{2}AA_1 = 6$ ;  $CL = \frac{1}{3}C_1L = \frac{1}{4}CC_1 = 3$  (см. рис. 169);  
 $AC = \sqrt{AO^2 + OC^2} = 4$ ;  $\angle LCA = 90^\circ \Rightarrow AL = \sqrt{AC^2 + LC^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ . Опустим перпендикуляр  $KK_1$  на  $CC_1$ .  $\triangle KK_1L = \triangle ACL$ , так как  $KK_1 = AC$ ,  $K_1L = LC$ ,  $\angle KK_1L = \angle LCA$ , значит  $KL = AL = 5$ .

По теореме косинусов из  $\triangle ALK$

$$AK^2 = KL^2 + AL^2 - 2KL \cdot AL \cdot \cos \alpha; 36 = 50 - 50 \cos \alpha, \cos \alpha = \frac{7}{25};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{24}{25}.$$

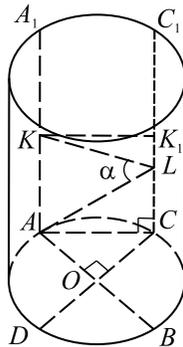


Рис. 169.

Ответ: 0,96.

$$747. AM = A_1A - A_1M = 18; \frac{C_1N}{CN} = \frac{5}{3}; C_1N = \frac{5}{3}CN.$$

$$CC_1 = C_1N + CN = \frac{8}{3}CN = 24, \text{ отсюда } CN = \frac{24}{8} \cdot 3 = 9;$$

$C_1N + 24 - 9 = 15. AC = \sqrt{AO^2 + OC^2} = 12; \angle NCA = 90^\circ$  (см. рис. 170)  $\Rightarrow AN = \sqrt{AC^2 + NC^2} = 15$ . Опустим перпендикуляр из  $N$  на  $AM$  в точку  $N_1$ .  $\triangle ANC = \triangle ANN_1$  ( $AN$  — общая,  $\angle ACN = \angle AN_1N$ ,  $\angle ANC = \angle N_1AN$ ), значит  $AN_1 = NC = 9$ .  $N_1M = AM - AN_1 = 9$ ,  $\Rightarrow MN = \sqrt{MN_1^2 + NN_1^2} = 15$ . По теореме косинусов из  $\triangle AMN$   $AM^2 = AN^2 + NM^2 - 2AN \cdot MN \cdot \cos \alpha$ ;  $324 = 450 - 450 \cos \alpha$ ,  $\cos \alpha = 0,28$ .

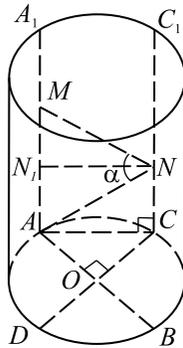


Рис. 170.

Ответ: 0,28.

748. Дано: конус,  $\triangle ABC$  — осевое сечение,  $\triangle ABC$  — правильный, в конус вписан шар,  $V_{\text{ш}} = 8$ .

Найти:  $V_{\text{к}}$ .

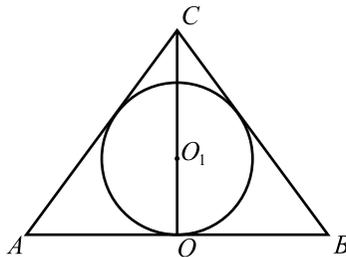


Рис. 171.

*Решение.* Сделаем чертёж (см. рис. 171).

1. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник  $\triangle ABC$ . Проведём высоту  $CO$ . Шар вписан в конус, осевое сечение шара — окружность, вписанная в треугольник  $\triangle ABC$ . Зная  $\sqrt{\text{объём}}$  шара, найдём его радиус  $r = O_1O$ .  $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi r^3$ ,  $\frac{4\pi r^3}{3} = 8$ ,  $r = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 3}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ .

2. В  $\triangle ABC$  найдём высоту  $CO$  и сторону  $AB$ .  $r = \frac{1}{3}CO$  как радиус окружности, вписанной в правильный треугольник.  $CO = 3\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ , сторона

$$AB = \frac{2CO}{\sqrt{3}}, AB = \frac{6\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}.$$

3. Найдём объём конуса.  $V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ ,  $h = CO$ ,  $R = OB = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ .  $V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\right)^2 \cdot 3\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = \frac{3\pi \cdot 6}{\pi} = 18$ .

*Ответ:* 18.

**749.** *Решение.* Проведём высоты оснований призмы  $AD$  и  $A_1D_1$  (см. рис. 172).

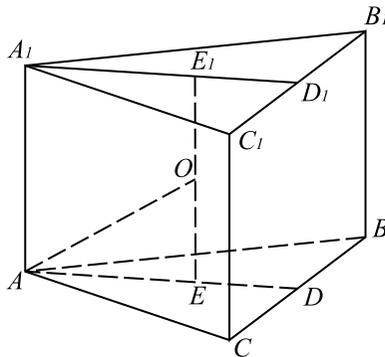


Рис. 172.

Точки  $E$  и  $E_1$  — центры оснований.  $EE_1 \parallel AA_1$ ,  $AA_1 \perp \text{пл. } ABC \Rightarrow EE_1 \perp \text{пл. } ABC$ . Точка  $O$  — середина  $EE_1$ . Так как

расстояния от  $O$  до всех вершин призмы равны, то  $O$  — центр описанной около призмы сферы. Зная объём призмы и что  $AA_1 = 2AC$ , найдём  $AC$ .

Обозначим  $AC = a$ .  $V_{\text{пр}} = S_{ABC} \cdot AA_1$ ,  $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ,  $AA_1 = 2a$ ,

$$V_{\text{пр}} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}, \frac{a^3\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{\pi}, a^3 = \frac{54}{\pi\sqrt{3}}, a = \sqrt[3]{\frac{54}{\pi\sqrt{3}}}.$$

$$\triangle AEO: AE = \frac{2}{3}AD, AD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AE = \frac{a}{\sqrt{3}}, OE = \frac{1}{2}EE_1,$$

$$EE_1 = AA_1, AA_1 = 2a \Rightarrow OE = a.$$

$$AO = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + a^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{54}{\pi\sqrt{3}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Найдём искомый объём. } V &= \frac{4}{3}\pi R^3, R = AO, V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{54}{\pi\sqrt{3}}}\right)^3 = \\ &= \frac{4 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 54}{3 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{3}} = 64. \end{aligned}$$

Ответ: 64.

750. Дано:  $SABC$  — пирамида,  $\triangle ABC$  — правильный,  $AB = 12\sqrt{15}$ ,  $\triangle BSC$  — правильный, пл.  $BSC \perp$  пл.  $ABC$ , около пирамиды описана сфера.

Найти: радиус сферы  $R$ .

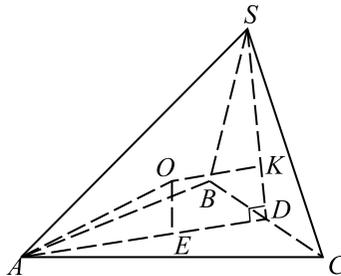


Рис. 173.

Решение. По условию пл.  $BSC \perp$  пл.  $ABC$  (см. рис. 173),  $\triangle ABC$  и  $\triangle BSC$  — правильные, высоты  $AD$  и  $DS$  взаимно перпендикулярны. Точка  $E$  — центр  $\triangle ABC$ , точка  $K$  — центр  $\triangle BSC$ ,  $OE \parallel SD$ ,  $OK \parallel AD$ , значит,  $OA = OB = OC = OS = R$ , точка  $O$  — центр сферы, описанной

$$\begin{aligned} \text{около пирамиды, радиуса } R. \triangle ABC = \triangle BSC, AD = \frac{12\sqrt{15} \cdot \sqrt{3}}{2} = \\ = 18\sqrt{15}, AE = \frac{2}{3}AD, AE = \frac{2}{3} \cdot 18\sqrt{15} = 12\sqrt{15}. OE = KD = \frac{1}{3}SD, \\ SD = AD, SD = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{15} = 6\sqrt{15}. \triangle AOE: AO = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \\ = \sqrt{(12\sqrt{15})^2 + (6\sqrt{15})^2} = \sqrt{900} = 30. \end{aligned}$$

Ответ: 30.

751. Дано:  $SABC$  — правильная пирамида,  $\angle SAO = 45^\circ$ ,  $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$  — призма; вершины  $A_1, B_1, C_1$ , лежат на боковых рёбрах пирамиды; вершины  $A_2, B_2, C_2$ , лежат в пл.  $ABC$ ;  $A_1B_1B_2A_2$ ,  $A_1C_1C_2A_2$ ,  $B_1C_1C_2B_2$  — квадраты; около пирамиды описана сфера.

Найти: радиус сферы  $R$ .

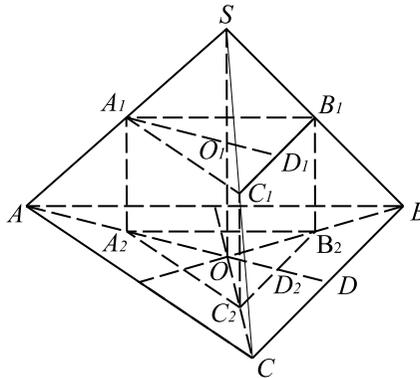


Рис. 174.

*Решение.* Пирамида  $SABC$  — правильная,  $SO$  — высота (см. рис. 174). Призма вписана в пирамиду так, что  $A_1A_2 \perp$  пл.  $ABC$ , значит,  $A_2 \in AD$ , аналогично  $C_2 \in CO$ ,  $B_2 \in BO$ , где  $AD$  — высота основания пирамиды,  $A_2D_2$  — высота нижнего основания призмы,  $A_1D_1$  — высота верхнего основания призмы,  $A_1D_1 \parallel A_2D_2$ .  $\triangle AOS \sim \triangle A_1O_1S$  ( $\angle S$  — общий,  $\angle AOS = \angle A_1O_1S$ ).  $\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{SO}{SO_1}$ . Найдём длины отрезков, входящих в пропорцию. Пусть  $a$  — длина ребра призмы, тогда  $A_1D_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $A_1O_1 = \frac{2}{3}A_1D_1$ ,  $A_1O_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ,  $SO_1 = SO - a$ . По условию

$\angle SAO = 45^\circ$ , значит,  $SO = AO = BO = CO = R$ , где  $R$  — радиус сферы, описанной около

пирамиды. Пропорция примет вид:  $\frac{R \cdot \sqrt{3}}{a} = \frac{R}{R-a}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{R-a}$ ,

$R\sqrt{3} - a\sqrt{3} = a$ ,  $R = \frac{a(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}$ . По условию  $a = 3 - \sqrt{3}$ ,

$$R = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}} = 2.$$

Ответ: 2.

752. Дано:  $SABCD$  — правильная пирамида,  $\angle SAO = 45^\circ$ ,  $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$  — куб; вершины  $A_1, B_1, C_1, D_1$  лежат на боковых рёбрах пирамиды; вершины  $A_2, B_2, C_2, D_2$  лежат в пл.  $ABCD$ .

Найти:  $V$  куба.

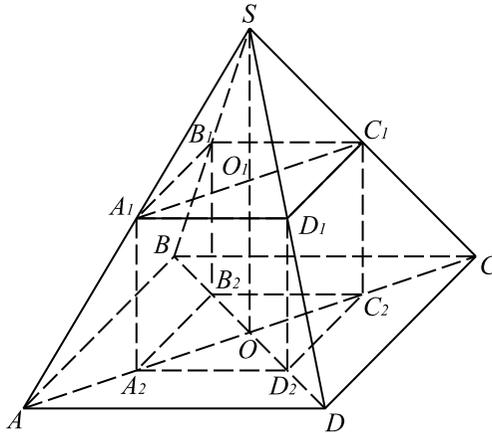


Рис. 175.

Решение. . Пирамида  $SABCD$  — правильная,  $SO$  — высота (см. рис. 175).

1. Обозначим  $AD = a$ ,  $A_1D_1 = x$ .

2.  $\triangle AOS$ :  $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .  $\frac{SO}{AO} = \operatorname{tg} \angle A$ ,  $SO = AO \cdot \operatorname{tg} \angle A$ ,

$$SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$3. V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO, \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = 11 + \frac{9\sqrt{6}}{2}, a^3 = \frac{(22 + 9\sqrt{6}) \cdot 6}{2\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}(22 + 9\sqrt{6})}{2}. \triangle AOS \sim \triangle A_1O_1S (\angle S - \text{общий}, \angle AOS = \angle A_1O_1S).$$

$$\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{OS}{O_1S} \frac{a\sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot x\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2 \left( \frac{a\sqrt{6}}{2} - x \right)}, \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{6}}{a\sqrt{6} - 2x},$$

$$a\sqrt{6} - 2x = x\sqrt{6}, x = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{6} + 2}.$$

$$5. V_{\text{к.}} = x^3, V_{\text{к.}} = \left( \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{6} + 2} \right)^3 = \frac{a^3 \cdot 6\sqrt{6}}{(\sqrt{6} + 2)^3} =$$

$$= \frac{(22 + 9\sqrt{6}) \cdot \sqrt{6} \cdot 6\sqrt{6}}{2(6\sqrt{6} + 36 + 12\sqrt{6} + 8)} = \frac{36(22 + 9\sqrt{6})}{2(18\sqrt{6} + 44)} = 9.$$

Ответ: 9.

**753.** Дано: в конус вписана правильная пирамида  $SAB CDEF$ ,  
 $AB = \sqrt{\sqrt{3} + 1}$ ,  $V_{\text{к.}} = 4 + 2\sqrt{3}$ .

Найти:  $\angle ASF$ .

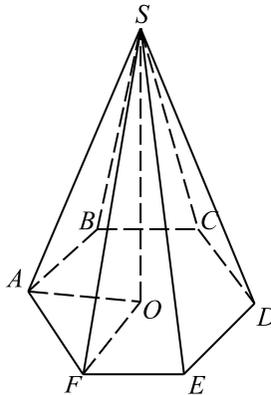


Рис. 176.

*Решение.* По условию в конус вписана правильная пирамида,  $SO$  — высота,  $SO = h$ ,  $AF = OF = R$  (см. рис. 176).

$$1. V_{\text{к.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h, h = \frac{3V}{\pi R^2}, \text{ согласно условию } \pi = 3, h = \frac{V}{R^2}, h = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}.$$

$$2. \triangle SOF: SF^2 = OF^2 + SO^2, SF^2 = (\sqrt{3} + 1) + \left(\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3} + 1)^3 + (4 + 2\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3} + 1)^2} = \frac{3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} + 1 + 16 + 16\sqrt{3} + 12}{3 + 2\sqrt{3} + 1} = \frac{22\sqrt{3} + 38}{4 + 2\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3} + 19}{2 + \sqrt{3}}.$$

Рассмотрим  $\triangle ASF$ . По теореме косинусов:

$$AF^2 = AS^2 + FS^2 - 2 \cdot AS \cdot FS \cdot \cos \angle S \cos \angle S = \frac{2(11\sqrt{3} + 19)}{2 + \sqrt{3}} - (\sqrt{3} + 1) = \frac{(22\sqrt{3} + 39) - (2\sqrt{3} + 2 + 3 + \sqrt{3})}{2(11\sqrt{3} + 19)} = \frac{22\sqrt{3} + 38 - 3\sqrt{3} - 5}{2(11\sqrt{3} + 19)} = \frac{19\sqrt{3} + 33}{2(11\sqrt{3} + 19)} = \frac{\sqrt{3}(11\sqrt{3} + 19)}{2(11\sqrt{3} + 19)} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \angle S = \frac{\sqrt{3}}{2}. \angle ASF = 30^\circ.$$

Ответ:  $30^\circ$ .

754. Дано:  $SABC$  — правильный тетраэдр, сфера вписана в тетраэдр,  $R_{\text{сф.}} = \sqrt{6}$ .

Найти:  $AC$ .

Решение. По условию тетраэдр правильный,  $SO$  — высота (см. рис. 177). Найдём  $SO$ . Пусть  $a$  — длина стороны тетраэдра. Проведём апофему  $SD$ .

$$\triangle SOD: SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OD = \frac{1}{3}AD, OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Сфера вписана в тетраэдр, } EK \text{ — радиус сферы, значит, } EK \perp SD. \triangle SOD \sim \triangle SKE (\angle S \text{ — общий, } \angle SKE = \angle SOD). \frac{OD}{EK} = \frac{SD}{SE}, \frac{a\sqrt{3}}{6 \cdot \sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - \sqrt{6}\right)},$$

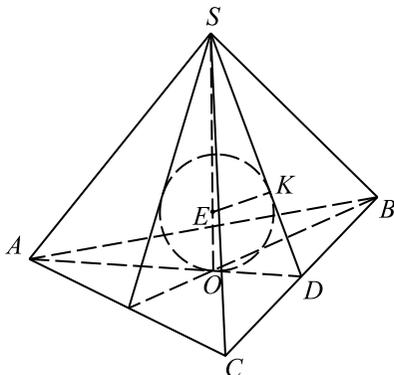


Рис. 177.

$$3\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \sqrt{6}, a = 12. AC = 12.$$

Ответ: 12.

755.

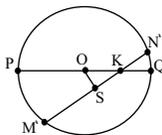


Рис. 178.

Пусть  $M_1, N_1$  — проекции точек  $M$  и  $N$  на нижнее основание цилиндра (см. рис. 178). Так как  $MN$  и  $PQ$  лежат в параллельных плоскостях, то расстояние между ними равно расстоянию между этими плоскостями, то есть высоте цилиндра  $h = \sqrt{15}$ . Пусть точка  $O$  — центр нижнего основания цилиндра,  $K$  — точка пересечения  $M_1N_1$  и  $PQ$ .  $PQ = 4$  как диаметр основания. Так как  $\frac{PK}{KQ} = \frac{3}{1}$ , то  $PK = 3, KQ = 1 = OK$ . Найдём  $M_1N_1$ .

Опустим перпендикуляр  $OS$  на  $M_1N_1$ . Из  $\triangle OSK$ :

$$OS = OK \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. ON_1 = 2 \text{ как радиус основания} \Rightarrow \text{по теореме}$$

$$\text{Пифагора } SN_1 = \sqrt{ON_1^2 - OS^2} = \sqrt{3,75}. M_1S = SN, \Rightarrow$$

$M_1N_1 = 2NS = \sqrt{15}$ . Пусть  $AP$  и  $QB$  — перпендикуляры к  $M_1N_1$ . Так как пл.  $MNN_1 \perp$  пл.  $PM_1Q$ , то  $AP$  и  $QP$  также перпендикулярны к пл.  $M_1MN \Rightarrow AP$  и  $QB$  — высоты пирамид  $MNPK$  и  $MNQK$

соответственно, проведённые к общему основанию  $MNK$ . Из  $\triangle APK$ :  $AP = PK \cdot \sin 30^\circ = 1,5$ . Из  $\triangle QBK$ :  $QB = KQ \cdot \sin 30^\circ = 0,5$ . Объём  $MNPQ$  равен сумме объёмов  $MNPK$  и  $MNQK$ , то есть

$$V_{MNPQ} = V_{MNQK} + V_{MNPK} = \frac{1}{3}S_{MNK} \cdot QB + \frac{1}{3}S_{MNK} \cdot AP = \\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}h \cdot MN(QB + AP) = \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 2 = 5.$$

Ответ: 5.

756. ОДЗ:  $y > -1, y \neq 0$ .

$$\begin{cases} -\log_2 \frac{y}{x} + \log_2(y+1) = \log_2 3, \\ 2^{2x+2y} \cdot 2^{2y} - 2^{y^2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 \frac{(y+1) \cdot x}{y} = \log_2 3, \\ 2^{2x+4y} = 2^{y^2}; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{(y+1) \cdot x}{y} = 3, \\ 2x + 4y = y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3y}{y+1}, \\ x = \frac{y^2 - 4y}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3y}{y+1}, \\ \frac{3y}{y+1} = \frac{y^2 - 4y}{2}. \end{cases} \quad \text{Решим вто-}$$

рое уравнение системы.  $\frac{3y}{y+1} = \frac{y^2 - 4y}{2}, 6y = y^3 - 4y^2 + y^2 - 4y,$

$y^3 - 3y^2 - 10y = 0$ . Так как  $y \neq 0$ , разделим обе части уравнения на  $y$ .  $y^2 - 3y - 10 = 0; y_1 = 5, y_2 = -2$  — не удовлетворяет условию  $y > -1$ .

Если  $y = 5$ , то  $x = \frac{5}{2}$ .

Проверка:

Первое уравнение.  $\log_{0,5} 2 + \log_2(5+1) = -\log_2 2 + \log_2 6 = \\ = \log_2 3, \log_2 3 = \log_2 3$ .

Второе уравнение.  $4^{7,5} \cdot 4^5 - 2^{25} = 2^{25} - 2^{25} = 0, 0 = 0$ .

Ответ:  $\left(\frac{5}{2}; 5\right)$ .

757.  $x > 0$ . Прологарифмируем первое уравнение по основанию 2.

$$\begin{cases} y \log_2 x = 6, \\ \log_2 x = y - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y(y-1) = 6, \\ \log_2 x + 1 = y. \end{cases}$$

Решим первое уравнение.  $y^2 - y - 6 = 0; y_1 = 3, y_2 = -2$ .

1) Если  $y = 3$ , то  $\log_2 x = 3 - 1, x = 4$ .  $(4; 3)$  — решение системы.

2) Если  $y = -2$ , то  $\log_2 x = -3, x = \frac{1}{8}$ .  $\left(\frac{1}{8}; -2\right)$  — решение системы.

Ответ:  $(4; 3); \left(\frac{1}{8}; -2\right)$ .

$$758. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \cdot y^{\log_y x^2} - 4y^2 - 3y = 0, & \begin{cases} yx^2 - 4y^2 - 3y = 0, \\ 1 + \log_x y = 2 \log_y x; \end{cases} \\ \log_x(xy) = \log_y x^2; \\ \begin{cases} y(x^2 - 4y - 3) = 0, \\ 1 + \frac{1}{\log_y x} = 2 \log_y x; \end{cases} & \begin{cases} x^2 - 4y - 3 = 0 \quad (*), \\ \log_y x + 1 = 2 \log_y^2 x. \end{cases} \end{cases}$$

Решим второе уравнение.  $\log_y x + 1 = 2 \log_y^2 x$ ,  $2 \log_y^2 x - \log_y x - 1 = 0$ .

Пусть  $\log_y x = t$ ,  $2t^2 - t - 1 = 0$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = -\frac{1}{2}$ .

1)  $\log_y x = 1$ ,  $x = y$ . Подставим  $x = y$  в уравнение (\*).  $y^2 - 4y - 3 = 0$ ,  $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+3}$ ;  $y_1 = 2 + \sqrt{7}$ ,  $y_2 = 2 - \sqrt{7}$  — не удовлетворяет условию  $y > 0$ .  $x = 2 + \sqrt{7}$ ,  $y = 2 + \sqrt{7}$ .

2)  $\log_y x = -\frac{1}{2}$ .  $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ , подставим в уравнение (\*).  $\frac{1}{y} - 4y - 3 = 0$ ,

$$1 - 4y^2 - 3y = 0, \quad 4y^2 + 3y - 1 = 0; \quad y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{1}{4}. \quad y = -1$$

не удовлетворяет условию  $y > 0$ . Если  $y = \frac{1}{4}$ , то  $x = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$ ,  $x = 2$ . В

области допустимых значений проведены равносильные преобразования.

$(2 + \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7}); (2; \frac{1}{4})$  — решения системы.

*Ответ:*  $(2 + \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7}); (2; \frac{1}{4})$ .

759. Преобразуем выражения, стоящие под знаком логарифма.

$$1) x - 10 + \frac{30}{x+1} = \frac{x^2 + x - 10x - 10 + 30}{x+1} = \frac{x^2 - 9x + 20}{x+1} = \\ = \frac{(x-5)(x-4)}{x+1}.$$

$$2) \frac{6}{x-5} - \frac{5}{x-4} = \frac{6x - 24 - 5x + 25}{(x-5)(x-4)} = \frac{x+1}{(x-5)(x-4)} = \\ = \left( \frac{(x-5)(x-4)}{x+1} \right)^{-1}. \text{ Обозначим } \frac{(x-5)(x-4)}{x+1} = t, \text{ получим}$$

$$8 \log_2 t = \log_2 t^{-1} + 9, \quad 8 \log_2 t = -\log_2 t + 9, \quad \log_2 t = 1, \quad t = 2.$$

$$\frac{(x-5)(x-4)}{x+1} = 2, \quad x \neq -1, \quad x^2 - 9x + 20 = 2x + 2, \quad x^2 - 11x + 18 = 0,$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 9.$$

Проведённые преобразования не приводят к потере корней.

Проверка:

$$1) \quad x = 2; \quad 8 \log_2(2 - 10 + 10) = 8, \quad \log_2\left(-2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) + 9 = -1 + 9 = 8, \\ 8 = 8. \quad x = 2 \text{ — корень исходного уравнения.}$$

$$2) \quad x = 9; \quad 8 \log_2(9 - 10 + 3) = 8 \log_2 2 = 8, \quad \log_2\left(\frac{3}{2} - 1\right) + 9 = -1 + 9 = 8, \\ 8 = 8. \quad x = 9 \text{ является корнем исходного уравнения.}$$

*Ответ:* 2; 9.

**760.** Упростим выражения, стоящие под знаком логарифма:

$$1) \quad \frac{2}{3(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)} = \frac{2x-4+x+1}{3(x+1)(x-2)} = \frac{3x-3}{3(x+1)(x-2)} = \\ = \frac{3(x-1)}{3(x+1)(x-2)} = \frac{x-1}{(x+1)(x-2)}.$$

$$2) \quad x - \frac{2}{x-1} = \frac{x^2 - x - 2}{x-1} = \frac{(x-2)(x+1)}{x-1}.$$

$$\text{Обозначим } \frac{(x-2)(x+1)}{x-1} = t. \quad \frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = t^{-1}, \text{ тогда}$$

$$\log_2 t^{-1} + 3 = 2 \log_2 t, \quad -\log_2 t + 3 = 2 \log_2 t, \quad 3 \log_2 t = 3, \quad \log_2 t = 1, \quad t = 2.$$

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x-1} = 2, \quad x \neq 1, \quad (x-2)(x+1) = 2x-2, \quad x^2 - x - 2 = 2x - 2.$$

$$x^2 - 3x = 0, \quad x = 0 \text{ или } x - 3 = 0, \quad x = 3.$$

Проверка:

$$1) \quad x = 0; \quad \log_2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) + 3 = \log_2 \frac{1}{2} + 3 = -1 + 3 = 2,$$

$$2 \log_2\left(0 - \frac{2}{0-1}\right) = 2 \log_2 2 = 2, \quad 2 = 2. \quad x = 0 \text{ — корень уравнения.}$$

$$2) \quad x = 3; \quad \log_2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) + 3 = \log_2 -2 \frac{1}{2} + 3 = -1 + 3 = 2, \quad 2 \log_2(3-1) = 2,$$

$$2 = 2. \quad x = 3 \text{ — корень исходного уравнения.}$$

*Ответ:* 0; 3.

**761.** Преобразуем выражения, стоящие под знаком логарифма.

$$1) \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+4-x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{(x-1)(x+2)} =$$

$$= \left( \frac{(x-1)(x+2)}{x+5} \right)^{-1}.$$

$$2) x-4 + \frac{18}{x+5} = \frac{x^2+5x-4x-20+18}{x+5} = \frac{x^2+x-2}{x+5} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)}{x+5}. \text{ Обозначим } \frac{(x-1)(x+2)}{x+5} = t, \text{ тогда}$$

$$\log_2 t^{-1} + 4 = 3 \log_2 t, \quad -\log_2 t + 4 = 3 \log_2 t, \quad 4 = 4 \log_2 t, \quad \log_2 t = 1,$$

$$t = 2. \quad \frac{(x-1)(x+2)}{x+5} = 2, \quad x \neq -5, \quad (x-1)(x+2) = 2(x+5),$$

$$x^2 + 2x - x - 2 = 2x + 10, \quad x^2 - x - 12 = 0, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = -3.$$

Проведённые преобразования не приводят к потере корней.

Проверка:

$$1) x = 4; \log_2 \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) + 4 = \log_2 \frac{1}{2} + 4 = -1 + 4 = 3, \quad 3 = 3. \quad x = 4 \text{ —}$$

корень исходного уравнения.

$$2) x = -3; \log_2 \left( \frac{2}{-3-1} - \frac{1}{-3+2} \right) + 4 = \log_2 \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) + 4 = \log_2 \frac{1}{2} + 4 =$$

$$= -1 + 4 = 3, \quad 3 = 3. \quad x = -3 \text{ — корень исходного уравнения.}$$

*Ответ:*  $-3; 4$ .

**762.**  $700 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$ , тогда  $5^{10} \cdot 7^{3x+6} \cdot (2^3)^{2x+4} = (7 \cdot 2^2 \cdot 5^2)^{4-3x}$ ,

$5^{10} \cdot 7^{3x+6} \cdot 2^{6x+12} = 7^{4-3x} \cdot 2^{8-6x} \cdot 5^{8-6x}$ . Так как правая часть не равна нулю, разделим обе части уравнения на выражение, стоящее в правой части.

$$\frac{2^{6x+12}}{2^{8-6x}} \cdot \frac{5^{10}}{5^{8-6x}} \cdot \frac{7^{3x+6}}{7^{4-3x}} = 1, \quad 2^{12x+4} \cdot 5^{6x+2} \cdot 7^{6x+2} = 1,$$

$$2^{2(6x+2)} \cdot 5^{6x+2} \cdot 7^{6x+2} = 1, \quad 4^{6x+2} \cdot 5^{6x+2} \cdot 7^{6x+2} = (4 \cdot 5 \cdot 7)^0,$$

$$140^{6x+2} = 140^0, \quad 6x+2 = 0, \quad x = -\frac{1}{3}.$$

Все преобразования были равносильны,  $x = -\frac{1}{3}$ .

*Ответ:*  $-\frac{1}{3}$ .

**763.** ОДЗ:  $x > 0$ . Рассмотрим второе уравнение системы.

$$x^{y+1} - 3^{12} \cdot x = 0, \quad x(x^y - 3^{12}) = 0. \text{ Так как } x \neq 0, \text{ то } x^y - 3^{12} = 0,$$

$$x^y = 3^{12}.$$

Подставим  $x^y = 3^{12}$  в первое уравнение.  $y^2 - \log_3 3^{12} = y$ ,  $y^2 - y - 12 = 0$ ,  $y_1 = 4$ ;  $y_2 = -3$ .

1) Если  $y = 4$ , то  $x^4 = 3^{12}$ ;  $x^4 = 27^4$ ;  $x = \pm 27$ . Так как  $x > 0$ , то  $(27; 4)$  — решение системы.

2) Если  $y = -3$ , то  $x^{-3} = 3^{12}$ ,  $\left(\frac{1}{x}\right)^3 = 81^3$ ,  $\frac{1}{x} = 81$ ,  $x = \frac{1}{81}$ .  $\left(\frac{1}{81}; -3\right)$  — решение системы. Проверка показывает, что обе пары являются решениями системы.

Ответ:  $(27; 4)$ ;  $\left(\frac{1}{81}; -3\right)$ .

$$764. \begin{cases} 4^{(x-y)^2+x} = 4^{x+1}, \\ 5^{x+y-1} = 5^2. \end{cases}$$

Если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то показательное уравнение  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$  равносильно уравнению  $f(x) = g(x)$ , поэтому  $\begin{cases} (x-y)^2 + x = x+1, \\ x+y-1 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 1, \\ x+y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y = 1, \\ x-y = -1; \\ x+y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y = 1, \\ x+y = 3; \\ x-y = -1, \\ x+y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1; \\ x = 1, \\ y = 2. \end{cases} \end{cases}$$

$(2; 1)$ ;  $(1; 2)$  — искомые решения системы.

Ответ:  $(2; 1)$ ,  $(1; 2)$ .

$$765. \text{ Обозначим } 3^x = a, a > 0; 2^{\frac{y}{2}} = b, b > 0, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} 3a^2 - 3b^2 = 231, & \begin{cases} a^2 - b^2 = 77, \\ a - b = 7; \end{cases} & \begin{cases} (a-b)(a+b) = 77, \\ a - b = 7; \end{cases} \\ 2a - 2b = 14; & \begin{cases} a - b = 7; \\ a + b = 11, \end{cases} & \begin{cases} a = 9, \\ b = 2. \end{cases} \\ \begin{cases} 7(a+b) = 77, \\ a - b = 7; \end{cases} & \begin{cases} a + b = 11, \\ a - b = 7; \end{cases} & \begin{cases} a = 9, \\ b = 2. \end{cases} \end{cases}$$

Итак,  $3^x = 9$ ,  $3^x = 3^2$ ,  $x = 2$ ,  $2^{\frac{y}{2}} = 2$ ,  $\frac{y}{2} = 1$ ,  $y = 2$ .

Преобразования равносильны.  $(2; 2)$  — решение системы.

Ответ:  $(2; 2)$ .

**766.** Чтобы найти абсциссы точек пересечения графиков данных функций, достаточно решить следующее уравнение:

$$\frac{16 \cdot 12^{2x-1} - 4^{2x+1}}{x^2 - 3x - 10} = \frac{3^{2x-1} - 1}{6 - (x+1) \cdot (x-4)}, \text{ ОДЗ: } x \neq -2, x \neq 5;$$

$$\frac{16 \cdot 12^{2x-1} - 4^{2x+1}}{x^2 - 3x - 10} = \frac{3^{2x-1} - 1}{10 + 3x - x^2};$$

$$\frac{16 \cdot 12^{2x-1} - 4^{2x+1} + 3^{2x-1} - 1}{x^2 - 3x + 10} = 0;$$

$$\frac{4^{2x+1} \cdot 3^{2x-1} - 4^{2x+1} + 3^{2x-1} - 1}{(x+2) \cdot (x-5)} = 0;$$

$$4^{2x+1} \cdot 3^{2x-1} - 4^{2x+1} + 3^{2x-1} - 1 = 0;$$

$$(4^{2x+1} + 1) \cdot (3^{2x-1} - 1) = 0; \begin{cases} 4^{2x+1} + 1 = 0, \\ 3^{2x-1} - 1 = 0; \end{cases} \quad 3^{2x-1} - 1 = 0, 3^{2x-1} = 1,$$

$$3^{2x-1} = 3^0, 2x - 1 = 0, x = 0,5. x = 0,5 \text{ удовлетворяет ОДЗ.}$$

*Ответ:* 0,5.

**767.** *План решения.* 1. Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов. 2. Сведём уравнение к квадратному, сделав замену  $t = \log_3 x$ .

*Решение.* 1) ОДЗ выражений  $\log_3^2 x + 3^{\log_3^2 x} + 4 \log_3(9x)$  и  $x^{\log_3 x} + 5 \log_3 x^2$  является множество  $x \in (0; +\infty)$ . При  $x \in$  ОДЗ данное уравнение можно записать в виде:

$$\log_3^2 x + (3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + 4 \log_3 9 + 4 \log_3 x = x^{\log_3 x} + 10 \log_3 x,$$

$$\log_3^2 x + x^{\log_3 x} + 8 + 4 \log_3 x = x^{\log_3 x} + 10 \log_3 x, \log_3^2 x - 6 \log_3 x + 8 = 0.$$

2) Сделав замену  $t = \log_3 x$ , получаем:  $t^2 - 6t + 8 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4$ . Возвращаясь к переменной  $x$ , имеем совокупность:

$$\begin{cases} \log_3 x = 2, \\ \log_3 x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ x = 81. \end{cases}$$

Оба найденных значения  $x_1, x_2$  принадлежат ОДЗ и, значит, являются корнями исходного выражения.

*Ответ:* 9; 81.

**768.** *План решения:* 1. Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов. 2. Сведём уравнение к квадратному, сделав замену  $t = \log_6 x$ .

$$1. \text{ ОДЗ: } x \in (0; +\infty). \log_6^2 x + 6^{\log_6^2 x} - \log_6(6x^2) = x^{\log_6 x} + \log_6\left(\frac{x}{216}\right),$$

$$\log_6^2 x + (6^{\log_6 x})^{\log_6 x} - \log_6 6 - \log_6 x^2 = x^{\log_6 x} + \log_6 x - \log_6 6^3,$$

$$\log_6^2 x + x^{\log_6 x} - 1 - 2 \log_6 x = x^{\log_6 x} + \log_6 x - 3, \log_6^2 x - 3 \log_6 x + 2 = 0.$$

$$2. \text{ Сделав замену } t = \log_6 x, \text{ получаем уравнение } t^2 - 3t + 2 = 0, t_1 = 1,$$

$$t_2 = 2. \text{ Возвращаясь к переменной } x, \text{ имеем совокупность } \begin{cases} \log_6 x = 1, \\ \log_6 x = 2; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \in \text{ОДЗ}, \\ x = 36 \in \text{ОДЗ}; \end{cases} \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = 36.$$

Ответ:  $x_1 = 6, x_2 = 36$ .

**769.** Для нахождения абсцисс общих точек графиков функций необходимо решить уравнение  $f(x) = g(x)$ .

Пусть  $t = 3^x, t > 0$ . Тогда уравнение  $f(x) = g(x)$  примет вид  $\frac{t^3 + 3}{t - 1} = \frac{3t^2 + t}{t - 1}$ . ОДЗ:  $t \neq 1$ .  $t^3 + 3 = 3t^2 + t; t^3 - 3t^2 - t + 3 = 0;$   
 $t^2(t - 3) - (t - 3) = 0; (t - 3)(t^2 - 1) = 0; t_1 = 1; t_2 = -1; t_3 = 3$ .  
 Так как  $t_1$  не удовлетворяет ОДЗ, а  $t_2$  — условию  $t > 0$ , то решение исходного уравнения получим, решив уравнение  $3^x = 3$ . Итак,  $x = 1$ . Тогда  $f(1) = 15$ .

Ответ: (1; 15).

**770. Решение.** 
$$\begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}, \\ \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin x + \sin y) = \frac{1}{2}, \\ \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 1 - \sin y, \\ (1 - \sin y) \sin y = \frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = 1 - \sin y, \\ 2(\sin y - \frac{1}{2})^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ y = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Все преобразования были равносильными.

Ответ:  $\left( (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; (-1)^m \cdot \frac{\pi}{6} + \pi m \right), \quad n, m \in \mathbb{Z}$ .

**771. Решение:** 
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ 4 \cos x \cos y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = 1 - \cos y, \\ 4(1 - \cos y) \cos y = 1. \end{cases}$$

Решим второе уравнение последней системы:  $4(1 - \cos y) \cos y = 1,$   
 $4 \cos y - 4 \cos^2 y = 1, \quad 4 \cos^2 y - 4 \cos y + 1 = 0, \quad (2 \cos y - 1)^2 = 0$

$$\Rightarrow \cos y = \frac{1}{2}, \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Итак, } \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \end{array} \right. \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), k, n \in Z$  — решение исходной системы.

Ответ:  $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), k, n \in Z$ .

**772.** Сделаем замену переменной  $t = -\frac{\pi}{4} \sin^2 x, t \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ .

$3 \operatorname{tg}^2 t + 2 \operatorname{tg} t - 1 = 0$ , это квадратное уравнение относительно  $\operatorname{tg} t$  имеет два корня  $-1$  и  $\frac{1}{3}$ . Но при указанном промежутке изменения  $t$ , тангенс изменяется на промежутке  $[-1; 0]$ . Так что корень  $\operatorname{tg} t = \frac{1}{3}$  — посторонний.

меняется на промежутке  $[-1; 0]$ . Так что корень  $\operatorname{tg} t = \frac{1}{3}$  — посторонний.

$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} \sin^2 x\right) = -1; -\frac{\pi}{4} \sin^2 x = -\frac{\pi}{4}; \sin^2 x = 1; \cos^2 x = 0; \cos x = 0$ ,

то есть  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

**773.** Сделаем замену переменной  $t = \frac{\pi}{4} \cos^2 x, t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .

$5 \operatorname{tg}^2 t - 4 \operatorname{tg} t - 1 = 0$ , это квадратное уравнение относительно  $\operatorname{tg} t$  имеет два корня  $1$  и  $-\frac{1}{5}$ . Но при указанном промежутке изменения  $t$ , тангенс

изменяется на промежутке  $[0; 1]$ . Тогда второй корень — посторонний.

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \cos^2 x\right) = 1; \frac{\pi}{4} \cos^2 x = \frac{\pi}{4}; \cos^2 x = 1; \sin^2 x = 0; \sin x = 0$ , то есть  $x = \pi k, k \in Z$ .

Ответ:  $\pi k, k \in Z$ .

774. Решение.  $\frac{3 \sin^2 x - 6 \sin x + 3}{\sin^2 x + 2 \sin x + 1} + \frac{2 - 2 \sin x}{\sin x + 1} = 1;$

$$3 \left( \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right)^2 - 2 \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} - 1 = 0, \text{ сделаем замену } t = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1};$$

$$3t^2 - 2t - 1 = 0, \text{ имеем два корня } 1 \text{ и } -\frac{1}{3}.$$

В случае  $t = 1$  приходим к неверному равенству  $\sin x - 1 = \sin x + 1,$

в случае  $t = -\frac{1}{3}$  получаем  $-3 \sin x + 3 = \sin x + 1; \sin x = \frac{1}{2},$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

Область допустимых значений определяется условием  $\sin x \neq -1,$  которое при таких  $x$  выполняется.

Ответ:  $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

775.  $\frac{1 - \sin 2x}{\sin^2 x - 2 \sin x + 1} - \frac{2 \sin x - 2 \cos x}{\sin x - 1} = -1, \text{ ОДЗ: } \sin x \neq 1.$

$$\frac{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x - 2 \sin x + 1} - \frac{2 \sin x - 2 \cos x}{\sin x - 1} + 1 = 0;$$

$$\left( \frac{\sin x - \cos x}{\sin x - 1} \right)^2 - 2 \frac{\sin x - \cos x}{\sin x - 1} + 1 = 0, \text{ сделаем замену}$$

$$t = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x - 1}; t^2 - 2t + 1 = 0, t = 1; \sin x - \cos x = \sin x - 1; \cos x = 1;$$

$$x = 2\pi k, k \in Z.$$

Ответ:  $2\pi k, k \in Z.$

776. ОДЗ:  $\begin{cases} \sin x \neq 0; \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \Rightarrow x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

$$\frac{\sin^2 2x}{\operatorname{tg} x} + \sin 2x = 3 \cos x \sin 2x; \sin 2x(2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1) = 0.$$

1.  $\sin 2x = 0$  — корни не входят в ОДЗ.

2.  $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0;$

а)  $\cos x = 1$  — корни не входят в ОДЗ.

б)  $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ:  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

**777.**  $5 \sin 6x - 5 \cos 6x - 2 \sin 12x + 4 = 0;$   
 $(5 \sin 6x - 5 \cos 6x) + 2(1 - \sin 12x) + 2 = 0;$   
 $5(\sin 6x - \cos 6x) + 2(\sin^2 6x + \cos^2 6x - 2 \sin 6x \cos 6x) + 2 = 0;$   
 $2(\sin 6x - \cos 6x)^2 + 5(\sin 6x - \cos 6x) + 2 = 0.$  Замена  $\sin 6x - \cos 6x = t,$   
 где  $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2},$  приводит уравнение к виду  $2t^2 + 5t + 2 = 0; t_1 = -2,$   
 $t_2 = -\frac{1}{2}.$  Преобразуем разность  $\sin 6x - \cos 6x$  в произведение:

$$t = \sin 6x - \cos 6x = 2 \sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$-2 \notin [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]. \text{ Имеем: } \sqrt{2} \sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}, \sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$6x - \frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k, k \in Z; x = \frac{(-1)^{k+1}}{6} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6},$$

$$k \in Z.$$

*Ответ:*  $\frac{(-1)^{k+1}}{6} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z.$

**778.** ОДЗ:  $x \neq \pi k, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, k, n \in Z. \frac{\cos x - 1}{\cos x} + 2 \cos x = 0;$   
 $2 \cos^2 x + \cos x - 1 =$   
 $= 0; \cos x = t; -1 \leq t \leq 1; 2t^2 + t - 1 = 0; t_1 = -1,$  решения  $\cos x = -1$  —  
 не принадлежат ОДЗ.  $t_2 = \frac{1}{2}, \cos x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z.$

*Ответ:*  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z.$

**779.** ОДЗ:  $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases} x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

$$3 \sin x - \frac{2 \sin x + 1}{\sin x} = 0; 3 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0; \sin x = t; 3t^2 - 2t - 1 = 0;$$

$t_1 = 1$  — не принадлежит ОДЗ,  $t_2 = -\frac{1}{3}.$

$$\sin x = -\frac{1}{3}, x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in Z.$$

*Ответ:*  $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in Z.$

**780.** ОДЗ:  $x \neq \frac{\pi m}{2}, m \in Z$ .

Учитывая, что  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  и  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , получаем уравнение

$4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = 1 - 2 \cos x$ , которое сводится к уравнению  $\cos^2 x - 2 \cos x - 3 = 0$ . Производим замену  $\cos x = t, -1 \leq t \leq 1$ . Уравнение  $t^2 - 2t - 3 = 0$  имеет корни  $t_1 = -1, t_2 = 3$ , из которых только первый удовлетворяет условию  $-1 \leq t_1 \leq 1$ . Из равенства  $\cos x = -1$  следует  $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ , однако эти значения  $x$  не являются допустимыми для данного исходного уравнения, поэтому исходное уравнение не имеет решений.

*Ответ:* нет корней.

**781.** ОДЗ:  $x \neq \pi k, k \in Z$ .

$4 \cos^2 x + 4 = 2 \cos^2 x - 9 \cos x$ . Пусть  $\cos x = t, t \in [-1; 1]$ , тогда  $2t^2 + 9t + 4 = 0$ .  $t_1 = -4$  — не удовлетворяет условию  $t \in [-1; 1]$ ,  $t_2 = -\frac{1}{2}$ .

$$\cos x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

*Ответ:*  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ .

**782.** Фактически требуется решить уравнение:

$$\frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cos^2 \frac{x}{4} - \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{4}}{2 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{2}}. \text{ ОДЗ уравнения: } \sin \frac{x}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ То-}$$

гда  $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sqrt{2} \cos \frac{x}{2}; \cos \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$ . Следовательно,

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \text{ или } \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Учитывая ОДЗ, получим:  $\cos \frac{x}{2} = 0; x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ .

*Ответ:*  $\pi + 2\pi n, n \in Z$ .

**783.** Пусть  $t = \sqrt{2x - 5}, t \geq 0$ . Тогда:

$$t^2 = 2x - 5, 2x = t^2 + 5, x = \frac{t^2}{2} + \frac{5}{2}.$$

Подставляем в данное уравнение вместо  $x$  и  $\sqrt{2x-5}$  их выражения через новое неизвестное  $t$  и решаем полученное уравнение относительно  $t$ .

$$\sqrt{\frac{t^2}{2} + \frac{5}{2} - 2 + t} + \sqrt{\frac{t^2}{2} + \frac{5}{2} + 2 + 3t} = 7\sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{t^2}{2} + 3t + \frac{9}{2}} = 7\sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1)} + \sqrt{\frac{1}{2}(t^2 + 6t + 9)} = 7\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(t+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(t+3)^2} = 7\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}((t+1) + (t+3)) = 7\sqrt{2},$$

так как  $t+1 > 0$  и  $t+3 > 0$ . Далее:  $t+1+t+3 = 14$ ,  $2t = 10$ ,  $t = 5$ ,

$$x = \frac{t^2}{2} + \frac{5}{2} = \frac{25}{2} + \frac{5}{2} = 15.$$

Проверка.  $\sqrt{15-2} + \sqrt{2 \cdot 15-5} + \sqrt{15+2+3\sqrt{2 \cdot 15-5}} = 7\sqrt{2}$ ,

$$\sqrt{13+5} + \sqrt{17+3 \cdot 5} = 7\sqrt{2}, \quad \sqrt{18} + \sqrt{32} = 7\sqrt{2},$$

$$3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}, \quad 7\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$

Ответ: 15.

784. Сделаем замену  $t = \sqrt{2x+3}$ ,  $t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 2x+3$ ,  $x = \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}$ .

$$\sqrt{\frac{t^2}{2} - \frac{3}{2} + 2 + t} + \sqrt{\frac{t^2}{2} + \frac{9}{2} + 3t} = 11\sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1)} + \sqrt{\frac{1}{2}(t^2 + 6t + 9)} = 11\sqrt{2},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(t+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(t+3)^2} = 11\sqrt{2}, \quad \sqrt{(t+1)^2} + \sqrt{(t+3)^2} = 22,$$

$$|t+1| + |t+3| = 22. \quad t \geq 0 \Rightarrow t+1 > 0, \quad t+3 > 0; \quad t+1+t+3 = 22,$$

$$2t = 18, \quad t = 9. \quad \sqrt{2x+3} = 9, \quad 2x+3 = 81, \quad 2x = 78, \quad x = 39.$$

Проверка:  $\sqrt{41+9} + \sqrt{45+27} = \sqrt{50} + \sqrt{72} = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$ ,  
 $11\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$ ,  $x = 39$ .

Ответ: 39.

785.  $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+1+8+6\sqrt{x-1}} = 17$ .  $\sqrt{x-1} = t$ ,  
 $t \geq 0 \Rightarrow t^2 = x-1$ ,  $x = t^2+1$ .  $\sqrt{t^2+1+3+4t} + \sqrt{t^2+1+8+6t} = 17$ ,

$\sqrt{(t+2)^2} + \sqrt{(t+3)^2} = 17$ ,  $|t+2| + |t+3| = 17$ . Так как  $t \geq 0$ , то  $t+2 > 0$ ,  $t+3 > 0$ ;  $t+2+t+3 = 17$ ,  $2t = 12$ ,  $t = 6$ .  $\sqrt{x-1} = 6$ ,  $x-1 = 36$ ,  $x = 37$ . Проверка:  $\sqrt{37+3+24} + \sqrt{37+8+36} = \sqrt{64} + \sqrt{81} = 8+9 = 17$ ,  $17 = 17$ ,  $x = 37$ .

Ответ: 37.

$$786. \sqrt{x+9+5\sqrt{2x-7}} + \sqrt{x+1+3\sqrt{2x-7}} = 5\sqrt{2}.$$

$$t = \sqrt{2x-7}, t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 2x-7, x = \frac{t^2}{2} + \frac{7}{2}.$$

$$\sqrt{\frac{t^2}{2} + \frac{7}{2} + 9 + 5t} + \sqrt{\frac{t^2}{2} + \frac{7}{2} + 1 + 3t} = 5\sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{t^2}{2} + 5t + \frac{25}{2}} + \sqrt{\frac{t^2}{2} + \frac{9}{2} + 3t} = 5\sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(t^2 + 10t + 25)} + \sqrt{\frac{1}{2}(t^2 + 6t + 9)} = 5\sqrt{2},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(t+5)^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(t+3)^2} = 5\sqrt{2}, |t+5| + |t+3| = 10. t \geq 0 \Rightarrow$$

$t+5 > 0$ ,  $t+3 > 0$ ;  $t+5+t+3 = 10$ ,  $2t+8 = 10$ ,  $t = 1$ .  $\sqrt{2x-7} = 1$ ,  $2x-7 = 1$ ,  $x = 4$ .

Проверка:  $\sqrt{13+5} + \sqrt{5+3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ ,  $5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow x = 4$  — корень исходного уравнения.

Ответ:  $x = 4$ .

$$787. y = \sqrt[3]{(7+x)^2} \text{ и } y = \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} - \sqrt[3]{(2-x)^2}.$$

$$\sqrt[3]{(7+x)^2} = \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} - \sqrt[3]{(2-x)^2}. \quad (1)$$

$x = 2$  не является корнем уравнения ( $\sqrt[3]{81} \neq 0$ ). Разделив обе части уравнения (1) на  $\sqrt[3]{(2-x)^2}$ , получим равносильное уравнение:

$$\left( \sqrt[3]{\frac{7+x}{2-x}} \right)^2 = \sqrt[3]{\frac{7+x}{2-x}} - 1. \text{ Пусть } \sqrt[3]{\frac{7+x}{2-x}} = t, \text{ тогда } t^2 - t + 1 = 0.$$

$D < 0$ , поэтому уравнение корней не имеет, уравнение (1) тоже не будет иметь корней. Следовательно, графики данных функций не имеют точек пересечения.

Ответ: точек пересечения нет.

788. Решение. ОДЗ:  $x, y \in \mathbb{R}$ . Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{y+1} = 3, \\ \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)(y+1)} + \sqrt[3]{(y+1)^2} = 3. \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{x-1} = t, \sqrt[3]{y+1} = h.$$

$$\begin{cases} t+h=3, \\ t^2-th+h^2=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+h=3, \\ (t+h)(t^2-th+h^2)=9; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t+h=3, \\ t^3+h^3=9. \end{cases}$$

Из первого уравнения  $t = 3 - h$ . Подставляем  $t = 3 - h$  во второе уравнение.

$$\begin{aligned} (3-h)^3 + h^3 &= 9, & 27 - 27h + 9h^2 - h^3 + h^3 &= 9, \\ 9h^2 - 27h + 18 &= 0, & h^2 - 3h + 2 &= 0, & h_1 &= 1, & h_2 &= 2. \\ t_1 &= 3 - 1 = 2, & t_2 &= 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) h_1 &= 1, t_1 = 2. & \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} = 2, \\ \sqrt[3]{y+1} = 1; \end{cases} & \begin{cases} x-1 = 8, \\ y+1 = 1; \end{cases} & \begin{cases} x_1 = 9, \\ y_1 = 0; \end{cases} \\ 2) h_1 &= 2, t_1 = 1. & \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} = 1, \\ \sqrt[3]{y+1} = 2; \end{cases} & \begin{cases} x-1 = 1, \\ y+1 = 8; \end{cases} & \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 7; \end{cases} \end{aligned}$$

Все преобразования были равносильными  $\Rightarrow$  проверка не обязательна.

Ответ: (9; 0), (2; 7).

$$789. \begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = y, \\ \sqrt{x+y} + 7x = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = y, \\ \sqrt{x+y} = 2 - 7x; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{7x+y} + 2 - 7x = y, \\ \sqrt{x+y} = 2 - 7x; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{7x+y} = 7x + y - 2, \\ \sqrt{x+y} = 2 - 7x. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение последней системы.  $\sqrt{7x+y} = 7x + y - 2$ . Пусть  $\sqrt{7x+y} = t$ ,  $t \geq 0$ , тогда  $t = t^2 - 2$ ,  $t^2 - t - 2 = 0$ ;  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = -1$ .  $t_2 = -1$  не удовлетворяет условию  $t \geq 0$ . Тогда  $\sqrt{7x+y} = 2$ ,  $7x + y = 4$ .

$$\text{Имеем систему: } \begin{cases} 7x + y = 4, \\ \sqrt{x+y} = 2 - 7x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4 - 7x, \\ \sqrt{x+4-7x} = 2 - 7x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 - 7x, \\ \sqrt{4 - 6x} = 2 - 7x. \end{cases} \quad \text{Решим уравнение } \sqrt{4 - 6x} = 2 - 7x. \quad (1)$$

$4 - 6x = 4 - 28x + 49x^2$ ,  $49x^2 - 22x = 0$ ,  $x(49x - 22) = 0$ ,  $x = 0$  или  $x = \frac{22}{49}$ . При  $x = \frac{22}{49}$  правая часть уравнения (1) принимает отрицательное

значение, следовательно,  $x = \frac{22}{49}$  не является корнем уравнения (1). Итак,

$x = 0$ ,  $y = 4 - 7x$ ,  $y = 4$ . (0; 4) — решение системы.

Ответ: (0; 4).

$$790. 1) 12 - 7x + x^2 = 4(x-3)\sqrt{x} \Leftrightarrow (x-4)(x-3) - 4(x-3)\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-3)(x-4\sqrt{x}-4) = 0.$$

$$2) (x-3)(x-4\sqrt{x}-4) = 0 \Leftrightarrow (x=3 \text{ или } x-4\sqrt{x}-4=0). \\ x-4\sqrt{x}-4=0.$$

Пусть  $y = \sqrt{x}$ ,  $y \geq 0$ , тогда  $y^2 - 4y - 4 = 0$ .  
 $y^2 - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow (y = 2 + 2\sqrt{2}$  или  $y = 2 - 2\sqrt{2})$ .  
 $y = 2 + 2\sqrt{2}$ , тогда  $\sqrt{x} = 2 + 2\sqrt{2}$  и  $x = 12 + 8\sqrt{2}$ .  
 $y = 2 - 2\sqrt{2}$  не удовлетворяет условию  $y \geq 0$ .

*Ответ:* 3;  $12 + 8\sqrt{2}$ .

**791.** В исходном уравнении сделаем замену переменной:  $t = \sqrt[3]{2x - 7}$ , после чего оно примет вид:  $\sqrt{t+1} = 5 - t$ . Возведём в квадрат обе части уравнения:  $t + 1 = 25 - 10t + t^2$ ,  $t^2 - 11t + 24 = 0$ . По теореме, обратной теореме Виета, получаем:

1.  $t = 3$ , тогда  $x = 17$ , делаем проверку, подставляя  $x = 17$  в исходное уравнение:  $\sqrt{3+1} = 5 - 3$ ;  $2 = 2$  — верное равенство.

2.  $t = 8$  — не подходит, так как правая часть уравнения в этом случае меньше нуля, чего быть не может, поскольку в левой части заведомо неотрицательное выражение.

*Ответ:* 17.

**792.** 1) Очевидно, что  $2x^2 - 10x + 10 = 2\left(x - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)$ .

Тогда  $|2x^2 - 10x + 10| =$

$$= \begin{cases} 2x^2 - 10x + 10, & x \in \left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left[\frac{5 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right), \\ -2x^2 + 10x - 10, & x \in \left[\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

$$|2x - 5| = \begin{cases} 2x - 5, & x \in \left[\frac{5}{2}; +\infty\right), \\ -2x + 5, & x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right). \end{cases} \quad \text{Получаем}$$

$$|2x^2 - 10x + 10| + |2x - 5| = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 5, & x \in \left[\frac{5 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right), \\ -2x^2 + 12x - 15, & x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right), \\ -2x^2 + 8x - 5, & x \in \left[\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; \frac{5}{2}\right), \\ 2x^2 - 12x + 15, & x \in \left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

2) Решаем поочерёдно четыре квадратных уравнения на соответствующих интервалах:

$$2x^2 - 8x + 5 = 5 \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x) = 0; x_1 = 0, x_2 = 4; \text{ только}$$

$$x_2 \in \left[ \frac{5 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right),$$

$$-2x^2 + 12x - 15 = 5 \Leftrightarrow 2(x^2 - 6x + 10) = 0; \text{ нет корней,}$$

$$-2x^2 + 8x - 5 = 5 \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 5) = 0; \text{ нет корней,}$$

$$2x^2 - 12x + 15 = 5 \Leftrightarrow 2(x^2 - 6x + 5) = 0; x_1 = 1, x_2 = 5; \text{ только}$$

$$x_1 \in \left( -\infty; \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

3) Из всех найденных  $x$  только при  $x = 4$  число  $\frac{x-1}{3} = \frac{4-1}{3} = 1$  является натуральным.

Ответ: 4.

**793. Решение.**  $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 2\sqrt{(\cos 4x - 1)^2}; \frac{4}{\sin^2 2x} =$

$$= 2\sqrt{(-2\sin^2 2x)^2}; \frac{4}{\sin^2 2x} = 4\sin^2 2x; \sin^4 2x = 1; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

**794.** Так как по определению квадратного корня он не отрицателен, то правая часть уравнения также должна быть неотрицательна, то есть  $\text{tg}(\ln(1 - x^2)) - 1 \geq 0$ . С другой стороны, выражение под корнем должно быть неотрицательным, то есть  $1 - \text{tg}(\ln(1 - x^2)) \geq 0$ . Из этих неравенств  $\Rightarrow$  исходное уравнение равносильно уравнению

$$\text{tg}(\ln(1 - x^2)) = 1 \Leftrightarrow \ln(1 - x^2) = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow$$

$$1 - x^2 = e^{\pi \cdot (1+4k)/4},$$

$$x^2 = 1 - e^{\pi \cdot (1+4k)/4}, k \in Z. \text{ При } k \geq 0, 1 - e^{\pi \cdot (1+4k)/4} < 0, \text{ уравнение } x^2 = 1 - e^{\pi \cdot (1+4k)/4} \text{ не имеет корней; при } k < 0, x = \pm \sqrt{1 - e^{\pi \cdot (1+4k)/4}}.$$

Ответ:  $\pm \sqrt{1 - e^{\pi \cdot (1+4k)/4}},$  где  $k \in Z, k < 0.$

**795.** Найдём область допустимых значений переменной  $x$ :  $2x - x^2 \geq 0$ ,  $x(x-2) \leq 0$ ,  $x \in [0; 2]$ . При  $0 \leq x \leq 2$  имеем:  $-1 \leq x-1 \leq 1$ ,  $|x-1| \leq 1$ ,  $\ln|x-1| \leq 0$ . Но квадратный корень в левой части уравнения неотрицателен, по определению, поэтому равенство левой и правой части уравнения может достигаться лишь при  $\ln|x-1| = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$  (проверка показывает, что  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$  являются корнями).

Ответ: 0; 2.

**796.** Рассмотрим два случая.

$$1) \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0,$$

$$\sin 6x = 2\sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 1, \quad \sin 6x = 2(\sin 3x + \cos 3x) - 1,$$

$$\sin 6x + 1 = 2(\sin 3x + \cos 3x), \quad (\sin 3x + \cos 3x)^2 - 2(\sin 3x + \cos 3x) = 0,$$

$$(\sin 3x + \cos 3x)(\sin 3x + \cos 3x - 2) = 0, \quad \begin{cases} \left[ \begin{array}{l} \sin 3x + \cos 3x = 0, \\ \sin 3x + \cos 3x - 2 = 0, \end{array} \right. \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = -1, \\ \sin 3x + \cos 3x = 2, \end{array} \right. \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[ \begin{array}{l} 3x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ \text{корней нет,} \end{array} \right. \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} 3x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in Z, \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0; \end{array} \right. \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in Z; x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z. \end{cases}$$

$$2) \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 0,$$

$$\sin 6x + 1 = -2(\sin 3x + \cos 3x), \quad (\sin 3x + \cos 3x)(\sin 3x + \cos 3x + 2) = 0,$$

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 0, \\ \sin 3x + \cos 3x = 0, \\ \sin 3x + \cos 3x + 2 = 0; \end{array} \right. \end{cases} \quad \text{система не имеет решений.}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

$$\mathbf{797.} \sin 10x = \sqrt{3} \left| \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \right| - 1.$$

Рассмотрим 2 случая:

$$1. \cos 5x - \frac{\pi}{4} \geq 0, \quad \sin 10x + 1 = \sqrt{3} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$(\sin 5x + \cos 5x)^2 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\sin 5x + \cos 5x) = 0.$$

$$(\sin 5x + \cos 5x)(\sin 5x + \cos 5x - \sqrt{1,5}) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \left\{ \begin{array}{l} \sin 5x + \cos 5x = 0, \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} 5x = -1, (\cos 5x \neq 0), \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0; \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} 5x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0; \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \quad x = -\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z.$$

$$\text{б) } \left\{ \begin{array}{l} \sin 5x + \cos 5x - \sqrt{1,5} = 0, \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{1,5} \geq 0, \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0; \end{array} \right. \quad 5x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{20} \pm \frac{\pi}{30} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z.$$

$$2. \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) < 0, \quad \sin 10x + 1 = -\sqrt{3} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$(\sin 5x + \cos 5x)(\sin 5x + \cos 5x + \sqrt{1,5}) = 0.$$

$$\text{а) } \left\{ \begin{array}{l} \sin 5x + \cos 5x = 0, \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) < 0; \end{array} \right. \quad \text{— решений нет;}$$

$$\text{б) } \left\{ \begin{array}{l} \sin 5x + \cos 5x + \sqrt{1,5} = 0, \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) < 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{1,5} = 0, \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) < 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) < 0; \end{array} \right. \quad 5x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

$$x = \frac{\pi}{20} \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z.$$

Наименьший положительный период функции

$f(x) = \sin 10x - \sqrt{3} \left| \cos \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) \right| + 1$  равен  $\frac{\pi}{5}$ . Легко видеть, что объединение полученных в пунктах 1а), 1б) и 2б) множеств значений  $x$  на полуинтервале  $\left[ 0; \frac{\pi}{5} \right)$  состоит из чисел  $\frac{\pi}{60}$ ,  $\frac{5\pi}{60}$  и  $\frac{9\pi}{60}$ . Отсюда следует ответ  $x = \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{15}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , так как  $\frac{5\pi}{60} = \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{15}$ ;  $\frac{9\pi}{60} = \frac{\pi}{60} + \frac{2\pi}{15}$  и  $\frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{60} + \frac{3\pi}{15}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{15}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**798.**  $\sqrt{(2 \cos 2x - 5)^2} + |3 \cos 2x - 4| = 9$ ;  $|2 \cos 2x - 5| + |3 \cos 2x - 4| = 9$ . Так как  $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ , то  $2 \cos 2x - 5 < 0$  и  $3 \cos 2x - 4 < 0$ , значит  $(5 - 2 \cos 2x) + (4 - 3 \cos 2x) = 9$ ;  $9 - 5 \cos 2x = 9$ ;  $5 \cos 2x = 0$ ;  $\cos 2x = 0$ ;  $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Выберем значения  $x \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ :  $n = -2$ ;  $x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ ;  $-\frac{3\pi}{4} \notin \left[ -\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ ;  $n = -1$ ;  $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$ ;  $-\frac{\pi}{4} \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ ;  $n = 0$ ;  $x = \frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{\pi}{4} \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ ;  $n = 1$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ ;  $\frac{3\pi}{4} \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ ;  $n = 2$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ ;  $\frac{5\pi}{4} \notin \left[ -\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ .

Ответ:  $-\frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{3\pi}{4}$ .

**799.**  $|7^x - 14| + \sqrt{(7^x - 5)(7^x + 49)} = 14 - 7^x$ .

1) Если  $14 - 7^x < 0$ , то уравнение не имеет корней, так как левая часть неотрицательна.

2) Если  $14 - 7^x > 0$ , то  $14 - 7^x + \sqrt{(7^x - 5)(7^x + 49)} = 14 - 7^x$ ,  $\sqrt{(7^x - 5)(7^x + 49)} = 0$ ,  $(7^x - 5)(7^x + 49) = 0$ , так как  $7^x + 49 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , то  $7^x = 5$ ,  $x = \log_7 5$ . Проверка показала, что  $x = \log_7 5$  — корень данного уравнения.

Ответ:  $\log_7 5$ .

**800.**  $\sqrt{(3^x - 9)^2} + \sqrt{(3^x + 9)(3^x - 5)} = 9 - 3^x$ ;  
 $|3^x - 9| + \sqrt{(3^x + 9)(3^x - 5)} = 9 - 3^x$ .

1) Пусть  $9 - 3^x < 0$ , тогда уравнение не имеет корней, так как правая часть принимает отрицательные значения.

2) Пусть  $9 - 3^x \geq 0$ , тогда  $9 - 3^x + \sqrt{(3^x + 9)(3^x - 5)} = 9 - 3^x$ ,  
 $\sqrt{(3^x + 9)(3^x - 5)} = 0$ ,  $(3^x + 9)(3^x - 5) = 0$ , так как  $3^x + 9 > 0$  при любых  $x \in R$ , то  $3^x - 5 = 0$ ,  $3^x = 5$ ,  $x = \log_3 5$ . Проверка показала, что  $x = \log_3 5$  является корнем данного уравнения.

Ответ:  $\log_3 5$ .

**801.** Поскольку  $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1$ , то  $\log_3(x^2 - 2x + 2) \geq 0$ . А поскольку  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ ,  $3^{x^2 - 2x + 1} \geq 1$ , то  $\log_{0,3} 3^{x^2 - 2x + 1} \leq 0$ . Следовательно, данное уравнение может выполняться лишь в случае  $\log_3(x^2 - 2x + 2) = 0$ ,  $x^2 - 2x + 2 = 1$ ,  $x = 1$ ; при  $x = 1$  второе слагаемое также равно нулю, то есть  $x = 1$  является решением.

Ответ: 1.

**802.** Поскольку  $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$ , то  $\log_4(x^2 - 4x + 5) \geq 0$ . А поскольку  $\frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} < 1$ , то  $\log_{0,4} \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$ . Следовательно, данное уравнение не имеет решений, так как его левая часть положительна при всех значения  $x$ .

Ответ: решений нет.

**803.** Решение задачи сводится к решению уравнения

$\sqrt{(2 - 2^x)^2} + \log_x x + 2^{2x} - 8 = 0$ ,  $|2 - 2^x| + \log_x x + 2^{2x} - 8 = 0$ . ОДЗ:  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ .

$|2 - 2^x| + 1 + 2^{2x} - 8 = 0$ ,  $2^{2x} + |2 - 2^x| - 7 = 0$ .

1.  $0 < x < 1$ ;  $|2 - 2^x| = 2 - 2^x$ ;  $2^{2x} + 2 - 2^x - 7 = 0$  (1),  $2^{2x} - 2^x - 5 = 0$ .

Замена:  $2^x = t$ ,  $1 < t < 2$ ;  $t^2 - t - 5 = 0$ ,  $t_{1,2} = 0,5 \pm \sqrt{5,25}$ .

Оба числа не удовлетворяют условию  $1 < t < 2$ , значит уравнение (1) не имеет корней на промежутке  $0 < x < 1$ .

2.  $x > 1$ ;  $|2 - 2^x| = 2^x - 2$ ;  $2^{2x} + 2^x - 2 - 7 = 0$  (2),  $2^{2x} + 2^x - 9 = 0$ .

Замена:  $2^x = t$ ,  $t > 2$ ;  $t^2 + t - 9 = 0$ ,  $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$ ;

$t = \frac{-1 - \sqrt{37}}{2}$  не удовлетворяет условию  $t > 2$ ,  $t = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}$ .

Вернёмся к замене:  $2^x = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}$ ,  $2^{x+1} = \sqrt{37} - 1$ ,

$x + 1 = \log_2(\sqrt{37} - 1)$ ,  $x = \log_2(\sqrt{37} - 1) - 1$  является корнем уравнения (2) на промежутке  $x > 1$ .

Ответ:  $\log_2(\sqrt{37} - 1) - 1$ .

$$804. \sqrt{2^{2x} - 2^{x+1} + 4} \cdot \log_x x^2 \cdot \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{3-x} = 0.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 4 \geq 0, \\ x > 0, x \neq 1, \\ x \geq -2, \\ x \leq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 4 \geq 0, \\ 0 < x < 1, 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

1)  $2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 4 = 0$ . Замена  $2^x = t$ ,  $t > 0$ ,  $t^2 - 2t + 4 = 0$ ,  $D = 4 - 16$ ,  $D < 0$ , действительных корней нет.  $2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 4 > 0$  при всех  $x \in R$ .

2)  $\log_x x^2 = 0$ ,  $2 \log_x |x| = 0$  корней нет.

3)  $\sqrt{x+2} = 0$ ,  $x = -2$  не входит в ОДЗ.

4)  $\sqrt{3-x} = 0$ ,  $x = 3$  — входит в ОДЗ.

Ответ: 3.

805. Рассмотрим первое уравнение системы:  $5^{3x+4y} - 25^{2x-3y} = 0$ ,  $5^{3x+4y} = 5^{4x-6y}$ ,  $3x + 4y = 4x - 6y$ ,  $x = 10y$ . Итак, имеем систему

$$\begin{cases} x = 10y, \\ \sqrt{12 - 20y + 19y} + \sqrt{10y - 9y + 2} = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10y, \\ \sqrt{12 - y} + \sqrt{y + 2} = 5. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$\sqrt{12 - y} + \sqrt{y + 2} = 5 \quad (1),$$

$$(\sqrt{12 - y})^2 = (5 - \sqrt{y + 2})^2, \quad 12 - y = 25 - 10\sqrt{y + 2} + y + 2,$$

$$(10\sqrt{y + 2})^2 = (2y + 15)^2, \quad 100y + 200 = 4y^2 + 60y + 225,$$

$$4y^2 - 40y + 25 = 0; \quad y_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 100}}{4}, \quad y_{1,2} = \frac{10 \pm 5\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Оба корня}$$

удовлетворяют уравнению (1). Тогда  $x_{1,2} = 50 \pm 25\sqrt{3}$ .

$$\text{Ответ: } \left( 50 + 25\sqrt{3}; \frac{10 + 5\sqrt{3}}{2} \right), \left( 50 - 25\sqrt{3}; \frac{10 - 5\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$806. \begin{cases} x^2 + 2y^2 + \sqrt{3x - y + 1} = x + y + 1, \\ 3y^2 + 1,5x^2 = 2y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + \sqrt{3x - y + 1} = x + y + 1, \\ 2y^2 + x^2 = \frac{4y}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4y}{3} + \sqrt{3x - y + 1} = x + y + 1, \\ 2y^2 + x^2 = \frac{4y}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y + 3\sqrt{3x - y + 1} = 3x + 3y + 3, \\ 2y^2 + x^2 = \frac{4y}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\sqrt{3x - y + 1} = 3x - y + 1 + 2, \\ 2y^2 + x^2 = \frac{4y}{3}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:  $3\sqrt{3x - y + 1} = 3x - y + 1 + 2$ . Обозначим  $\sqrt{3x - y + 1} = t$ ,  $t \geq 0$ .  $3t = t^2 + 2$ ,  $t^2 - 3t + 2 = 0$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ .

$$1) \text{ Если } t = 1, \text{ тогда } \begin{cases} \sqrt{3x - y + 1} = 1, \\ 2y^2 + x^2 = \frac{4y}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y + 1 = 1, \\ 2y^2 + x^2 = \frac{4y}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x, \\ 2 \cdot 9x^2 + x^2 = 4x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ 19x^2 - 4x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{4}{19}; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{4}{19}, \\ y = \frac{12}{19}. \end{cases} \end{cases}$$

Полученные пары чисел подставим в исходную систему и убедимся, что

$(0; 0)$ ,  $\left(\frac{4}{19}; \frac{12}{19}\right)$  — решения системы.

$$2) \text{ Если } t = 2, \text{ тогда } \begin{cases} \sqrt{3x - y + 1} = 2, \\ 2y^2 + x^2 = \frac{4y}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y + 1 = 4, \\ 2y^2 + x^2 = \frac{4y}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 3, \\ 2(x - 3)^2 + x^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot (x - 1)}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 3, \\ 3x^2 - 16x + 22 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы не имеет корней, так как  $D < 0$ .

Ответ:  $(0; 0)$ ,  $\left(\frac{4}{19}; \frac{12}{19}\right)$ .

807. Так как  $\log_x 11 = \frac{1}{\log_{11} x}$ , то  $\sqrt{25 + 9 \log_{11} x} = 3 \log_{11} \left(11 \cdot 11^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)$ ,

$$\sqrt{25 + 9 \log_{11} x} = 3 \log_{11} \left(11^{\frac{5}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\sqrt{25 + 9 \log_{11} x} = 3 \log_{11} 11^{\frac{5}{3}} + 3 \log_{11} x^{\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt{25 + 9 \log_{11} x} = 5 + \log_{11} x, \quad \log_{11} x = t, \quad \text{тогда } \sqrt{25 + 9t} = 5 + t,$$

$$25 + 9t = 25 + 10t + t^2, \quad t^2 + t = 0, \quad t(t + 1) = 0, \quad t = 0 \text{ или } t + 1 = 0,$$

$$t = -1. \quad \log_{11} x = 0 \text{ или } \log_{11} x = -1, \quad x = 1 \text{ или } x = \frac{1}{11}.$$

Проверка:

1)  $x = 1$  не является корнем исходного уравнения, так как в данном уравнении  $x = 1$  является основанием логарифма.

$$2) x = \frac{1}{11}; \sqrt{25 + \frac{9}{\log_{\frac{1}{11}} 11}} = \sqrt{25 - 9} = 4. \quad 3 \log_{11} \left( 11 \sqrt[3]{121 \cdot \frac{1}{11}} \right) =$$

$$= 3 \log_{11} \left( 11 \cdot 11^{\frac{1}{3}} \right) = 3 \log_{11} 11^{\frac{4}{3}} = 4, \quad 4 = 4. \quad x = \frac{1}{11} \text{ — корень исходного уравнения.}$$

Ответ:  $\frac{1}{11}$ .

$$808. (5 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (\cos(\pi \cdot 3^x) + 1) = 0, \quad \frac{\cos(\pi \cdot 3^x) + 1}{\sqrt{5 - x^2}} = 0.$$

$$\text{ОДЗ: } -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}. \quad \begin{cases} \cos(\pi \cdot 3^x) + 1 = 0, \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi \cdot 3^x) = -1, \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi \cdot 3^x = \pi + \pi k, k \in Z, \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^x = 1 + k, k \in Z, \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}. \end{cases} \quad \text{Уравнение может}$$

иметь целые корни, если  $1 + k$  является целой степенью числа 3.

$$k = 0, 3^x = 1, 3^x = 3^0, x = 0, 0 \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5});$$

$$k = 2, 3^x = 3, 3^x = 3^1, x = 1, 1 \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5});$$

$$k = 8, 3^x = 9, 3^x = 3^2, x = 2, 2 \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5});$$

$$k = 26, 3^x = 27, 3^x = 3^3, x = 3, 3 \notin (-\sqrt{5}; \sqrt{5}).$$

Ответ: 0, 1, 2.

$$809. \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3^x\right)}{\sqrt{9 - x^2}} = 0. \quad \text{ОДЗ: } -3 < x < 3. \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3^x\right) = 0, \\ -3 < x < 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot 3^x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ -3 < x < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^x = 1 + 2k, k \in Z, \\ -3 < x < 3. \end{cases}$$

$$k = 0, 3^x = 1, 3^x = 3^0, x = 0, 0 \in (-3; 3);$$

$$k = 1, 3^x = 3, 3^x = 3^1, x = 1, 1 \in (-3; 3);$$

$$k = 4, 3^x = 9, 3^x = 3^2, x = 2, 2 \in (-3; 3);$$

$$k = 13, 3^x = 27, 3^x = 3^3, x = 3, 3 \notin (-3; 3).$$

Ответ: 0, 1, 2.

$$810. \text{Рассмотрим первое уравнение. } \begin{cases} 13x + 10 > 0, \\ 13x + 10 \neq 1; \end{cases}$$

$4-2x-y = \sqrt{8(2-y-2x)}$ ,  $4-(2x+y) = \sqrt{8(2-(y+2x))}$ .  $2x+y = t \Rightarrow 4-t = \sqrt{8(2-t)}$ ,  $16-8t+t^2 = 8(2-t)$ ,  $16-8t+t^2 = 16-8t$ ,  $t^2 = 0$ ,  $t = 0$ .  $2x+y = 0$ ,  $y = -2x$ . При  $2x+y = 0$  выражения, стоящие под знаком логарифма, положительны. Итак,  $\begin{cases} y = -2x, \\ \operatorname{ctg}(5y+3x-7) \operatorname{tg}(2+4x-y) = 1. \end{cases}$

Рассмотрим второе уравнение системы. Заметим, что  $\operatorname{tg}(2+4x-y) \neq 0$ ,  $\operatorname{ctg}(5y+3x-7) \neq 0$ .  $\operatorname{ctg}(-7x-7) \operatorname{tg}(6x+2) = 1$ ,

$$\operatorname{tg}(6x+2) = -\frac{1}{\operatorname{ctg}(7x+7)}, \operatorname{tg}(6x+2) + \operatorname{tg}(7x+7) = 0,$$

$$\frac{\sin(6x+2+7x+7)}{\cos(6x+2)\cos(7x+7)} = 0, \sin(13x+9) = 0, 13x+9 = \pi k, k \in Z,$$

$$13x = \pi k - 9, k \in Z, x = -\frac{9}{13} + \frac{\pi k}{13}, k \in Z, y = \frac{18}{13} - \frac{2\pi k}{13},$$

$$k \in Z. \text{ Найдём целые } k, \text{ удовлетворяющие условию } \begin{cases} 13x+10 > 0, \\ 13x+10 \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 + \pi k + 10 > 0, \\ -9 + \pi k + 10 \neq 1; \end{cases} \begin{cases} k > -\frac{1}{\pi}, \\ \pi k \neq 0; \end{cases} \begin{cases} k > -\frac{1}{\pi}, \\ k \neq 0; \end{cases} k \geq 1.$$

$$\left(-\frac{9}{13} + \frac{\pi k}{13}; \frac{18}{13} - \frac{2\pi k}{13}\right), k \in Z, k \geq 1.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{9}{13} + \frac{\pi k}{13}; \frac{18}{13} - \frac{2\pi k}{13}\right), k \in Z, k \geq 1.$$

**811.** Преобразуем первое уравнение:

$$2^{3y-x+3}(1+2) = 6, 2^{3y-x+3} = 2, 3y-x+3 = 1, 3y-x+2 = 0, x = 3y+2.$$

Преобразуем второе уравнение:  $\sqrt{3y+2-8y+3} = 6y+4-y+1$ ,  $\sqrt{5-5y} = 5y+5$ . (1)

$$5-5y = 25y^2+50y+25, 25y^2+55y+20 = 0, 5y^2+11y+4 = 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121-80}}{10} = \frac{-11 \pm \sqrt{41}}{10}, y_1 = \frac{-11 + \sqrt{41}}{10},$$

$$y_2 = \frac{-11 - \sqrt{41}}{10} \text{ — посторонний корень, так как правая часть уравне-}$$

ния (1) при  $y = \frac{-11 - \sqrt{41}}{10}$  принимает отрицательные значения.

$$\text{Если } y = \frac{-11 + \sqrt{41}}{10}, \text{ то } x = \frac{-33 + 3\sqrt{41}}{10} + 2 = \frac{-13 + 3\sqrt{41}}{10}.$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{-13 + 3\sqrt{41}}{10}; \frac{-11 + \sqrt{41}}{10} \right).$$

$$812. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} y + 3 \geq 0, \\ 5 - x \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -3, \\ x \leq 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2y+2x}{2} + \frac{4y+2x}{4} = 6, \\ \sqrt{y+3} = 1 + \sqrt{5-x}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cdot 2y+2x + (2y+2x)^2 = 24, \\ \sqrt{y+3} = 1 + \sqrt{5-x}. \end{cases} \quad \text{Рассмотрим}$$

первое уравнение:  $2y+2x = t$ ,  $t > 0$ ,  $2t + t^2 = 24$ ,  $t^2 + 2t - 24 = 0$ ;  
 $t_1 = -6$  не удовлетворяет условию  $t > 0$ ,  $t_2 = 4$ .  $2y+2x = 4$ ,  $2y+2x = 2^2$ ,

$$y + 2x = 2. \text{ Итак, имеем систему: } \begin{cases} y + 2x = 2, \\ \sqrt{y+3} = 1 + \sqrt{5-x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - 2x, \\ \sqrt{2 - 2x + 3} = 1 + \sqrt{5 - x}. \end{cases} \quad \text{Решим второе уравнение системы:}$$

$$\sqrt{5 - 2x} = 1 + \sqrt{5 - x}, \quad (\sqrt{5 - 2x})^2 = (1 + \sqrt{5 - x})^2,$$

$$5 - 2x = 1 + 2\sqrt{5 - x} + 5 - x, \quad -x - 1 = 2\sqrt{5 - x}, \quad (2)$$

$$(-x - 1)^2 = (2\sqrt{5 - x})^2, \quad x^2 + 2x + 1 = 4(5 - x), \quad x^2 + 2x + 1 = 20 - 4x,$$

$$x^2 + 6x - 19 = 0; \quad x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 19}, \quad x_1 = -3 + 2\sqrt{7}, \quad x_2 = -3 - 2\sqrt{7}.$$

$$x_1 = -3 + 2\sqrt{7} \text{ не удовлетворяет уравнению (2).}$$

Если  $x = -3 - 2\sqrt{7}$ , то  $y = 8 + 4\sqrt{7}$ .  $(-3 - 2\sqrt{7}; 8 + 4\sqrt{7})$  — решение системы.

$$\text{Ответ: } (-3 - 2\sqrt{7}; 8 + 4\sqrt{7}).$$

$$813. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} y \geq 0, \\ x - 2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 0, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3^2)^{3x-2y} - 3^{3x-2y} - 6 = 0, \\ \sqrt{y} - \sqrt{x-2} = 1. \end{cases} \quad \text{Рассмотрим первое уравнение:}$$

$3^{3x-2y} = t$ ,  $t > 0$ ,  $t^2 - t - 6 = 0$ ;  $t_1 = -2$  не удовлетворяет условию  $t > 0$ ,  $t_2 = 3$ .  $3^{3x-2y} = 3$ ,  $3x - 2y = 1$ . Итак, имеем систему

$$\text{систему } \begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ \sqrt{y} = 1 + \sqrt{x-2}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3x-1}{2}, \\ \sqrt{1,5x-0,5} = 1 + \sqrt{x-2}. \end{cases} \quad \text{Решим второе}$$

уравнение системы:

$$\sqrt{1,5x-0,5} = 1 + \sqrt{x-2}, \quad (1)$$

$$(\sqrt{1,5x-0,5})^2 = (1 + \sqrt{x-2})^2, \quad 1,5x - 0,5 = 1 + 2\sqrt{x-2} + x - 2,$$

$$0,5x + 0,5 = 2\sqrt{x-2}, \quad (x+1)^2 = (4\sqrt{x-2})^2, \quad x^2 + 2x + 1 = 16(x-2),$$

$x^2 - 14x + 33 = 0$ ,  $x_1 = 11$ ,  $x_2 = 3$ . Оба числа удовлетворяют уравнению (1). Если  $x = 11$ , то  $y = \frac{33-11}{2} = 11$ . Если  $x = 3$ , то  $y = \frac{9-3}{2} = 3$ . Полученные значения  $x$  и  $y$  входят в ОДЗ. (11; 11) и (3; 3) — решения системы.

Ответ: (3; 3), (11; 11).

814. ОДЗ:  $x > 0$ ,  $y > -2$ . Рассмотрим первое уравнение системы:  $\lg(2+y) + 2\lg 2 = \lg 2x$ ,  $\lg(8+4y) = \lg 2x$ ,  $8+4y = 2x$ . Система примет

$$\text{вид: } \begin{cases} x = 4 + 2y, \\ \sqrt{y^2 + 2} = 4 + 2y + y - 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 + 2y, \\ \sqrt{y^2 + 2} = 3y. \end{cases} \quad \text{Решим второе уравнение: } \sqrt{y^2 + 2} = 3y, \quad (1)$$

$y^2 + 2 = 9y^2$ ,  $y^2 = \frac{1}{4}$ ,  $y_1 = \frac{1}{2}$ ,  $y_2 = -\frac{1}{2}$ . Из чисел  $-\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2}$  корнем уравнения (1) является число  $\frac{1}{2}$ . Если  $y = \frac{1}{2}$ , то  $x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 5$ .  $\left(5; \frac{1}{2}\right)$  — решение данной системы уравнений.

Ответ:  $\left(5; \frac{1}{2}\right)$ .

815.  $\begin{cases} 3^{2y+3x+1} + 3^{3-2y-3x} = 82, \\ \sqrt{22-5x+4y} = 2-2y-3x. \end{cases}$  Из второго уравнения системы следует, что  $2y+3x \leq 2$ . Рассмотрим первое уравнение системы:

$$3 \cdot 3^{2y+3x} + \frac{27}{3^{2y+3x}} = 82. \text{ Замена: } 3^{2y+3x} = t, t > 0. 3t + \frac{27}{t} = 82,$$

$$3t^2 - 82t + 27 = 0; t_{1,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 81}}{3}, t_{1,2} = \frac{41 \pm 40}{3}, t_1 = \frac{1}{3},$$

$$t_2 = 27. \text{ Вернёмся к замене: а) } 3^{2y+3x} = \frac{1}{3}, 2y+3x = -1, y = \frac{-1-3x}{2};$$

б)  $3^{2y+3x} = 27$ ,  $2y+3x = 3$  — не удовлетворяет условию  $2y+3x \leq 2$ .

$$\text{Система примет вид: } \begin{cases} y = \frac{-1-3x}{2}, \\ \sqrt{22-5x+4y} = 2-2y-3x. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:  $\sqrt{22-5x+4y} = 2-(2y+3x)$ ,  $\sqrt{22-5x-2-6x} = 2+1$ ,  $\sqrt{20-11x} = 3$ ,  $20-11x = 9$ ,  $11x = 11$ ,  $x = 1$ . Если  $x = 1$ , то  $y = -2$ . (1; -2) — решение данной системы.

Ответ: (1; -2).

816. ОДЗ:  $x - 3y \geq 3$ . Рассмотрим второе уравнение системы:

$$\frac{2^{x-3y}}{4} + \frac{16}{2^{x-3y}} = 5. \text{ Замена: } 2^{x-3y} = t, t > 0. \frac{t}{4} + \frac{16}{t} = 5, t^2 - 20t + 64 = 0;$$

$t_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64}$ ,  $t_1 = 16$ ,  $t_2 = 4$ . Вернемся к замене: а)  $2^{x-3y} = 16$ ,  $x - 3y = 4$ ; б)  $2^{x-3y} = 4$ ,  $x - 3y = 2$  — не входит в ОДЗ. Система примет

$$\text{вид: } \begin{cases} x - 3y = 4, \\ \sqrt{7y - 4x + 2} = x - 3y - 3; \end{cases} \quad x = 4 + 3y,$$

$\sqrt{7y - 16 - 12y + 2} = 4 - 3$ ,  $\sqrt{-5y - 14} = 1$ ,  $-5y - 14 = 1$ ,  $-5y = 15$ ,  $y = -3$ . Если  $y = -3$ , то  $x = 4 - 3 \cdot 3 = -5$ .  $(-5; -3)$  — решение данной системы.

Ответ:  $(-5; -3)$ .

817. Преобразуем уравнения системы:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^{3x-2y} + 2^{y-2x} = 16, \\ \sqrt{2^{x-y} + 4} + 2^{y-2x} = 2 \cdot 2^{3x-2y} + 6. \end{cases}$$

Заметим, что  $x - y = (3x - 2y) + (y - 2x)$ .

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^{3x-2y} + 2^{y-2x} = 16, \\ \sqrt{2^{3x-2y} \cdot 2^{y-2x} + 4} + 2^{y-2x} = 2 \cdot 2^{3x-2y} + 6. \end{cases} \quad \text{Замена: } 2^{3x-2y} = a,$$

$a > 0$ ,  $2^{y-2x} = b$ ,  $b > 0$ .  $\begin{cases} 2a + b = 16, \\ \sqrt{ab + 4} + b = 2a + 6. \end{cases}$  Выразим  $b$  из первого уравнения последней системы  $b = 16 - 2a$  и подставим во второе уравнение.

$$\begin{cases} \sqrt{a(16 - 2a) + 4} + 16 - 2a = 2a + 6, & \sqrt{a(16 - 2a) + 4} = 4a - 10, \\ \begin{cases} a(16 - 2a) + 4 = (4a - 10)^2, \\ 4a - 10 \geq 0; \end{cases} & \begin{cases} 16a - 2a^2 + 4 = 16a^2 - 80a + 100, \\ a \geq 2,5. \end{cases} \end{cases}$$

Решим первое уравнение последней системы:  $18a^2 - 96a + 96 = 0$ ,

$$3a^2 - 16a + 16 = 0; \quad a_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{3}, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = \frac{4}{3} \text{ — не}$$

удовлетворяет условию  $a \geq 2,5$ . Если  $a = 4$ , то  $b = 16 - 2 \cdot 4 = 8$ .

$$\text{Вернёмся к замене: } \begin{cases} 2^{3x-2y} = 4, & \begin{cases} 3x - 2y = 2, \\ y - 2x = 3; \end{cases} & \begin{cases} y = 3 + 2x, \\ 3x - 6 - 4x = 2; \end{cases} \\ 2^{y-2x} = 8; & \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 + 2x, \\ x = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -13, \\ x = -8. \end{cases}$$

Ответ:  $(-8; -13)$ .

$$818. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 8 - 2x - x^2 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 2].$$

Так как  $(\sqrt{8 - 2x - x^2})^2 = 8 - 2x - x^2$ , то исходное уравнение принимает вид:  $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = (\log_3 x + 1)(\log_3 x - 2) = 0$ . Оно имеет два корня

$x = \frac{1}{3}$  и  $x = 9$ . Однако последний корень не принадлежит промежутку  $(0; 2]$ . Итак,  $x = \frac{1}{3}$ .

Ответ:  $\frac{1}{3}$ .

**819. Решение.** ОДЗ:  $\begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ x + 5 \geq 0; \end{cases} \Rightarrow x \geq 3$ . Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x + 5 - 2\sqrt{x + 5} \cdot \sqrt{x - 3} + x - 3 = |2x - 4|, \quad x + 1 - \sqrt{(x + 5)(x - 3)} = |x - 2|.$$

Так как, учитывая ОДЗ,  $x \geq 3$ , то:

$$x + 1 - \sqrt{(x + 5)(x - 3)} = x - 2;$$

$$3 = \sqrt{(x + 5)(x - 3)};$$

$$9 = (x + 5)(x - 3);$$

$9 = x^2 + 2x - 15$ ;  $x_1 = -6$ ,  $x_2 = 4$ .  $x_1 = -6$  — не входит в ОДЗ, значит  $x_2 = 4$  — единственный корень уравнения.

Ответ:  $x = 4$ .

**820.** ОДЗ:  $2 - x^2 \geq 0$ ,  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .

Преобразуем правую часть уравнения:

$$\log_{\sqrt{2}} \left( (\sqrt{2 - x^2})^2 + x^2 \right) = \log_{\sqrt{2}} (2 - x^2 + x^2) = 2.$$

Таким образом, уравнение имеет вид:  $\frac{1}{27^x} - \frac{4}{9^x} + \frac{5}{3^x} - 2 = 0$ .

Пусть  $\frac{1}{3^x} = t$ ,  $t > 0$ , тогда  $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0$ ,  $(t - 1)(t^2 - 3t + 2)$ ,

$(t - 1)^2 \cdot (t - 2) = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ . Вернёмся к замене: 1)  $3^{-x} = 1$ ,  $x = 0$ ;

2)  $3^{-x} = 2$ ,  $x = -\log_3 2$ . Оба полученных решения удовлетворяют ОДЗ, значит являются корнями данного уравнения.

Ответ:  $-\log_3 2$ ; 0.

**821.** Найдём ОДЗ заданного уравнения:  $4x^2 - 9 \geq 0$ ,  $x^2 \geq \frac{9}{4}$ . Используя

метод интервалов, находим,  $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ . Сделав преобразование в правой части и приведя подобные, перепишем исходное уравнение

в виде:  $125 \cdot 5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 1 = 0$ . Сделаем замену  $t = 5^x$ . Тогда приходим к уравнению  $125t^2 - 30t + 1 = 0$ . Решением этого уравнения являются значения  $t_1 = \frac{1}{25}$  и  $t_2 = \frac{1}{5}$ . С учетом замены, получим:  $5^{x_1} = \frac{1}{25}$ ,  $x_1 = -2$ .

И  $5^{x^2} = \frac{1}{5}$ ,  $x_2 = -1$ . В ОДЗ входит только один корень  $x = -2$ .

*Ответ:*  $-2$ .

**822.** Найдём ОДЗ заданного уравнения:  $-x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \geq 0$ ,

$(\frac{1}{2} - x)(1 + x) \geq 0$ . Получаем  $x \in [-1; 0,5]$ . Сделаем преобразование в правой части уравнения и приведём подобные. Исходное уравнение примет вид:  $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$ . Сделаем замену  $t = 3^x$ . Тогда приходим к уравнению  $3t^2 - 4t + 1 = 0$ . Решением этого уравнения являются значения  $t_1 = \frac{1}{3}$  и  $t_2 = 1$ . С учётом замены, получим:  $3^x = \frac{1}{3}$ ,  $x_1 = -1$ ,  $3^x = 1$ ,  $x_2 = 0$ . В ОДЗ входят оба корня  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ .

*Ответ:*  $-1; 0$ .

**823.** Найдём ОДЗ заданного уравнения:  $1 - x^2 \geq 0$ ,  $x^2 \leq 1$ . Используя метод интервалов находим  $-1 \leq x \leq 1$ . Сделав преобразование в правой части и приведя подобные, перепишем исходное уравнение в виде:

$4\left(\frac{1}{2}\right)^{4x} - 65\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 16 = 0$ . Сделаем замену  $t = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ . Тогда приходим к уравнению  $4t^2 - 65t + 16 = 0$ . Решением этого уравнения являются значения  $t_1 = \frac{1}{4}$  и  $t_2 = 16$ . С учётом замены, получим:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x_1} = \frac{1}{4}$ ,  $x_1 = 1$ .

И  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x_2} = 16$ ,  $x_2 = -2$ . В ОДЗ входит только один корень  $x = 1$ .

*Ответ:*  $1$ .

**824.** Преобразуем уравнение  $\sqrt{(\cos 0,5x - 2)^2} + \sqrt{(\cos 0,5x - 1)^2} = 3 - \sqrt{2}$ .

Видим, что ОДЗ есть множество всех действительных чисел. Тогда  $|\cos 0,5x - 2| + |\cos 0,5x - 1| = 3 - \sqrt{2}$ . Так как  $2 > \cos 0,5x$ , а  $1 \geq \cos 0,5x$ , то  $2 - \cos 0,5x + 1 - \cos 0,5x = 3 - \sqrt{2}$ ,  $\cos 0,5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $0,5x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi k$ ,  $k \in Z$ .

*Ответ:*  $x = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi k$ ,  $k \in Z$ .

825. ОДЗ:  $x \in R$ .

$$\sqrt{\left(2 \sin \frac{x}{3} - 3\right)^2} + \sqrt{\left(2 \sin \frac{x}{3} - 5\right)^2} = 8 - 2\sqrt{3},$$

$$\left|2 \sin \frac{x}{3} - 3\right| + \left|2 \sin \frac{x}{3} - 5\right| = 8 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 3 - 2 \sin \frac{x}{3} + 5 - 2 \sin \frac{x}{3} = 8 - 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда } \frac{x}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z, x = (-1)^n \pi + 3\pi n, n \in Z.$$

Ответ:  $(-1)^n \pi + 3\pi n, n \in Z$ .

826. Так как основание логарифма число положительное и не равное единице, то  $\operatorname{tg} x > 0$ ,  $\operatorname{tg} x \neq 1$ . По определению логарифма имеем:

$$\sin 2x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x \cos x + 1 = 1; 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0, \cos x \neq 0;$$

$$\sin x(2 \cos x - \sqrt{3}) = 0; \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \pi n, n \in Z, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

При  $x = \pi n, n \in Z$   $\operatorname{tg} x = 0$  и при  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$   $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,

что противоречит условию  $\operatorname{tg} x > 0$ . Следовательно,  $x = \pi n, n \in Z$  и  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$  не являются корнями исходного уравнения.

Имеем:  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$ .

827. Так как основание логарифма число положительное и не равное единице, то  $\operatorname{ctg} x > 0$ ,  $\operatorname{ctg} x \neq 1$ . По определению логарифма имеем:

$$\sin 2x + \operatorname{ctg} x \sin x + 1 = 1, 2 \sin x \cos x + \cos x = 0, \cos x(2 \sin x + 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z. \end{cases} \quad \text{При } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$\operatorname{ctg} x = 0$  и при  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$   $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ , что проти-

воречит условию  $\operatorname{ctg} x > 0$ . Следовательно  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$  и

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in Z$  не являются корнями исходного уравнения. Имеем:

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ:  $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ .

**828.**  $7^x \cdot (3^x - 4) - 3|4 - 3^x| = 0$ .

1.  $x \leq \log_3 4$ , тогда  $(7^x + 3)(3^x - 4) = 0$ ;  $x = \log_3 4$ .

2.  $x > \log_3 4$ , тогда  $(7^x - 3)(3^x - 4) = 0$ ,  $x_1 = \log_7 3$ ,  $x_2 = \log_3 4$ . Оба этих корня не удовлетворяют условию  $x > \log_3 4$ .

Ответ:  $\log_3 4$ .

**829.** ОДЗ:  $x > -1$ . Прологарифмируем:

$$\log_2(x+1)^{\log_3^3(x+1)} = \log_2 2, \log_2^4(x+1) = 1, \log_2(x+1) = \pm 1; x+1 = 2,$$

$$x+1 = \frac{1}{2}. x = 1, 1 \in \text{ОДЗ}. x = -0,5; -0,5 \in \text{ОДЗ}. \text{Меньший } x = -0,5.$$

Ответ:  $-0,5$ .

**830.** ОДЗ:  $\log_2 x \geq 0, x \geq 1$ .

Прологарифмируем по основанию 2:

$$\sqrt{\log_2 x} \cdot \log_2 \frac{4}{x} = \log_2 x, \sqrt{\log_2 x}(2 - \log_2 x) = \log_2 x.$$

Замена  $\sqrt{\log_2 x} = t, t \geq 0; t(2 - t^2) = t^2, t = 0, 2(2 - t^2 - t) = 0. t_1 = 0,$   
 $t_2 = 1, t_3 = -2$ , но  $t \geq 0$ .  $\sqrt{\log_2 x} = 0, \sqrt{\log_2 x} = 1; x = 1, x = 2$ .  
 Наименьший корень есть  $x = 1$ .

Ответ: 1.

**831.** ОДЗ:  $x \in R$ . Раскрывая внешний модуль, получаем:

$$|\log_4(|x| + 3)| = |x| \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4(|x| + 3) = x, \\ \log_4(|x| + 3) = -x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + 3 = 4^x, \\ |x| + 3 = 4^{-x}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ:  $\pm 1$ .

**832.** ОДЗ:  $x > 0, x \neq 1, x \neq 10$ . Согласно свойству логарифмов, имеем:

$$\frac{1}{\log_x 2} = \log_2 x. \text{ Значит, данное уравнение преобразуется к виду:}$$

$$\log_2 x \cdot \left( \frac{1}{\log_3 |x - 10|} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Так как  $x \neq 1$  ( $x = 1$  не входит в ОДЗ переменной), то  $\log_2 x \neq 0$  и

сокращая на  $\log_2 x$ , получаем уравнение следствие:  $\frac{1}{\log_3 |x - 10|} - \frac{1}{2} = 0$ ,

$$\log_3 |x - 10| = 2, |x - 10| = 9, \begin{cases} x - 10 = -9, \\ x - 10 = 9, \end{cases} \quad x_1 = 1, x_2 = 19.$$

Значение  $x = 1$  не входит в ОДЗ. На области определения проведённые преобразования уравнения были равносильны, поэтому  $x = 19$  — корень исходного уравнения.

*Ответ:* 19

**833.** Найдём ОДЗ исходного уравнения:  $\cos x \neq \frac{1}{6}$ ,  $\sin x < 0$ . Найдём нули числителя:  $6 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = 0$ , применяя формулу косинуса двойного аргумента, получаем:  $12 \cos^2 x - 8 \cos x + 1 = 0$ . Сделаем замену  $\cos x = t$ :  $12t^2 - 8t + 1 = 0$ . Решим это квадратное уравнение:  $t_1 = \frac{1}{2}$ ,  $t_2 = \frac{1}{6}$ .

Остаётся сделать обратную замену и, учитывая ОДЗ, найти корни.

1.  $\cos x = \frac{1}{2}$ , так как  $\sin x < 0$  (см. ОДЗ), то  $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in Z$ .

2.  $\cos x = \frac{1}{6}$  — не удовлетворяет ОДЗ.

*Ответ:*  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in Z$ .

**834.** Условие задачи эквивалентно совокупности

$$\begin{cases} 3x - 4 < 0, \\ \log_4^2 x^2 - \log_2(16x) + 2 < 0, \end{cases} \quad \text{Решим отдельно второе неравенство из}$$

составленной совокупности.  $\log_4^2 x^2 - \log_2(16x) + 2 < 0$ ,

$$\log_2^2 x - \log_2 16 - \log_2 x + 2 < 0, \log_2^2 x - 4 - \log_2 x + 2 < 0,$$

$\log_2^2 x - \log_2 x - 2 < 0$ . Сделаем замену  $t = \log_2 x$ . Тогда неравенство при-

мет вид  $t^2 - t - 2 < 0$ .  $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = -1, t_2 = 2$ .

Значит,  $t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t - 2) < 0, -1 < t < 2$ . Возвращаясь к переменной  $x$ , получаем неравенство

$$-1 < \log_2 x < 2, \log_2 \frac{1}{2} < \log_2 x < \log_2 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 4. \text{ Таким образом,}$$

$$\text{исходная совокупность принимает вид } \begin{cases} 3x - 4 < 0, \\ \frac{1}{2} < x < 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{3}, \\ \frac{1}{2} < x < 4; \end{cases}$$

$$\Rightarrow x < 4.$$

Ответ:  $(-\infty; 4)$ .

**835.** Для ответа на вопрос задачи требуется на интервале  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  решить неравенство:  $|\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 1| < 2$ . Сделав замену  $\operatorname{tg} x = t$ , получим неравенство:  $|t^2 - 2t - 1| < 2$ . По определению модуля это неравенство равносильно системе:  $\begin{cases} t^2 - 2t - 1 < 2, \\ t^2 - 2t - 1 > -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+1)(t-3) < 0, \\ (t-1)^2 > 0. \end{cases}$

Решая 1-ое неравенство этой системы методом интервалов (см. рис. 179) получаем, что его решением являются  $t \in (-1; 3)$ . Второе неравенство,

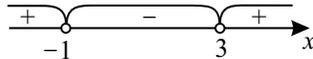


Рис. 179.

очевидно, справедливо при всех  $t \neq 1$ . Таким образом, возвращаясь к переменной  $x$ , получаем, что исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} -1 < \operatorname{tg} x < 3, \\ \operatorname{tg} x \neq 1. \end{cases}$$

Решив эти простейшие тригонометрические неравенства и выбрав

$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ , получим, что искомыми значениями  $x$  являются

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \operatorname{arctg} 3\right).$$

Ответ:  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \operatorname{arctg} 3\right)$ .

**836.** Воспользовавшись тождеством  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , заданную функцию представим в виде:  $y = 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 1$ . Для ответа на вопрос задачи требуется на отрезке  $[-\pi; \pi]$  решить неравенство:

$|2 \cos^2 x + 3 \cos x - 1| \leq 1$ . Сделав замену  $\cos x = t$ , получим неравенство:  $|2t^2 + 3t - 1| \leq 1$ . По определению модуля это неравенство равносильно системе  $\begin{cases} 2t^2 + 3t - 1 \leq 1, \\ 2t^2 + 3t - 1 \geq -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(t+2) \cdot (t-0,5) \leq 0, \\ 2t \cdot (t+1,5) \geq 0. \end{cases}$

Решая неравенства последней системы методом интервалов и беря пересечение полученных множеств, (см. рис. 180), находим, что её решением

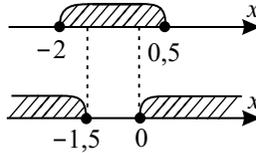


Рис. 180.

является  $t \in [-2; -1,5] \cup [0; 0,5]$ . Возвращаясь к переменной  $x$ , получаем, что исходное неравенство равносильно системе  $\begin{cases} \cos x \leq 0,5, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$  (значений  $x$  таких, что  $\cos x \in [-2; -1,5]$  не существует). Решив эти простейшие тригонометрические неравенства и выбрав  $x \in [-\pi; \pi]$ , получим, что искомыми значениями являются  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Ответ:  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**837.** План решения: 1. Сформулируем условие задачи в виде неравенства. 2. Возведём обе части неравенства в квадрат, перенесём все в одну сторону, разложим на множители и воспользуемся методом интервалов.

1. Для точки  $(x; f(x))$  графика функции  $y = f(x)$  расстояние до оси абсцисс равно  $|f(x)|$ , а расстояние до оси ординат равно  $|x|$ . В силу этого задача равносильна решению неравенства  $\left|\frac{x}{4x+1}\right| \geq |x|$ . Множество его решений и будет являться ответом к данной задаче.

2. Так как обе части неравенства неотрицательны, то  $\left|\frac{x}{4x+1}\right| \geq |x| \Leftrightarrow \left|\frac{x}{4x+1}\right|^2 \geq |x|^2, \left(\frac{x}{4x+1}\right)^2 - x^2 \geq 0, \left(\frac{x}{4x+1} - x\right)\left(\frac{x}{4x+1} + x\right) \geq 0,$   
 $\frac{x - 4x^2 - x}{4x+1} \cdot \frac{x + 4x^2 + x}{4x+1} \geq 0, \frac{-4x^2 \cdot (2x + 4x^2)}{(4x+1)^2} \geq 0,$   
 $\frac{-8x^3 \cdot (1 + 2x)}{(4x+1)^2} \geq 0.$

Решая это неравенство методом интервалов (см. рис. 181), получаем:  
 $x \in [-0,5; -0,25) \cup (-0,25; 0]$ .

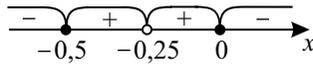


Рис. 181.

*Ответ:*  $[-0,5; -0,25) \cup (-0,25; 0]$ .

**838.** Для точки  $(x; f(x))$  графика функции  $y = f(x)$  расстояние до оси абсцисс равно  $|f(x)|$ , а расстояние до оси ординат равно  $|x|$ . В силу этого задача равносильна решению неравенства  $\left| \frac{x^2 - 8}{x} \right| > |x|$ . Множество

его решений и будет являться ответом к данной задаче. Так как обе части неравенства неотрицательны, то  $\left| \frac{x^2 - 8}{x} \right| > |x| \Leftrightarrow \left| \frac{x^2 - 8}{x} \right|^2 > |x|^2$ ,

$$\left( \frac{x^2 - 8}{x} \right)^2 - x^2 > 0, \left( \frac{x^2 - 8}{x} - x \right) \left( \frac{x^2 - 8}{x} + x \right) > 0,$$

$$\frac{x^2 - 8 - x^2}{x} \cdot \frac{x^2 - 8 + x^2}{x} > 0, \frac{-8 \cdot (2x^2 - 8)}{x^2} > 0, \frac{-16(x - 2)(x + 2)}{x^2} > 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов (см. рисунок 182), получаем:  
 $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$

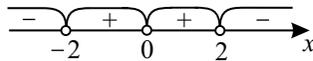


Рис. 182.

*Ответ:*  $(-2; 0) \cup (0; 2)$ .

**839.** Для точки  $(x; f(x))$  графика функции  $y = f(x)$  расстояние до оси абсцисс равно  $|f(x)|$ , а расстояние до оси ординат равно  $|x|$ . Поэтому ответом на вопрос задачи является множество решений неравенства:

$\left| \frac{x + 4}{x - 2} \right| \geq |x|$ . Так как обе части этого неравенства неотрицательны, то оно

равносильно неравенству:  $\left| \frac{x + 4}{x - 2} \right|^2 \geq |x|^2$ . Далее имеем:

$$\left( \frac{x + 4}{x - 2} \right)^2 - x^2 \geq 0, \left( \frac{x + 4}{x - 2} - x \right) \cdot \left( \frac{x + 4}{x - 2} + x \right) \geq 0,$$

$$\frac{x + 4 - x^2 + 2x}{x - 2} \cdot \frac{x + 4 + x^2 - 2x}{x - 2} \geq 0,$$

$\frac{-(x^2 - 3x - 4) \cdot (x^2 - x + 4)}{(x - 2)^2} \geq 0$ . Так как дискриминант квадратного трёхчлена  $x^2 - x + 4$  отрицателен, то  $x^2 - x + 4 > 0$  при всех  $x$ . Поэтому,  $\frac{-(x^2 - 3x - 4)(x^2 - x + 4)}{(x - 2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 4}{(x - 2)^2} \leq 0, \frac{(x - 4)(x + 1)}{(x - 2)^2} \leq 0$ . Решая последнее неравенство методом интервалов (см. рис 183), получаем:  $x \in [-1; 2) \cup (2; 4]$ .

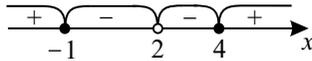


Рис. 183.

Ответ:  $[-1; 2) \cup (2; 4]$ .

**840.** Для точки  $(x; f(x))$  графика функции  $y = f(x)$  расстояние до оси абсцисс равно  $|f(x)|$ , а расстояние до оси ординат равно  $|x|$ . В силу этого задача равносильна решению неравенства  $\left| \frac{x-1}{x+3} \right| > |x|$ . Множество его решений и будет являться ответом к данной задаче. Так как обе части неравенства неотрицательны, то  $\left| \frac{x-1}{x+3} \right| > |x| \Leftrightarrow \left| \frac{x-1}{x+3} \right|^2 > |x|^2$ ,  $\left( \frac{x-1}{x+3} \right)^2 - x^2 > 0, \left( \frac{x-1}{x+3} - x \right) \left( \frac{x-1}{x+3} + x \right) > 0$ ,  $\frac{x-1-x^2-3x}{x+3} \cdot \frac{x-1+x^2+3x}{x+3} > 0$ ,  $\frac{-(x^2+2x+1) \cdot (x^2+4x-1)}{(x+3)^2} > 0$ ,  $\frac{-(x+1)^2 \cdot (x - (-2 - \sqrt{5})) (x - (-2 + \sqrt{5}))}{(x+3)^2} > 0$ . Решая это неравенство методом интервалов (см. рисунок 184), получаем:  $x \in (-2 - \sqrt{5}; -3) \cup (-3; -1) \cup (-1; -2 + \sqrt{5})$

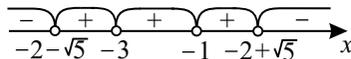


Рис. 184.

Ответ:  $(-2 - \sqrt{5}; -3) \cup (-3; -1) \cup (-1; -2 + \sqrt{5})$ .

841. Задача сводится к решению неравенства  $\left| \frac{2x^2 + 3x}{x} \right| < 1$ . Пользуясь

свойствами модуля получим  $\frac{|2x^2 + 3x|}{|x|} < 1$ ,  $\frac{|x||2x + 3|}{|x|} < 1$ . Отсюда

$|2x + 3| < 1$ . Заменяем данное неравенство, содержащее знак модуля, равносильным ему неравенством, не содержащим этого знака. По определению модуля получим:

$$|2x + 3| = \begin{cases} 2x + 3, & \text{при } 2x + 3 \geq 0, x \in [-1,5; \infty), \\ -2x - 3, & \text{при } 2x + 3 < 0, \text{ то есть } x \in (-\infty; -1,5). \end{cases}$$

Таким образом, действительная ось делится точкой  $x = -1,5$  на области:  $(\infty; -1,5)$ ,  $(-1,5; +\infty)$ . В первой области данное неравенство равносильно неравенству  $-2x - 3 < 1$ , откуда  $x \in (-2; +\infty)$ . Во второй области, исходное неравенство может быть заменено неравенством  $2x + 3 < 1$ , откуда  $x \in (-\infty; -1)$ . Таким образом, множество всех решений данного неравенства состоит из двух частей:

$$(\infty; -1,5) \cap (-2; +\infty) = (-2; -1,5], [-1,5; +\infty) \cap (-\infty; -1) = [-1,5; -1).$$

Ответ:  $(-2; -1)$ .

842. Задача сводится к решению неравенства  $|2x + 14| \geq |3x + 10|$ . Заменяем данное неравенство, содержащее знак модуля, равносильным ему неравенством, не содержащим этого знака. По определению модуля получим:

$$|2x + 14| = \begin{cases} 2x + 14, & \text{при } 2x + 14 \geq 0, \text{ то есть } x \geq -7, \\ -2x - 14, & \text{при } 2x + 14 < 0, \text{ то есть } x < -7. \end{cases}$$

$$|3x + 10| = \begin{cases} 3x + 10, & \text{при } 3x + 10 \geq 0, \text{ то есть } x \geq -\frac{10}{3}, \\ -3x - 10, & \text{при } 3x + 10 < 0, \text{ то есть } x < -\frac{10}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, действительная ось делится точками  $x = -7$  и  $x = -\frac{10}{3}$

на области:  $(-\infty; -7)$ ,  $[-7; -\frac{10}{3})$ ,  $[-\frac{10}{3}; +\infty)$ . В первой области

$|2x + 14| = -2x - 14$ ,  $|3x + 10| = -3x - 10$ , и потому в этой области данное неравенство равносильно неравенству  $-2x - 14 \geq -3x - 10$ , откуда  $x \geq 4$ . Во второй области  $|2x + 14| = 2x + 14$ ,  $|3x + 10| = -3x - 10$ , и данное неравенство может быть заменено неравенством  $2x + 14 > -3x - 10$ , откуда  $x \geq -4,8$ . В третьей области  $|2x + 14| = 2x + 14$ ,  $|3x + 10| = 3x + 10$ , и потому в этой области данное неравенство равносильно неравенству  $2x + 14 \geq 3x + 10$ , откуда  $x \leq 4$ . Таким образом, множество всех реше-

ний данного неравенства состоит из трёх частей:  $(-\infty; -7) \cap [4; +\infty) = \emptyset$ ,  
 $[-7; -\frac{10}{3}) \cap [-4, 8; +\infty) = [-4, 8; -\frac{10}{3})$ ,  $[-\frac{10}{3}; +\infty) \cap (-\infty; 4] =$   
 $= [-\frac{10}{3}; 4]$ .

Ответ:  $[-4, 8; 4]$ .

**843.** Данная задача сводится к решению неравенства  $|3x + 6| > |4x - 6|$ . Заметим, что так как обе части данного неравенства неотрицательны, то его можно заменить на равносильное  $|3x + 6|^2 > |4x - 6|^2$ ;  
 $9x^2 + 36x + 36 > 16x^2 - 48x + 36$ ;  $7x^2 - 84x < 0$ ;  $7x(x - 12) < 0$ ;  $x \in (0; 12)$ .

Ответ:  $(0; 12)$ .

**844.**  $\frac{16^{2x+0,75} - 130 \cdot 2^{4x}}{13x - 7} > \frac{32}{7 - 13x}$ ,  
 $\frac{16^{2x+0,75} - 130 \cdot 2^{4x} + 32}{13x - 7} > 0$ ,  $\frac{16^{2x+0,75} - 130 \cdot 16^x + 32}{13x - 7} > 0$ . Решим

неравенство методом интервалов. Найдём значения  $x$ , при которых числитель обращается в ноль:

$8 \cdot 16^{2x} - 130 \cdot 16^x + 32 = 0$ , сделаем замену  $t = 16^x$ ,  $t > 0$ , тогда

$4t^2 - 65t + 16 = 0$ ;  $D = 65^2 - 16^2 = 49 \cdot 81 = 63^2$ ,  $t_{1,2} = \frac{65 \pm 63}{8}$ ,  $t_1 = \frac{1}{4}$ ,

$t_2 = 16 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 1$ . Знаменатель обращается в ноль при  $x = \frac{7}{13}$

(см. рис 185). Искомыми значениями являются  $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{7}{13}) \cup (1; +\infty)$ .

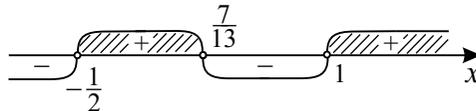


Рис. 185.

Ответ:  $(-\frac{1}{2}; \frac{7}{13}) \cup (1; +\infty)$ .

**845.**  $\frac{3^{4x} - 90 \cdot 9^{x-0,5}}{8x - 5} < \frac{81}{5 - 8x}$ ,  $\frac{9^{2x} - 90 \cdot 9^x \cdot \sqrt{\frac{1}{9} + 81}}{8x - 5} < 0$ ,

$$\frac{9^{2x} - 30 \cdot 9^x + 81}{8x - 5} < 0.$$

Возможны два случая:

$$1) \begin{cases} 9^{2x} - 30 \cdot 9^x + 81 > 0, \\ 8x - 5 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9^x - 27)(9^x - 3) > 0, \\ x < \frac{5}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 9^x < 3, \\ 9^x > 27, \end{cases} \\ x < \frac{5}{8}. \end{cases}$$

В силу монотонного возрастания функции  $y = 3^x$  имеем:

$$\begin{cases} 2x < 1, 2x > 3, \\ x < \frac{5}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2}, x > 1,5, \\ x < \frac{5}{8}; \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{1}{2}).$$

$$2) \begin{cases} 9^{2x} - 30 \cdot 9^x + 81 < 0, \\ 8x - 5 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9^x - 27)(9^x - 3) < 0, \\ x > \frac{5}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 < 9^x < 27, \\ x > \frac{5}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < 3^{2x} < 3^3, \\ x > \frac{5}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < 2x < 3, \\ x > \frac{5}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, \\ x > \frac{5}{8}; \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{5}{8}; \frac{3}{2}\right).$$

Объединяя результаты 1) и 2), имеем  $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup \left(\frac{5}{8}; \frac{3}{2}\right)$ .

Ответ:  $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup \left(\frac{5}{8}; \frac{3}{2}\right)$ .

846.  $\frac{27^x + 3 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{13 - 8x} > \frac{63}{13 - 8x}$ ,  $\frac{3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 63}{13 - 8x} > 0$ . Возможны два случая.

1)  $\begin{cases} 3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 63 > 0, \\ 13 - 8x > 0. \end{cases}$  Найдём корни выражения в левой

части первого неравенства системы используя схему Горнера. Замена  $3^x = t$ ,  $t > 0$ .  $t^3 + 3t^2 + 3t - 63 > 0$ ,  $t^3 + 3t^2 + 3t - 63 = 0$ .

	1	3	3	-63
3	1	6	21	0

$t = 3$  — корень.  $t^2 + 6t + 21 = 0$ ,  $D < 0 \Rightarrow$  действительных корней нет.  $(t - 3)(t^2 + 6t + 21) > 0$ ,  $t - 3 > 0$ ,  $t > 3$ . Вернёмся к замене:  $3^x > 3$ ,  $x > 1$ , так как  $y = 3^x$  монотонно возрастает. Система имеет вид

$$\begin{cases} x > 1, \\ x < \frac{13}{8}; \end{cases} \quad 1 < x < \frac{13}{8}.$$

2)  $\begin{cases} 3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 63 < 0, \\ 13 - 8x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1, \\ x > \frac{13}{8}. \end{cases}$  Система не имеет решений.

Ответ:  $\left(1; \frac{13}{8}\right)$ .

**847.** Множество точек линии  $|y| = \log_3(x - 8) - 3$  симметрично относительно оси  $Ox$ , так как если точка  $(x, y)$  принадлежит этому множеству, то точка  $(x, -y)$  также ему принадлежит. Заметим, что множество значений абсцисс точек линии  $|y| = \log_3(x - 8) - 3$  ограничено неравенством  $\log_3(x - 8) - 3 \geq 0$ , так как  $|y| \geq 0$  при любом  $y \in R$ . Решим неравенство  $\log_3(x - 8) - 3 \geq 0$ .  $\log_3(x - 8) - 3 \geq 0$ ,  $\log_3(x - 8) \geq 3$ ,  $\log_3(x - 8) \geq \log_3 27 \Leftrightarrow x - 8 \geq 27$ ,  $x \geq 35$ . Таким образом, любому значению  $x_0 = 3^{y_0} > 35$  соответствуют две точки линии  $|y| = \log_3(x - 8) - 3$ :  $(x_0, \log_3(x_0 - 8) - 3)$  и  $(x_0, -\log_3(x_0 - 8) + 3)$ . Так как каждая из этих точек не должна лежать выше точки  $(x_0; y_0)$  более чем на 1, то достаточно наложить это условие на верхнюю точку:  $(x_0, \log_3(x_0 - 8) - 3)$ . При выполнении условия для верхней точки для нижней оно будет выполняться автоматически. Итак, точка  $(x_0, \log_3(x_0 - 8) - 3)$  не лежит выше точки  $(x_0; y_0)$  более чем на 1. Такое условие равносильно неравенству  $\log_3(x_0 - 8) - 3 - y_0 \leq 1$ . Из соотношения  $x_0 = 3^{y_0}$  находим  $y_0 = \log_3 x_0$ . Таким образом, для определения абсцисс точек, удовлетворяющих условию задачи, приходим к системе уравнений:  $\begin{cases} \log_3(x_0 - 8) - 3 - \log_3 x_0 \leq 1, \\ x_0 \geq 35, \end{cases}$

$$\begin{cases} \log_3 \frac{x_0 - 8}{x_0} \leq 4, \\ x_0 \geq 35, \end{cases} \quad \begin{cases} \log_3 \frac{x_0 - 8}{x_0} \leq \log_3 81, \\ x_0 \geq 35, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < \frac{x_0 - 8}{x_0} \leq 81, \\ x_0 \geq 35, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_0 - 8}{x_0} > 0, \\ \frac{x_0 - 8 - 81x_0}{x_0} \leq 0, \\ x_0 \geq 35, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x_0 - 8}{x_0} > 0, \\ \frac{80x_0 + 8}{x_0} \geq 0, \\ x_0 \geq 35, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 \in (-\infty; 0) \cup (8; +\infty), \\ x_0 \in (-\infty; -0,1] \cup (0; +\infty), \\ x_0 \geq 35, \end{cases} \Rightarrow x_0 \geq 35. \text{ Тогда } y_0 \geq \log_3 35.$$

Ответ:  $[\log_3 35; +\infty)$ .

848. Условие задачи выполняется для тех значений  $x$ , при которых выполняется неравенство  $\log_{|x|} \frac{3}{6x^2 - 11|x| + 4} < -1$ . Сделаем замену  $t = |x|$ .

Рассмотрим два случая.

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} 0 < t < 1, \\ \log_t \frac{3}{6t^2 - 11t + 4} < -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1, \\ \frac{3}{6t^2 - 11t + 4} > \frac{1}{t}; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1, \\ -\frac{2(3t^2 - 7t + 2)}{t(6t^2 - 11t + 4)} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1, \\ \frac{(t-2)(t-1/3)}{t(t-4/3)(t-1/2)} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0; 1), \\ t \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right); \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right). \\ \\ 2) & \begin{cases} t > 1, \\ \log_t \frac{3}{6t^2 - 11t + 4} < -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1, \\ \frac{3}{6t^2 - 11t + 4} > 0, \\ \frac{3}{6t^2 - 11t + 4} < \frac{1}{t}; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1, \\ 6t^2 - 11t + 4 > 0, \\ -\frac{2(3t^2 - 7t + 2)}{t(6t^2 - 11t + 4)} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1, \\ (t-4/3)(t-1/2) > 0, \\ \frac{(t-2)(t-1/3)}{t} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (1; +\infty), \\ t \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right), \\ t \in \left(-\infty; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow t \in (2; +\infty). \end{aligned}$$

Таким образом,  $t \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ . Вернёмся к старой переменной  $x$ .

Имеем,  $\begin{cases} \frac{1}{3} < |x| < \frac{1}{2}, \\ |x| > 2; \end{cases}$  Откуда,  $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ .

Ответ:  $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ .

**849.** Ключевая идея: Искомые значения  $x$  удовлетворяют неравенству  $3^{|x-1|} + 24 < 3^{|x+1|}$ .

План решения: Раскроем модули и решим неравенство на трех промежутках: 1)  $x < -1$ , 2)  $-1 \leq x \leq 1$  и 3)  $x > 1$ .

1) Пусть  $x < -1$ , тогда неравенство примет вид  $3^{1-x} + 24 < 3^{-x-1} \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{-x-1} - 3^{-x-1} < -24 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

2) Пусть  $-1 \leq x \leq 1$ , тогда неравенство примет вид  $3^{1-x} + 24 < 3^{x+1}$ . Умножим обе части неравенства на  $3^{x-1} > 0$ . Получаем,  $3^{2-x} - 8 \cdot 3^x - 1 > 0$ . Сделаем замену  $t = 3^x$ ,  $t > 0$  и решим квадратное неравенство  $t^2 - 8t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > 4 + \sqrt{17}$ .

Возвращаемся к переменной  $x$  и получаем  $3^x > 4 + \sqrt{17} \Leftrightarrow x > \log_2(4 + \sqrt{17})$ . Учитывая, что  $\log_2(4 + \sqrt{17}) > 2$  и  $-1 \leq x \leq 1$ , получаем:  $x \in \emptyset$ .

3) Пусть  $x > 1$ , тогда неравенство примет вид  $3^{x-1} + 24 < 3^{x+1} \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-1} > 24 \Leftrightarrow 3^{x-1} > 3 \Leftrightarrow x > 2$ . Учитывая условие  $x > 1$ , получаем:  $x > 2$ .

Из пунктов 1), 2), 3) следует, что решением задачи является промежуток  $(2; +\infty)$ .

Ответ:  $(2; +\infty)$ .

**850.** Ключевая идея: Искомые значения  $x$  совпадают с решениями неравенства  $2^{|x-3|} + 2^{|x-1|+2} < 10$ .

План решения: Раскроем модули и решим неравенство на трёх промежутках: 1)  $x < 1$ , 2)  $1 \leq x \leq 3$ , и 3)  $x > 3$ .

1) Пусть  $x < 1$ , тогда неравенство примет вид  $2^{3-x} + 2^{3-x} < 10 \Leftrightarrow 2^{3-x} < 5 \Leftrightarrow 3 - x < \log_2 5 \Leftrightarrow x > \log_2 1,6$ .

Учитывая, что  $\log_2 1,6 < 1$  и  $x < 1$ , получаем:  $x \in (\log_2 1,6; 1)$ .

2) Пусть  $1 \leq x \leq 3$ , тогда неравенство примет вид  $2^{3-x} + 2^{x+1} < 10$ . Умножим обе части неравенства на  $2^x > 0$  (это можно сделать так как  $2x > 0$ ). Получаем,  $2 \cdot 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 8 < 0$ . Сделаем замену  $t = 2^x$ ,  $t > 0$  и решим квадратное неравенство  $2t^2 - 10t - 8 < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 4$ .

Возвращаемся к переменной  $x$  и получаем  $2^x < 4 \Leftrightarrow x < 2$ . Учитывая, что  $1 \leq x \leq 3$ , получаем:  $x \in [1; 2)$ .

3) Пусть  $x > 3$ , тогда неравенство примет вид  $2^{x-3} + 2^{x+1} < 10$ . Поскольку при  $x > 3$  выполняются неравенства  $2^{x-3} > 2^{3-3} = 1$  и  $2^{x+1} > 2^{3+1} = 16$ , получаем, что  $2^{x-3} + 2^{x+1} > 17$ . Следовательно, неравенство  $2^{x-3} + 2^{x+1} < 10$  не имеет решений при  $x > 3$ .

Из пунктов 1), 2), 3) следует, что решением задачи является множество  $(\log_2 1,6; 1) \cup [1; 2)$  то есть  $(\log_2 1,6; 2)$ .

*Ответ:*  $(\log_2 1,6; 2)$ .

**851.** Обозначим  $t = |\log_2 x|$ . Тогда исходное неравенство  $\log_2^2 x - 5|\log_2 x| + 6 < 0$  преобразуется к виду  $t^2 - 5t + 6 < 0$ ;  $(t - 2)(t - 3) < 0$ ;  $2 < t < 3$ . Решим теперь систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_2 x < -2, \\ \log_2 x > 2, \\ \log_2 x > -3, \\ \log_2 x < 3; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{1}{4}, \\ x > 4, \\ x > \frac{1}{8}, \\ x < 8; \end{array} \right. \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}, \\ 4 < x < 8. \end{array} \right.$$

ОДЗ:  $x > 0$ , поэтому все найденные  $x$  принадлежат ОДЗ.

*Ответ:*  $(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}) \cup (4; 8)$ .

**852.** ОДЗ  $x > 0$ ;  $x \neq 1$ .  $(0,8)^{\log_x^2 7 - |\log_x 7|} \geq 1$ ;  $\log_x^2 7 - |\log_x 7| \leq 0$ ;  $|\log_x 7|(|\log_x 7| - 1) \leq 0$ ; разделим обе части на  $|\log_x 7| > 0$ :

$|\log_x 7| - 1 \leq 0$ ;  $|\log_x 7| \leq 1$ ;  $-1 \leq \log_x 7 \leq 1$ ;  $\frac{1}{7} \leq x \leq 7$ . Учитывая

ОДЗ, находим  $x \in [\frac{1}{7}; 1) \cup (1; 7]$ .

*Ответ:*  $[\frac{1}{7}; 1) \cup (1; 7]$ .

**853.** Необходимо найти значения  $x$ , при которых  $x(x+2)(x+3\sin x) \geq 0$ . Очевидно, что при  $x > 0$   $x+3\sin x > 0$ , при  $x < 0$   $x+3\sin x < 0$ . То есть единственным корнем уравнения  $x+3\sin x = 0$  является  $x = 0$ . Решая теперь неравенство методом интервалов, получим  $x \in [-2; +\infty)$ .

*Ответ:*  $[-2; +\infty)$ .

**854.** Рассмотрим  $g(x) = x + \cos(x+1)$ . Имеем:  $g'(x) = 1 - \sin(x+1)$ ,  $0 \leq g'(x) \leq 2$ . Это значит, что  $g(x)$  возрастает на всей области определения.

Так как  $g(-1) = 0$ ,  $(x+1)^3 > 0$  при  $x > -1$  и  $(x+1)^3 < 0$  при  $x < -1$ , то  $g(x) > 0$  при  $x > -1$  и  $g(x) < 0$  при  $x < -1$ . Отсюда  $D(f) = x \in (-\infty; +\infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; +\infty)$ .

**855.** Чтобы существовала исходная функция, необходимо, чтобы

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \geq 0$ . А для этого:  $0 < \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \leq 1$ . Так как  $\sqrt{x}+1 > 0$ , умножим все части этого неравенства на  $\sqrt{x}+1$ :  $0 < \sqrt{x}-3 \leq \sqrt{x}+1$ , что даёт:  $\begin{cases} 1 \geq -3, \\ \sqrt{x} > 3. \end{cases}$  Первое неравенство выполняется всегда, второе (так как  $x \geq 0$ , чтобы существовал  $\sqrt{x}$ ) при  $x > 9$ .

Ответ:  $(9; +\infty)$ .

**856.** Очевидно,  $D(f) = R$ .

После преобразований  $f(x) = 0,25x^4 - x^3 + x^2 + 2$ .

Функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[0; 2]$  и дифференцируема на  $(0; 2)$ , следовательно, её наибольшее значение на отрезке  $[0; 2]$  среди значений этой функции на концах отрезка и в критических точках, принадлежащих интервалу  $(0; 2)$ .

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2),$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$$

$$f(0) = 2. \quad f(1) = 2,25. \quad f(2) = 2.$$

Ответ: 2,25.

**857.** 1) ОДЗ:  $\cos(\pi x) \neq 0$ , то есть  $x \neq \frac{1}{2} + n, n \in Z$ . Тогда

$$21x^2 - 8x^3 - \frac{30 - 30 \sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \cdot x^4 = 21x^2 - 8x^3 - 30x^4.$$

2) Найдём точки максимума функции  $f(x) = 21x^2 - 8x^3 - 30x^4$ ,  $x \neq \frac{1}{2} + n, n \in Z$ .

$$f'(x) = 42x - 24x^2 - 120x^3 = -6x(20x^2 + 4x - 7).$$

$f'(x) = 0$  при  $x = 0$ ,  $x = -\frac{7}{10}$  ( $x = \frac{1}{2}$  не входит в область определения функции, см. рис. 186).

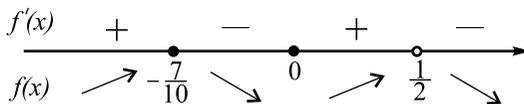


Рис. 186.

Точка максимума  $x = -0,7$ .

Ответ:  $-0,7$ .

858.  $D(y)$ :  $x > -1, x \neq 1$ .

При  $x \in D(y)$   $y = \sqrt{x+3} \cdot 2^{-\frac{1}{2} \log_2 \frac{x+3}{x^3-x^2-x+1}} =$   
 $= \sqrt{x+3} \left( \frac{x+3}{x^3-x^2-x+1} \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x^3-x^2-x+1}$ . Функция  $y$  будет  
 возрастать там, где возрастает подкоренное выражение с учётом ОДЗ.  
 Итак, найдём интервалы возрастания функции  $f = x^3 - x^2 - x + 1$ .  
 $f' = 3x^2 - 2x - 1 = 0$ ;  $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{3}$ . Получим ответ:

$x \in \left(-1; -\frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$  (см. рис. 187).

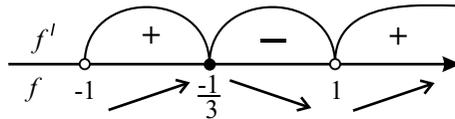


Рис. 187.

Ответ:  $\left(-1; -\frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$ .

859. Сначала найдём область определения функции:  $\frac{x+1}{x^3+3x^2-4} > 0$ ;

$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)^2} > 0$ , отсюда  $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$ .

Теперь преобразуем исходную функцию:

$$y = (x+1) \cdot 3^{\log_3 \frac{x^3+3x^2-4}{x+1}} = \frac{(x+1)(x-1)(x+2)^2}{x+1} = (x-1)(x+2)^2.$$

Для нахождения промежутков убывания найдём производную:

$y' = (x+2)^2 + 2(x-1)(x+2) = 3x(x+2)$ .  $y' = 0$  при  $x = -2$ ;  $x = 0$   
 (см. рис. 188).

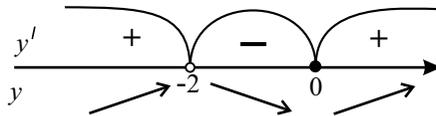


Рис. 188.

С учётом области определения делаем вывод, что функция убывает при  $x \in (-2; -1)$ .

Ответ:  $(-2; -1)$ .

**860.** Область определения функции  $f(x)$ :  $-3 < x < 2$ . Тогда

$$f(x) = \frac{3(x^5 - 10x)(x + 3)}{x + 3} - \frac{(5x^3 + 1)(2 - x)}{x - 2} = 3x^5 + 5x^3 - 30x + 1$$

в области определения. Для того, чтобы найти точку максимума, найдём производную:  $f'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 30 = 15(x^4 + x^2 - 2) = 15(x^2 - 1)(x^2 + 2)$ . Ясно, что  $f'(x) = 0$  при  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -1$ . Оба значения входят в область определения функции. Поэтому точка максимума  $x = -1$  (см. рис. 189). Вычислим  $f(-1) = -3 - 5 + 30 + 1 = 23$ .

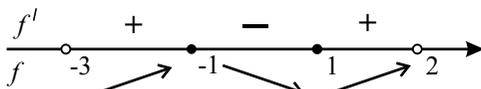


Рис. 189.

Ответ: 23.

**861.** Найдём область определения функции  $f(x)$ :  $\begin{cases} 4x + 11 > 0, \\ 3x^2 - 1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{11}{4}, \\ x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ или } x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases} \quad x \in \left(-\frac{11}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right).$$

Преобразуем исходную функцию:  $f(x) = x^2(3x^2 - 1) + x^2(4x + 11) = x^2(3x^2 + 4x + 10)$ ,

$$f'(x) = 2x(3x^2 + 4x + 10) + x^2(6x + 4) = 4x(3x^2 + 3x + 5).$$

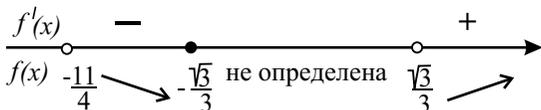


Рис. 190.

Так как  $3x^2 + 3x + 5 > 0$  для любых  $x$  ( $D < 0$ ), то, с учётом области определения, будем иметь  $x \in \left(-\frac{11}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$  (см. рис. 190).

Ответ:  $\left(-\frac{11}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ .

**862.**  $D(f): x > 1$ . При  $x \in D(f)$ ,  $f(x) = \frac{3^{\frac{3}{2} \log_3(x-1)}(x-2)^2(x^2-12)}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}(x-2)^2(x^2-12)}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} = (x-2)^2(x^2-12)$ . Найдём стационарные точки:  $f'(x) = 2(x-2)(x^2-12) + (x-2)^2 \cdot 2x = 4x^3 - 12x^2 - 16x + 48 = 4(x^2(x-3) - 4(x-3)) = 4(x-3)(x^2-4)$ . Уравнение  $4(x-3)(x^2-4) = 0$  имеет корни  $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = -2$ , причём  $x_3 \notin D(f)$ .

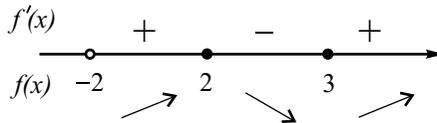


Рис. 191.

Из рисунка 191 следует, что  $x = 3$  — точка минимума и  $f(3) = -3$ .

*Ответ:*  $-3$ .

**863.**  $D(f): x > 1$ . При  $x \in D(f)$ ,  $f(x) = 3x^4 - 16x^3 - 6x^2 + 48x + 16$ . Найдём стационарные точки:  $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 - 12x + 48 = 12(x^3 - 4x^2 - x + 4) = 12(x^2(x-4) - (x-4)) = 12(x^2-1)(x-4)$ . Корни уравнения  $(x^2-1)(x-4) = 0$  есть  $x_{1,2} = \pm 1, x_3 = 4$ .  $x_1$  и  $x_2$  не входят в область определения. Значит  $x = 4$  точка минимума (см. рис. 192),  $f(4) = -144$ .

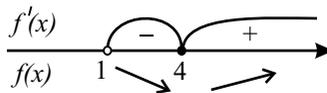


Рис. 192.

*Ответ:*  $-144$ .

**864.** Найдём область определения функции:  $\begin{cases} 2-x > 0; \\ \frac{2x^3-12x}{(x-2)^3} \geq 0. \end{cases}$  Применяя метод интервалов, получим  $\begin{cases} 0 \leq x < 2, \\ x \leq -\sqrt{6}, \end{cases}$  (см. рис. 193). На области определения  $f(x) = (2-x)^3 \cdot \frac{2x^3-12x}{(x-2)^3} = 12x - 2x^3, f'(x) = 12 - 6x^2$ .

У функции единственная точка экстремума  $x = \sqrt{2}$ , так как  $x = -\sqrt{2}$  не входит в  $D(f)$ .  $x = \sqrt{2}$  является точкой максимума.  $f(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$ .

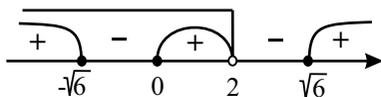


Рис. 193.

Ответ:  $8\sqrt{2}$ .

865. Найдём область определения функции:  $\begin{cases} 10 - x > 0; \\ \frac{x^3 - 27x}{(10 - x)^5} \geq 0. \end{cases}$  Применяя метод интервалов, получим  $x \in [-\sqrt{27}; 0] \cup [\sqrt{27}; 10)$  (см. рис. 194). При  $x \in D(f)$ ,  $f(x) = x^3 - 27x$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 27$ . У функции  $f(x)$  един-

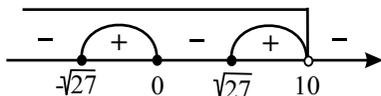


Рис. 194.

ственная точка экстремума  $x = -3$ , так как  $3 \notin D(f)$ .  $x = -3$  является точкой максимума.  $f(-3) = 54$ .

Ответ: 54.

866.  $D(g): \begin{cases} x + 1 > 0, \\ 1 - x > 0; \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 1$ .

$$g(x) = 5^{-\log_5(1-x^2)} + \log_3 3^{(x^2+1)} = \frac{2-x^4}{1-x^2};$$

$$g'(x) = \frac{-4x^3(1-x^2) + 2x(2-x^4)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x(x^4-2x+2)}{(1-x^2)^2}. \quad g'(x) = 0 \text{ при } x = 0, x = -1, x = 1 \text{ (см. рис. 195).}$$



Рис. 195.

С учётом области определения делаем вывод, что  $x = 0$  — точка минимума.  $g(0) = \frac{2-0}{1-0} = 2$ .

Ответ: 2.

**867.**  $D(g)$ :  $-0,5 < x < 0,5$ . При  $x \in D(g)$ ,  $g(x) = \frac{1}{1-4x^2} - (4x^2 + 1) =$   
 $= \frac{16x^4}{1-4x^2}$ ;  $g'(x) = \frac{64x^3(1-2x^2)}{(1-4x^2)^2}$ . У функции единственная точка эк-

стремума  $x = 0$  (так как  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  не входят в область определения),  
 $x = 0$  — точка минимума.  $g(0) = 0$ .

Ответ: 0.

**868.** 1) Область определения функции — все  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , в которых  
 $\sin x + \cos x > 0$ . Тогда  $4^{\log_2(\sin x + \cos x)} =$   
 $= (2^{\log_2(\sin x + \cos x)})^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$ .

2) Найдём точки экстремума функции  $f(x) = 1 + \sin 2x$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  
 $\sin x + \cos x > 0$ .  $f'(x) = 2 \cos 2x = 0$  при  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in Z$ . Из этого  
множества только  $x_1 = \frac{\pi}{4}$  и  $x_2 = -\frac{\pi}{4}$  попадают в интервал  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Но  $\sin x_2 + \cos x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ . Значит,  $x_2$  не принадлежит области  
определения.

3) Найдём значение  $f(x)$  в точке  $x = \frac{\pi}{4}$ .  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2$ .

Ответ: 2.

**869.** 1) Область определения функции — все  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ , в которых  
 $\sin x - \cos x > 0$ . Тогда  $4^{\log_2(\sin x - \cos x)} = (2^{\log_2(\sin x - \cos x)})^2 =$   
 $= (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = 1 - \sin 2x$ .

2) Найдём точки экстремума функции  $f(x) = 1 - \sin 2x$ ,  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ,  
 $\sin x - \cos x > 0$ .  $f'(x) = -2 \cos 2x = 0$  при  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in Z$ . Из этого

множества только  $x_1 = \frac{3\pi}{4}$  и  $x_2 = \frac{5\pi}{4}$  попадают в интервал  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ . Но  $\sin x_2 - \cos x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ . Значит,  $x_2$  не принадлежит области определения. Тогда  $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 - \sin \frac{3\pi}{2} = 2$ .

Ответ: 2.

$$870. D(f): \begin{cases} \frac{x+7}{x(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})} > 0, \\ x+7 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3} < x < 0, \\ x > 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

При  $x \in D(f)$   $f(x) = 17^{\log_{17} \frac{x^3-12x}{x+7} \cdot (x+7)}$ ,  $f(x) = x^3 - 12x$ .  
 $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$ . Найдём стационарные точки:  $x = 2$ ,  $x = -2$ .  
 $x = 2 \notin D(f)$ . Из рисунка 196 видно  $x = -2$  точка максимума. Тогда  $f(-2) = 16$ .

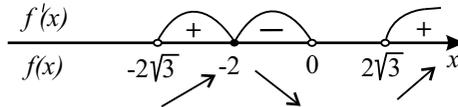


Рис. 196.

Ответ: 16.

$$871. D(f): \begin{cases} \frac{x+7}{x^3-21x} > 0, \\ x+7 > 0. \end{cases} \quad -\sqrt{21} < x < 0, x > \sqrt{21}.$$

При  $x \in D(f)$   $f(x) = 11^{\log_{11}(x+7) \cdot \frac{x^3-21x}{x+7}}$ ,  $f(x) = x^3 - 21x$ .  
 $f'(x) = 3x^2 - 21 = 3(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$ . Стационарные точки.  $f'(x) = 0$ ,  
 $x = \sqrt{7}$ ,  $x = -\sqrt{7}$ .  $\sqrt{7} \notin D(f)$ . Точки экстремума. Из рисунка 197 видно:  
 $x = -\sqrt{7}$  — точка максимума. Тогда  $f(-\sqrt{7}) = 14\sqrt{7}$ .

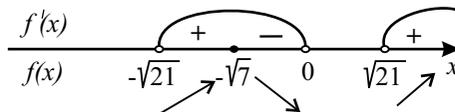


Рис. 197.

Ответ:  $14\sqrt{7}$ .

872. Область определения функции:

$$\begin{cases} \frac{1-x^2}{x+2} > 0, \\ x+2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)(1+x) > 0, \\ x+2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Преобразуем функцию:  $y = 2^{\log_2 \frac{(1-x^2)(x+2)}{x+2}} = 1 - x^2$ . Для нахождения интервалов возрастания функции найдём производную  $y'$  и определим её знаки:  $y' = -2x$ . С учётом области определения делаем вывод: функция возрастает при  $x \in (-1; 0)$  (см. рис. 198).

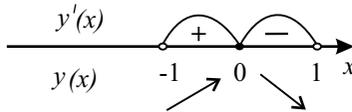


Рис. 198.

Ответ:  $(-1; 0)$ .

873. Найдём  $D(f)$ :  $\begin{cases} x+4 > 0, \\ x^3 - 12x > 0; \end{cases} x \in (-2\sqrt{3}; 0) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$ .

$$\text{При } x \in D(f) \quad f(x) = 3e^{\ln \frac{(x+4)^2}{x^3-12x} + \ln \frac{1}{(x+4)^2}} = 3e^{\ln \frac{1}{x^3-12x}} = \frac{3}{x^3-12x}.$$

Найдём стационарные точки  $f(x)$ :

$$f'(x) = -\frac{3(3x^2-12)}{(x^3-12x)^2} = -\frac{9(x-2)(x+2)}{x^2(x-2\sqrt{3})^2(x+2\sqrt{3})^2}.$$

Уравнение  $-\frac{9(x-2)(x+2)}{x^2(x-2\sqrt{3})^2(x+2\sqrt{3})^2} = 0$  имеет корни  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 2$ , причём  $x_2 \notin D(f)$ .

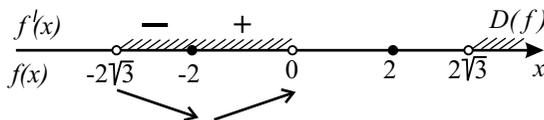


Рис. 199.

Из рисунка 199 следует, что  $x = -2$  — точка минимума. Тогда  $f(-2) = \frac{3}{16}$ .

Ответ:  $\frac{3}{16}$ .

$$874. \text{ Найдём } D(f). \begin{cases} x+3 > 0, \\ \frac{x+3}{3x-x^2} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ 3x-x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x^2 - 3x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ 0 < x < 3; \end{cases}$$

Функция примет вид  $f(x) = 3x - x^2$ , где  $0 < x < 3$ .  $f'(x) = 3 - 2x$ .

$y = f(x)$  возрастает на  $\left(0; \frac{3}{2}\right)$  (см. рис. 200).

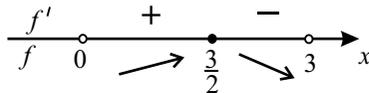


Рис. 200.

Ответ:  $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ .

$$875. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} (x+3)^2(x+5)(1-x) > 0, \\ 2(x+5) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-5; -3) \cup (-3; 1).$$

$$\text{Тогда } f(x) = 9 \log_3 \frac{(x+3)^2(x+5)(1-x)}{2(x+5)} = \log_3 \frac{(x+3)^2(1-x)}{2};$$

$$f'(x) = -\frac{3x^2 + 10x + 3}{(x+3)^2(1-x) \ln 3} = -\frac{3(x+3)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{(x+3)^2(1-x) \ln 3}. \text{ Найдём точки}$$

$$\text{экстремума: } x = -\frac{1}{3}. f\left(-\frac{1}{3}\right) = \log_3 \frac{64 \cdot 4}{2 \cdot 9 \cdot 3} = \log_3 \frac{128}{27} = 7 \log_3 2 - 3.$$

Ответ:  $7 \log_3 2 - 3$ .

$$876. 1. |3x+2| \leq 2; -2 \leq 3x+2 \leq 2; -4 \leq 3x \leq 0; -\frac{4}{3} \leq x \leq 0.$$

$$2. f'(x) = -8(9x^2 + 3x - 2)(18x + 3). f'(x) = 0 \text{ при } x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3},$$

$$x_3 = -\frac{1}{6}. x_1, x_3 \in \left(-\frac{4}{3}; 0\right), x_2 \notin \left(-\frac{4}{3}; 0\right).$$

3. Из чисел  $f\left(-\frac{4}{3}\right) = -400$ ,  $f(0) = -16$ ,  $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$  и

$f\left(-\frac{1}{6}\right) = -20,25$  наименьшим является число  $-400$ .

Ответ:  $-400$ .

**877.**  $f(x) = 3 \cos^4 x + 4 \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 6$ . Функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[0; \pi]$  и дифференцируема в интервале  $(0; \pi)$ . Найдём стационарные точки.

$$f'(x) = 12 \cos^3 x \cdot (-\sin x) + 12 \cos^2 x \cdot (-\sin x) - 24 \cos x \cdot (-\sin x);$$

$$f'(x) = 0; -12 \sin x \cos x (\cos^2 x + \cos x - 2) = 0;$$

$$\sin x \cos x (\cos x + 2)(\cos x - 1) = 0; \sin x \cos x (\cos x - 1) = 0; \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 0, \\ \cos x = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \text{На интервале } (0; \pi) \text{ единственная стационарная}$$

точка  $x = \frac{\pi}{2}$ . Найдём значения функции на концах отрезка и в стационар-

ной точке.  $f(0) = 3 + 4 - 12 + 6 = 1$ ;  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$ ;  $f(\pi) = 3 - 4 - 12 + 6 = -7$ .

Наибольшее значение  $f(x)$  на отрезке  $[0; \pi]$  равно 6, наименьшее —  $-7$ .

Ответ: 6;  $-7$ .

**878.** Перефразируем задачу. Найдём все  $p$ , при которых уравнение имеет хотя бы один корень. Тогда при остальных  $p$  оно корней не имеет.

$4 \sin^3 x + 3 \cos 2x + p = 0$ . Преобразуем данное уравнение:

$$4 \sin^3 x + 3(1 - 2 \sin^2 x) + p = 0. \sin x = t, t \in [-1; 1]. 4t^3 - 6t^2 + 3 + p = 0,$$

$$-4t^3 + 6t^2 - 3 = p. \text{ Обозначим } f(t) = -4t^3 + 6t^2 - 3. \text{ Найдём множество}$$

значений  $f(t)$  на  $[-1; 1]$ .  $f'(t) = -12t^2 + 12t$ ,  $f'(t) = 0$ ,  $-12(t^2 - t) = 0$ ;

$$t_1 = 0, t_2 = 1. f(0) = -3, f(1) = -4 + 6 - 3 = -1, f(-1) = 4 + 6 - 3 = 7.$$

$E(f(t)) = [-3; 7]$ . Чтобы уравнение имело хотя бы один корень, необходимо и достаточно  $p \in E(f)$ , то есть  $p \in [-3; 7]$ , а чтобы уравнение не имело корней —  $p \in (-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$ .

**879.**  $p \cdot \operatorname{ctg}^2 x + 4 \sin x + p = 7$ . Преобразуем уравнение:

$$p \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) + 4 \sin x + p = 7. \text{ Обозначим } \sin x = t, t \in [-1; 0) \cup (0; 1].$$

$\frac{p}{t^2} - p + 4t + p = 7$ ,  $p - pt^2 + 4t^3 + pt^2 = 7t^2$ ,  $-4t^3 + 7t^2 = p$ . Обозначим  $f(t) = -4t^3 + 7t^2$ . Найдём множество значений  $f(t)$  на  $t \in [-1; 0) \cup (0; 1]$   
 $f'(t) = -12t^2 + 14t$ ,  $f'(t) = 0$ ,  $-2(6t^2 - 7t) = 0$ ,  $t(6t - 7) = 0$ ;  $t_1 = 0$ ,  
 $0 \notin [-1; 0) \cup (0; 1]$ ;  $t_2 = \frac{7}{6}$ ,  $\frac{7}{6} \notin [-1; 0) \cup (0; 1]$ . При  $t \rightarrow 0$   $f(t) \rightarrow 0$ ;  
 $f(1) = 3$ ,  $f(-1) = 11$ , При  $t \in [-1; 0)$   $E(f) = (0; 11]$ , так как  $f(t)$  непрерывна на  $[-1, 0)$ . При  $t \in (0; 1]$   $E(f) = (0; 3]$ , так как  $f(t)$  непрерывна на  $(0; 1]$ , то есть  $E(f) = (0; 11]$ . Чтобы уравнение  $-4t^3 + 7t^2 = p$  имело хотя бы один корень (а следовательно и исходное уравнение), необходимо и достаточно  $p \in (0; 11]$ .

*Ответ:*  $(0; 11]$ .

**880.** Переформулируем задачу. Найдём все  $p$ , при которых уравнение имеет хотя бы один корень. Тогда при остальных  $p$  уравнение корней не имеет.  
 $8 \sin^3 x + 7 \cos 2x + p = 0$ ,  $8 \sin^3 + 7(1 - 2 \sin^2 x) + p = 0$ ,  
 $8 \sin^3 + 7 - 14 \sin^2 x + p = 0$ .  $\sin x = t$ ,  $t \in [-1; 1]$ .  $8t^3 - 14t^2 + 7 + p = 0$ ,  
 $-8t^3 + 14t^2 - 7 = p$ . Обозначим  $f(t) = -8t^3 + 14t^2 - 7$ . Найдём множество значений  $f(t)$  на  $[-1; 1]$ .  $f'(t) = -24t^2 + 28t$ ,  $f'(t) = 0$ ,  
 $-4t(6t - 7) = 0$ ;  $t_1 = 0$ ,  $0 \in [-1, 1]$ ;  $t_2 = \frac{7}{6}$ ,  $\frac{7}{6} \notin [-1; 1]$ .  $f(0) = -7$ ,  
 $f(1) = -8 + 14 - 7 = -1$ ,  $f(-1) = 8 + 14 - 7 = 15$ .  $E(f) = [-7; 15]$ .  
Чтобы уравнение имело хотя бы один корень, необходимо и достаточно  $p \in E(f)$ , то есть  $p \in [-7; 15]$ , а чтобы уравнение не имело корней —  $p \in (-\infty; -7) \cup (15; +\infty)$ .

*Ответ:*  $(-\infty; -7) \cup (15; +\infty)$ .

**881.**  $3\sqrt{x+1} + 1 = 2k - k\sqrt{x+1}$ . ОДЗ:  $x \geq -1$ .  $\sqrt{x+1}(3+k) = 2k - 1$ .  
1 случай:  $3 + k = 0$ ,  $k = -3$ . Тогда  $2k - 1 = -6 - 1 = -7$ . При  $k = -3$  левая часть полученного уравнения равна 0, а правая не равна 0. Корней нет.  $k = -3$  удовлетворяет условию задачи.

2 случай:  $3 + k \neq 0$ ,  $\sqrt{x+1} = \frac{2k-1}{3+k}$ . Это уравнение не имеет корней, если  $\frac{2k-1}{3+k} < 0$ ;  $-3 < k < \frac{1}{2}$ . Учитывая случай 1, имеем: уравнение не имеет корней при  $k \in \left[-3; \frac{1}{2}\right)$ .

*Ответ:*  $\left[-3; \frac{1}{2}\right)$ .

$$882. t \cos 5x - 5 = 4t - 3 \cos 5x.$$

Преобразуем данное уравнение:  $\cos 5x(t + 3) = 4t + 5$ .

1) при  $t + 3 = 0$ ,  $t = -3$ , последнее уравнение обращается в неверное равенство  $0 = -7$ , то есть при  $t = -3$  данное уравнение не имеет корней.

2)  $t + 3 \neq 0$ ,  $t \neq -3$ . Тогда  $\cos 5x = \frac{4t + 5}{t + 3}$ ;  $E(\cos 5x) = [-1; 1]$ . Уравнение

в этом случае не имеет корней при  $\frac{4t + 5}{t + 3} > 1$ ,  $\frac{4t + 5}{t + 3} < -1$ .

$$a) \frac{4t + 5}{t + 3} > 1, \frac{4t + 5 - t - 3}{t + 3} > 0, \frac{3t + 2}{t + 3} > 0; t > -\frac{2}{3}, t < -3.$$

$$b) \frac{4t + 5}{t + 3} < -1, \frac{4t + 5 + t + 3}{t + 3} < 0, \frac{5t + 8}{t + 3} < 0, -3 < t < -\frac{8}{5}.$$

Отметим на числовой оси значения  $t$  в случае 2 (см. рис. 201).

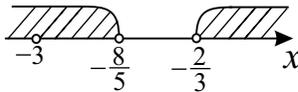


Рис. 201.

Объединяя результат с  $t = -3$ , получим  $t < -\frac{8}{5}$ ,  $t > -\frac{2}{3}$ . Понятно, что  $t = -2$  — наибольшее целое отрицательное.

Ответ:  $-2$ .

$$883. 2 \sin^2 x - 3t = 6t \sin^2 x + 1.$$

Преобразуем данное уравнение:  $\sin^2 x(2 - 6t) = 1 + 3t$ .

1) При  $2 - 6t = 0$ ,  $t = \frac{1}{3}$ , последнее уравнение обращается в неверное равенство  $0 = 2$ , то есть при  $t = \frac{1}{3}$  уравнение не имеет корней.

2) При  $2 - 6t \neq 0$ ,  $t \neq \frac{1}{3}$ , тогда  $\sin^2 x = \frac{1 + 3t}{2 - 6t}$ . Так как  $E(\sin^2 x) = [0; 1]$ ,

то данное уравнение не имеет корней при  $\frac{1 + 3t}{2 - 6t} > 1$ ,  $\frac{1 + 3t}{2 - 6t} < 0$ .

$$a) \frac{1 + 3t}{2 - 6t} > 1, \frac{1 + 3t - 2 + 6t}{2 - 6t} > 0, \frac{9t - 1}{2 - 6t} > 0, \frac{1}{9} < t < \frac{1}{3}.$$

$$b) \frac{1 + 3t}{2 - 6t} < 0, t < -\frac{1}{3}, t > \frac{1}{3}.$$

Отметим на числовой прямой (см. рис. 202).

Объединяя полученные значения  $t$ , получим  $t < -\frac{1}{3}$ ,  $t > \frac{1}{9}$ . Наименьшее

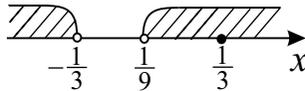


Рис. 202.

чётное натуральное:  $t = 2$ .

Ответ: 2.

**884.**  $4t \cos^2 x + 1 = 5t - 5 \cos^2 x$ .

Преобразуем данное уравнение:  $\cos^2 x(4t + 5) = 5t - 1$ .

1) при  $4t + 5 = 0$ ,  $t = -\frac{5}{4}$  последнее уравнение обращается в неверное равенство  $0 = -\frac{29}{4}$ , то есть при  $t = -\frac{5}{4}$  данное уравнение не имеет корней.

2)  $4t + 5 \neq 0$ ,  $t \neq -\frac{5}{4}$ , тогда  $\cos^2 x = \frac{5t - 1}{4t + 5}$ . Так как  $E(\cos^2 x) = [0; 1]$ ,

то данное уравнение не имеет корней при  $\frac{5t - 1}{4t + 5} > 1$ ,  $\frac{5t - 1}{4t + 5} < 0$ .

a)  $\frac{5t - 1}{4t + 5} > 1$ ,  $\frac{5t - 1 - 4t - 5}{4t + 5} > 0$ ,  $\frac{t - 6}{4t + 5} > 0$ ,  $t < -\frac{5}{4}$ ,  $t > 6$ .

b)  $\frac{5t - 1}{4t + 5} < 0$ ,  $-\frac{5}{4} < t < \frac{1}{5}$ . Отметим на числовой прямой (см. рис. 203).

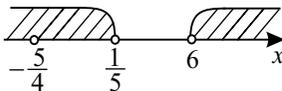


Рис. 203.

Объединяя с  $t = -\frac{5}{4}$ , получим  $t < \frac{1}{5}$ ,  $t > 6$ . Наименьшее натуральное  $t = 7$ .

Ответ: 7.

**885.**  $\log_{x^2+3}(2ax^2 + 1 - a) = 2$ . Данное уравнение равносильно уравнению  $2ax^2 + 1 - a = (x^2 + 3)^2$ . Отметим, что если  $x_0$  является корнем, то  $-x_0$  также является корнем. Отсюда  $x_0 = -x_0$ ,  $2x_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ . Таким об-

разом, необходимым условием единственности корня является равенство его нулю. Найдём  $a$ :  $2a^2 \cdot 0^2 + 1 - a = (0^2 + 3)^2$ ,  $1 - a = 9$ ,  $a = -8$ . Проверка:  $a = -8$ .  $\log_{x^2+3}(-16x^2 + 1 + 8) = 2$   $-16x^2 + 9 = (x^2 + 3)^2$ ,  $-16x^2 + 9 = x^4 + 6x^2 + 9$ ,  $x^4 + 22x^2 = 0$ ,  $x^2(x^2 + 22) = 0$ ;  $x_1 = 0$ ,  $x^2 + 22 \neq 0$ .  $x = 0$  — единственный корень.

Ответ:  $-8$ .

**886.**  $\log_{2a+1}(6ax - x^2) = 2$ . Данное уравнение равносильно уравнению  $6ax - x^2 = (2a+1)^2$ ,  $6ax - x^2 = 4a^2 + 4a + 1$ ,  $x^2 - 6ax + 4a^2 + 4a + 1 = 0$ . Оно имеет один корень если  $D = 0$ .  $D = 36a^2 - 16a^2 - 16a - 4$ ,  $20a^2 - 16a - 4 = 0$ ,  $5a^2 - 4a - 1 = 0$ . Так как  $5 - 4 - 1 = 0$ , то  $a_1 = 1$ ;  $a_2 = -\frac{1}{5}$ .

Проверка:

$$1) a = 1. \log_3(6x - x^2) = 2, 6x - x^2 = 9, x^2 - 6x + 9 = 0, (x - 3)^2 = 0, x = 3.$$

$$2) a = -\frac{1}{5}. \log_{\frac{3}{5}}(-\frac{6}{5}x - x^2) = 2, -\frac{6}{5}x - x^2 = \frac{9}{25}, x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = 0, (x + \frac{3}{5})^2 = 0, x = -\frac{3}{5}.$$

Ответ:  $1; -\frac{1}{5}$ .

**887.** Необходимо найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $\cos^2 x + (5 - 2a) \sin x = 7 - 7a - 3a^2$  не имеет корней. Сформулируем задачу иначе: найдем те значения параметра  $a$ , при которых уравнение имеет корни, тогда при остальных  $a$  корней нет.

$$1 - \sin^2 x + (5 - 2a) \sin x - 7 + 7a + 3a^2 = 0,$$

$$\sin^2 x - (5 - 2a) \sin x + 6 - 7a - 3a^2 = 0. \text{ Замена: } \sin x = t, |t| \leq 1, t^2 - (5 - 2a)t + 6 - 7a - 3a^2 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{(5 - 2a) \pm \sqrt{25 - 20a + 4a^2 - 24 + 28a + 12a^2}}{2},$$

$$t_{1,2} = \frac{(5 - 2a) \pm \sqrt{16a^2 + 8a + 1}}{2} = \frac{(5 - 2a) \pm |4a + 1|}{2}.$$

Уравнение имеет корни, если  $\left| \frac{(5 - 2a) + |4a + 1|}{2} \right| \leq 1$  или

$$\left| \frac{(5 - 2a) - |4a + 1|}{2} \right| \leq 1.$$

$$1) -1 \leq \frac{5 - 2a + |4a + 1|}{2} \leq 1, \quad -2 \leq 5 - 2a + |4a + 1| \leq 2,$$

$$\begin{cases} 5 - 2a + |4a + 1| \geq -2, \\ 5 - 2a + |4a + 1| \leq 2. \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 4a + 1 \geq 0, \\ 5 - 2a + 4a + 1 \geq -2, \\ 5 - 2a + 4a + 1 \leq 2; \end{cases} \begin{cases} a \geq -\frac{1}{4}, \\ 2a \geq -8, \\ 2a \leq -4; \end{cases} \begin{cases} a \geq -\frac{1}{4}, \\ a \geq -4, \\ a \leq -2. \end{cases} \quad \text{Решений нет.}$$

$$b) \begin{cases} 4a + 1 < 0, \\ 5 - 2a - 4a - 1 \geq -2, \\ 5 - 2a - 4a - 1 \leq 2; \end{cases} \begin{cases} a < -\frac{1}{4}, \\ -6a \geq -6, \\ -6a \leq -2; \end{cases} \begin{cases} a < -\frac{1}{4}, \\ a \leq 1, \\ a \geq \frac{1}{3}. \end{cases} \quad \text{Решений нет.}$$

$$2) -1 \leq \frac{5 - 2a - |4a + 1|}{2} \leq 1, \quad -2 \leq 5 - 2a - |4a + 1| \leq 2,$$

$$\begin{cases} 5 - 2a - |4a + 1| \geq -2, \\ 5 - 2a - |4a + 1| \leq 2. \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 4a + 1 \geq 0, \\ 5 - 2a - 4a - 1 \geq -2, \\ 5 - 2a - 4a - 1 \leq 2; \end{cases} \begin{cases} a \geq -\frac{1}{4}, \\ -6a \geq -6, \\ -6a \leq -2; \end{cases} \begin{cases} a \geq -\frac{1}{4}, \\ a \leq 1, \\ a \geq \frac{1}{3}; \end{cases} \quad \frac{1}{3} \leq a \leq 1.$$

$$b) \begin{cases} 4a + 1 < 0, \\ 5 - 2a + 4a + 1 \geq -2, \\ 5 - 2a + 4a + 1 \leq 2; \end{cases} \begin{cases} a < -\frac{1}{4}, \\ 2a \geq -8, \\ 2a \leq -4; \end{cases} \begin{cases} a < -\frac{1}{4}, \\ a \geq -4, \\ a \leq -2; \end{cases} \quad -4 \leq a \leq -2.$$

Уравнение не имеет корней, если  $a < -4$  или  $-2 < a < \frac{1}{3}$ , или  $a > 1$ .

Ответ:  $(-\infty; -4) \cup \left(-2; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$ .

**888.** Необходимо найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $5a \cos x - 2 \sin^2 x = 3a^2 + 7a$  не имеет корней. Сформулируем задачу иначе: найдем все значения параметра  $a$ , при которых уравнение имеет корни, тогда при остальных  $a$  корней нет.

$$5a \cos x - 2(1 - \cos^2 x) = 3a^2 + 7a,$$

$$2 \cos^2 x + 5a \cos x - 2 - 3a^2 - 7a = 0, \quad \text{Замена: } \cos x = t, \quad |t| \leq 1.$$

$$2t^2 + 5at - 2 - 3a^2 - 7a = 0; t_{1,2} = \frac{-5a \pm \sqrt{25a^2 + 16 + 24a^2 + 56a}}{4},$$

$$t_{1,2} = \frac{-5a \pm |7a + 4|}{4}. \text{ Уравнение имеет корни, если } \left| \frac{-5a + |7a + 4|}{4} \right| \leq 1$$

$$\text{или } \left| \frac{-5a - |7a + 4|}{4} \right| \leq 1.$$

$$1) -1 \leq \frac{-5a + |7a + 4|}{4} \leq 1, \quad -4 \leq -5a + |7a + 4| \leq 4.$$

$$\begin{cases} -5a + |7a + 4| \geq -4, \\ -5a + |7a + 4| \leq 4. \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 7a + 4 \geq 0, \\ -5a + 7a + 4 \geq -4, \\ -5a + 7a + 4 \leq 4; \end{cases} \begin{cases} a \geq -\frac{4}{7}, \\ 2a \geq -8, \\ 2a \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq -\frac{4}{7}, \\ a \geq -4, \\ a \leq 0; \end{cases} \quad -\frac{4}{7} \leq a \leq 0.$$

$$b) \begin{cases} 7a + 4 < 0, \\ -5a - 7a - 4 \geq -4, \\ -5a - 7a - 4 \leq 4; \end{cases} \begin{cases} a < -\frac{4}{7}, \\ -12a \geq 0, \\ -12a \leq 8; \end{cases} \begin{cases} a < -\frac{4}{7}, \\ a \leq 0, \\ a \geq \frac{2}{3}. \end{cases} \quad \text{Решений нет.}$$

$$2) -1 \leq \frac{-5a - |7a + 4|}{4} \leq 1, \quad -4 \leq -5a - |7a + 4| \leq 4,$$

$$\begin{cases} -5a - |7a + 4| \geq -4, \\ -5a - |7a + 4| \leq 4. \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 7a + 4 \geq 0, \\ -5a - 7a - 4 \geq -4, \\ -5a - 7a - 4 \leq 4; \end{cases} \begin{cases} a \geq -\frac{4}{7}, \\ -12a \geq 0, \\ -12a \leq 8; \end{cases} \begin{cases} a \geq -\frac{4}{7}, \\ a \leq 0, \\ a \geq \frac{2}{3}. \end{cases} \quad \text{Решений нет.}$$

$$b) \begin{cases} 7a + 4 < 0, \\ -5a + 7a + 4 \geq -4, \\ -5a + 7a + 4 \leq 4; \end{cases} \begin{cases} a < -\frac{4}{7}, \\ 2a \geq -8, \\ 2a \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a < -\frac{4}{7}, \\ a \geq -4, \\ a \leq 0; \end{cases} \quad -4 \leq a \leq -\frac{4}{7}.$$

Уравнение имеет корни, если  $-4 \leq a \leq 0$ , значит уравнение не имеет корней, если  $a < -4$  или  $a > 0$ .

Ответ:  $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ .

889. Переформулируем задачу и найдём те положительные значения  $x$ , которые удовлетворяют данному неравенству. Заметим, что знаменатель дроби  $f(\log_{\frac{1}{3}}(3x) \log_3 x^4) + f(2 - 13 \log_3 x) < 0$  как сумма двух отрицательных чисел. Тогда могут представиться два случая:

$$1) \begin{cases} x > 0, \\ f(\log_{\frac{1}{3}}(3x) \log_3 x^4) - f(2 - 13 \log_3 x) \leq 0, \\ f(6 \cdot 49^x + 20 \cdot 7^x) - f(3 \cdot 7^x - 15) > 0. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство системы.

а)  $f(\log_{\frac{1}{3}}(3x) \log_3 x^4) \leq f(2 - 13 \log_3 x)$ . В силу возрастания функции  $f(x)$  имеем:  $\log_{\frac{1}{3}}(3x) \log_3 x^4 \leq 2 - 13 \log_3 x$ ,

$(-1 - \log_3 x)4 \log_3 |x| \leq 2 - 13 \log_3 x$ , так как  $x > 0$ , то

$4 \log_3^2 x - 9 \log_3 x + 2 \geq 0$ . Замена:  $\log_3 x = t$ ,  $4t^2 - 9t + 2 \geq 0$ ,

$4t^2 - 9t + 2 = 0$ ,  $t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8}$ ,  $t_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{8}$ ;  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = \frac{1}{4}$ .

Вернёмся к замене:  $\log_3 x \geq 2$ ,  $x \geq 9$ .  $\log_3 x \leq \frac{1}{4}$ ,  $0 < x \leq \sqrt[4]{3}$ .

б)  $f(6 \cdot 49^x + 20 \cdot 7^x) - f(3 \cdot 7^x - 15) > 0$ ,  $f(6 \cdot 49^x + 20 \cdot 7^x) > f(3 \cdot 7^x - 15)$ .

В силу возрастания функции  $f(x)$  имеем:  $6 \cdot 49^x + 20 \cdot 7^x > 3 \cdot 7^x - 15$ ,

$6 \cdot 7^{2x} + 17 \cdot 7^x + 15 > 0$ . Замена:  $7^x = t$ ,  $t > 0$   $6t^2 + 17t + 15 > 0$ ,

$6t^2 + 17t + 15 = 0$ ,  $D < 0$ , действительных корней нет. Старший коэффициент квадратного трёхчлена положительный, неравенство

$6t^2 + 17t + 15 > 0$  верно при любых значениях  $t > 0$ . Тогда неравенство

$6 \cdot 7^{2x} + 17 \cdot 7^x + 15 > 0$  выполняется при любых значениях  $x$ .

Решение системы (1):  $(0; \sqrt[4]{3}] \cup [9; +\infty)$ .

$$2) \begin{cases} x > 0, \\ f(\log_{\frac{1}{3}}(3x) \log x) - f(2 - 13 \log_3 x) \geq 0, \\ f(6 \cdot 49^x + 20 \cdot 7^x) - f(3 \cdot 7^x - 15) < 0, \end{cases} \quad \text{— система не имеет ре-$$

шений. Итак, положительные значения  $x$ , которые удовлетворяют данному неравенству:

$(0; \sqrt[4]{3}] \cup [9; +\infty)$ , тогда все положительные  $x$ , не удовлетворяющие неравенству, принадлежат промежутку  $(\sqrt[4]{3}; 9)$ .

Ответ:  $(\sqrt[4]{3}; 9)$ .

890. Если наименьшее из чисел  $b = 2^{-6t} - 5 \cdot 2^{-2t} \cdot (2^{-t} + 2^{2t})$  и

$c = -2^{6t} + 6 \cdot 2^{3t} + 7$  не меньше  $-9$ , то справедливы оба неравенства  $b \geq -9$  и  $c \geq -9$ . Тогда искомое значение параметра получим, решив

систему неравенств:  $\begin{cases} 2^{-6t} - 5 \cdot 2^{-2t} \cdot (2^{-t} + 2^{2t}) \geq -9, \\ -2^{6t} + 6 \cdot 2^{3t} + 7 \geq -9; \end{cases}$

$$\begin{cases} 2^{-6t} - 5 \cdot 2^{-3t} + 4 \geq 0, & \begin{cases} (2^{-3t} - 4)(2^{-3t} - 1) \geq 0, \\ (2^{3t} - 8)(2^{3t} + 2) \leq 0; \end{cases} \\ 2^{6t} - 6 \cdot 2^{3t} - 16 \leq 0; \end{cases}$$

$\begin{cases} 2^{-3t} \geq 4, 2^{-3t} \leq 1, \\ -2 \leq 2^{3t} \leq 8; \end{cases}$  зная, что функция  $y = 2^x$  монотонно возрастает, и

её значения положительны, имеем:  $\begin{cases} -3t \geq 2, -3t \leq 0, \\ 3t \leq 3; \end{cases}$

$$\begin{cases} t \leq -\frac{2}{3}, t \geq 0, \\ t \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq -\frac{2}{3}, t \geq 0, \\ 0 \leq t \leq 1; \end{cases} \quad (\text{см. рис. 204}).$$

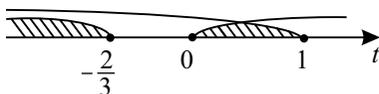


Рис. 204.

Ответ:  $(-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [0; 1]$ .

891. 1.  $\log_2(6x - 2x^2) + \log_{\frac{1}{4}}(x - 3)^2 > 1$ .

ОДЗ.  $\begin{cases} 6x - 2x^2 > 0, \\ x - 3 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 3$ . Так как  $x < 2$ , то  $0 < x < 2$ .

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ \log_2(2x(3-x)) - \log_2(3-x) > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ \log_2(2x) > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

2.  $\frac{1}{\log_4(5x + 6x^2)} > 1; \Leftrightarrow \frac{1}{\log_4(5x + 6x^2)} - 1 > 0; \Leftrightarrow$

$$\frac{1 - \log_4(5x + 6x^2)}{\log_4(5x + 6x^2)} > 0; \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \log_4(5x + 6x^2) > 0, \\ \log_4(5x + 6x^2) > 0, \\ 1 - \log_4(5x + 6x^2) < 0, \\ \log_4(5x + 6x^2) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 5x > 0, \\ 6x^2 + 5x < 4, \\ 6x^2 + 5x > 1, \\ 6x^2 + 5x > 0, \\ 6x^2 + 5x > 4, \\ 6x^2 + 5x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + \frac{4}{3})(x - \frac{1}{2}) < 0, \\ (x + 1)(x - \frac{1}{6}) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}, \\ \left[ \begin{array}{l} x < -1, \\ x > \frac{1}{6}; \end{array} \right. & \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Объединим полученные решения:  $\left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2)$ .

Ответ:  $\left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2)$ .

892. Пусть высота конической палатки  $H$ ,  $H > 0$ .  $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ , по условию  $V_{\text{к}} = \frac{4\pi}{3} \text{ м}^3$ ;  $\frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{4\pi}{3}$ ,  $R^2 H = 4$ ,  $R^2 = \frac{4}{H}$ ,  $R = \frac{2}{\sqrt{H}}$  (м);  $S_{\text{бок. кон.}} = \pi Rl$ . Из  $\triangle SOB$  (см. рис. 205) имеем:

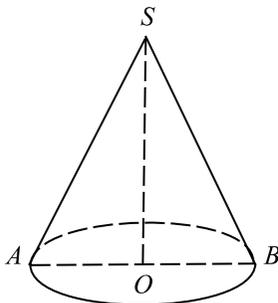


Рис. 205.

$$BS = \sqrt{R^2 + H^2} = \sqrt{\frac{4}{H} + H^2} = \sqrt{\frac{4 + H^3}{H}} \text{ (м)};$$

$$S_{\text{бок.}} = \pi \cdot \frac{2}{\sqrt{H}} \cdot \sqrt{\frac{4 + H^3}{H^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{4 + H^3}{H^2}} \text{ (м}^2\text{)}.$$

Введём функцию  $S(H) = 2\pi \sqrt{\frac{4 + H^3}{H^2}}$ . Так как  $S(H) > 0$  на интервале  $(0; +\infty)$ , то функции  $S(H)$  и  $f(H) = (S(H))^2$  принимают наименьшее значение на этом интервале в одной и той же точке. Поэтому найдём, при каком  $H$  функция  $f(H)$  принимает наименьшее значение при  $H > 0$ .

$$f(H) = 4\pi^2 \cdot \frac{4 + H^3}{H^2}, \quad f'(H) = 4\pi^2 \cdot \frac{3H^2 \cdot H^2 - 2H(4 + H^3)}{H^4},$$

$$f'(H) = 4\pi^2 \cdot \frac{H^3 - 8}{H^3}, \quad f'(H) = 0, \quad \begin{cases} H^3 - 8 = 0, \\ H^3 \neq 0; \end{cases} \quad H^3 = 8, \quad H = 2.$$

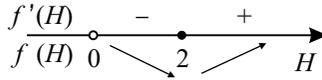


Рис. 206.

$x = 2$  точка минимума (см. рис. 206). Так как на интервале  $(0; +\infty)$   $f(H)$  имеет единственную критическую точку, и она является точкой минимума, то в ней ( $H = 2$ ) функция принимает своё наименьшее значение. Высота палатки 2 м, а радиус  $\sqrt{2}$  м.

Ответ: 2 м;  $\sqrt{2}$  м.

893. Пусть длина  $KL = x$  км,  $0 < x < 10$ , тогда  $LH = \frac{10-x}{2}$  км,

$AH = 4$  км (см. рис. 207). Из  $\triangle ALH$  имеем:  $AL = \sqrt{AH^2 + LH^2}$ ,

$$AL = \sqrt{16 + \frac{(10-x)^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{164 - 20x + x^2},$$

$$DK + KC + AL + BL + KL = 2\sqrt{164 - 20x + x^2} + x.$$

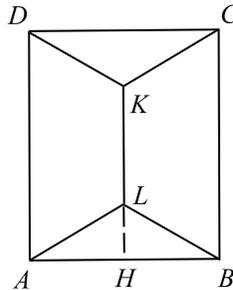


Рис. 207.

Введем функцию  $f(x) = 2\sqrt{164 - 20x + x^2} + x$ ,  $x \in (0; 10)$  и найдем её наименьшее значение на  $(0; 10)$ :

$$f'(x) = (2\sqrt{164 - 20x + x^2} + x)', \quad f'(x) = \frac{-20 + 2x}{\sqrt{164 - 20x + x^2}} + 1;$$

$$f'(x) = 0, \quad \frac{-20 + 2x}{\sqrt{164 - 20x + x^2}} = -1, \quad -2x + 20 = \sqrt{164 - 20x + x^2},$$

$$\begin{cases} 164 - 20x + x^2 = 4x^2 - 80x + 400, & \begin{cases} 3x^2 - 60x + 236 = 0, \\ x \leq 10; \end{cases} \\ -2x + 20 \geq 0; \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{192}}{3}, \quad x_1 = 10 + \frac{8\sqrt{3}}{3} \notin (0; 10), \quad x_2 = 10 - \frac{8\sqrt{3}}{3} \in (0; 10).$$

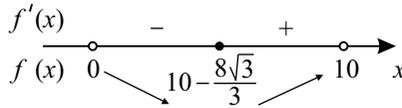


Рис. 208.

$x = 10 - \frac{8\sqrt{3}}{3}$  — точка минимума (см. рис. 208). Так как на интервале  $(0; 10)$  функция имеет единственную критическую точку, и она является точкой минимума, то в ней функция принимает свое наименьшее значение.

$$\begin{aligned} \text{Наименьшее } f(x) &= f\left(10 - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) = \\ &= 2\sqrt{164 - 20\left(10 - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) + \left(10 - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} + 10 - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \\ &= 2\sqrt{164 - 200 + \frac{160\sqrt{3}}{3} + 100 - \frac{160\sqrt{3}}{3} + \frac{64 \cdot 3}{9}} + 10 - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \\ &= 2\sqrt{64 + \frac{64 \cdot 3}{9}} + 10 - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3}\sqrt{9+3} + 10 - \frac{8\sqrt{3}}{3} = 10 + 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Общая минимальная длина пяти участков  $10 + 8\sqrt{3}$  км.

*Ответ:*  $10 + 8\sqrt{3}$  км.

**894.** Стена  $DD_1C_1C$  изготовлена из стекла (см. рис. 209). Пусть  $DC = x$  м,  $x > 0$ . Площадь  $DD_1C_1C$   $4x$  м<sup>2</sup>. Стоимость стеклянной стены  $750 \cdot 4x =$

$= 3000x$  рублей. Ширина комнаты  $AD = \frac{80}{x}$  м, площадь стен из обычного

материала  $4x + \frac{2 \cdot 80 \cdot 4}{x} = 4x + \frac{640}{x}$  (м<sup>2</sup>). Стоимость стен из обычного

материала  $500\left(4x + \frac{640}{x}\right)$  рублей. Общая стоимость постройки:

$3000x + 500\left(4x + \frac{640}{x}\right)$  рублей. Введём функцию

$f(x) = 3000x + 500\left(4x + \frac{640}{x}\right)$ ,  $x > 0$ , и найдём её наименьшее значение.

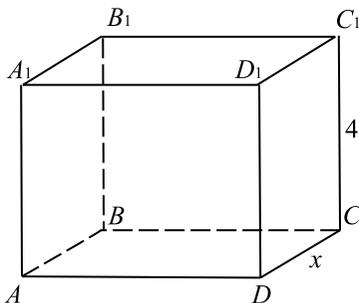


Рис. 209.

$$f'(x) = 3000 + 500 \cdot 4 - \frac{500 \cdot 640}{x^2}; \quad f'(x) = 0, \quad 3000 + 500 \cdot 4 - \frac{500 \cdot 640}{x^2} = 0,$$

$$3 + 2 - \frac{320}{x^2} = 0, \quad x^2 = 64, \quad x = 8.$$

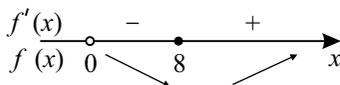


Рис. 210.

$x = 8$  — точка минимума (см. рис. 210). Так как функция  $f(x)$  на  $(0; +\infty)$  имеет единственную критическую точку, и она является точкой минимума, то в ней функция принимает наименьшее значение:

$f(8) = 3000 \cdot 8 + 500\left(4 \cdot 8 + \frac{640}{8}\right) = 24000 + 56000 = 80000$ . Наименьшая общая стоимость постройки 80000 рублей.

*Ответ:* 80000.

**895.** Велосипедист уменьшает скорость в пункте  $C$  на  $a$  км/ч

$(0 < a < 15)$ . Он едет  $\frac{2}{9}$  пути со скоростью  $(15 - a)$  км/ч. Путь от  $C$

до  $B$  равен  $S$  км.  $\frac{2}{9}$  этого пути велосипедист прошёл за  $\frac{2S}{9(15 - a)}$  часов, а

оставшийся путь  $\frac{7S}{9}$  со скоростью  $(15+2a)$  км/ч он прошёл за  $\frac{7S}{9(15+2a)}$

часа. Весь путь от  $C$  до  $B$  велосипедист прошёл за  $\frac{S}{9} \left( \frac{2}{15-a} + \frac{7}{15+2a} \right)$

часа. Введём функцию  $f(a) = \frac{S}{9} \left( \frac{2}{15-a} + \frac{7}{15+2a} \right)$ ,  $0 < a < 15$  и найдём, при каком  $a$  эта функция принимает наименьшее значение на промежутке  $(0; 15)$ .

$$f'(a) = \frac{S}{9} \left( \frac{2}{(15-a)^2} - \frac{14}{(15+2a)^2} \right) = \frac{2S}{9} \cdot \frac{(15+2a)^2 - 7(15-a)^2}{(15-a)^2(15+2a)^2}.$$

$$f'(a) = 0; (15+2a)^2 - 7(15-a)^2 = 0; (15-a)^2(15+2a) \neq 0;$$

$$(15+2a - \sqrt{7}(15-a))(15+2a + \sqrt{7}(15-a)) = 0;$$

$$(a(2 + \sqrt{7}) + 15 - 15\sqrt{7})(a(2 - \sqrt{7}) + 15 + 15\sqrt{7}) = 0.$$

$$1) a(2 + \sqrt{7}) = 15(\sqrt{7} - 1), a = \frac{15(\sqrt{7} - 1)}{2 + \sqrt{7}} = \frac{15(\sqrt{7} - 1)(2 - \sqrt{7})}{-3} =$$

$$= -5(3\sqrt{7} - 9) = 45 - 15\sqrt{7}; 45 - 15\sqrt{7} \in (0; 15). \text{ Заметим, что } a = 45 - 15\sqrt{7} \text{ удовлетворяет условию } (15-a)^2(15+2a)^2 \neq 0.$$

$$2) a = \frac{-15(1 + \sqrt{7})}{2 - \sqrt{7}} = \frac{-15(1 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{7})}{-3} = 5(9 + 3\sqrt{7}) = 45 +$$

$$+ 15\sqrt{7}, 45 + 15\sqrt{7} \notin (0; 15).$$

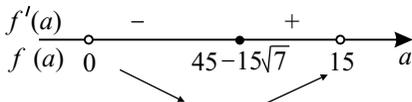


Рис. 211.

$a = 45 - 15\sqrt{7}$  — точка минимума (см. рис. 211). Так как на интервале  $(0; 15)$  функция имеет единственную критическую точку, и она является точкой минимума функции  $f(a)$ , то в ней функция принимает наименьшее значение на интервале  $(0; 15)$ .

При  $a = (45 - 15\sqrt{7})$  км велосипедист быстрее всего проделает путь от  $C$  до  $B$ .

Ответ:  $45 - 15\sqrt{7}$ .

**896.** Пусть  $x$  — радиус основания конуса,  $x > 0$ . Выразим через  $x$  высоту конуса, зная его объём:  $\frac{1}{3}\pi x^2 h = 3$ ,  $h = \frac{9}{\pi x^2}$ . Составим сумму

$x + h = x + \frac{9}{\pi x^2}$ . Введём функцию  $f(x) = x + \frac{9}{\pi x^2}$ . Исследуем её с помощью производной на промежутке  $x > 0$  на наименьшее значение.

$$f'(x) = \left(x + \frac{9}{\pi x^2}\right)', \quad f'(x) = 1 - \frac{18}{\pi x^3}, \quad f'(x) = \frac{\pi x^3 - 18}{\pi x^3}; \quad f'(x) = 0,$$

если  $x = \sqrt[3]{\frac{18}{\pi}}$ ,  $\sqrt[3]{\frac{18}{\pi}} \in (0; +\infty)$ . На промежутке  $\left(0; \sqrt[3]{\frac{18}{\pi}}\right)$   $f'(x) < 0$ ,

на промежутке  $\left(\sqrt[3]{\frac{18}{\pi}}; +\infty\right)$   $f'(x) > 0$ . Значит,  $x = \sqrt[3]{\frac{18}{\pi}}$  — точка минимума.

Так как непрерывная функция  $f(x)$  имеет на промежутке  $x > 0$  единственную критическую точку, которая является точкой минимума, то в ней функция принимает своё наименьшее значение. Радиус основания

конуса равен  $\sqrt[3]{\frac{18}{\pi}}$ . Радиус шара  $R = \sqrt[3]{\frac{18}{\pi}}$ ,  $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi \left(\sqrt[3]{\frac{18}{\pi}}\right)^3 = 24$ .

*Ответ:* 24.

**897.** По условию в шар вписан прямоугольный параллелепипед. Обозначим через  $x$  ( $x > 0$ ) длину меньшей стороны основания прямоугольного параллелепипеда,  $2x$  — длину большей стороны основания (см. рис. 212). Тогда  $AB = x$ ,  $AD = 2x$ . Выразим через  $x$  высоту параллелепипеда  $AA_1$ , зная, что диагональ  $AC_1$  равна двум радиусам шара, описанного около параллелепипеда, то есть  $AC_1 = 2R_{\text{ш}}$ ,  $R_{\text{ш}} = AE = \frac{1}{2}AC_1$ .

$$\triangle ADC: \quad AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{4x^2 + x^2} = x\sqrt{5} \quad AO = \frac{1}{2}AC,$$

$$AO = \frac{x\sqrt{5}}{2}; \quad \triangle AOE: \quad OE = \sqrt{AE^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}};$$

$$AA_1 = OO_1 = 2OE, \quad AA_1 = 2\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}}.$$

Запишем сумму длин всех рёбер параллелепипеда:

$P = 4 \left(x + 2x + 2\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}}\right)$ . По смыслу задачи длины рёбер — положительные числа, значит должна выполняться система неравенств:

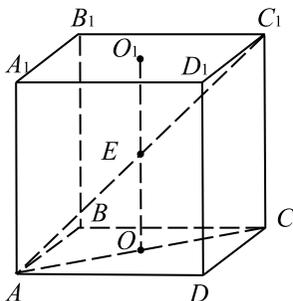


Рис. 212.

$$\begin{cases} \frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4} > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \sqrt{\frac{28}{\pi}}\right) \left(x + \sqrt{\frac{28}{\pi}}\right) < 0, \\ x > 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < x < 2\sqrt{\frac{7}{\pi}}. \text{ Введём функцию } p(x) = 4 \left( x + 2x + 2\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}} \right).$$

Найдём с помощью производной наибольшее значение функции  $p(x)$  на интервале  $\left(0; 2\sqrt{\frac{7}{\pi}}\right)$ :

$$\begin{aligned} 4 \left( x + 2x + 2\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}} \right)' &= 4 \left( 1 + 2 + \frac{-\frac{5}{2}x}{\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}}} \right) = \\ &= 4 \left( 3 - \frac{5x}{2\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}}} \right) = 12 - \frac{10x}{\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}}} = \frac{12\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}} - 10x}{\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}}}; \end{aligned}$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 12\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}} - 10x = 0 \quad (1), \text{ так как } \sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}} > 0$$

$$\text{при всех } x \in \left(0; 2\sqrt{\frac{7}{\pi}}\right). \quad \sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}} = \frac{5x}{6}, \quad \frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4} = \frac{25}{36}x^2;$$

$$\frac{70x^2}{36} = \frac{35}{\pi}; \quad x^2 = \frac{18}{\pi}; \quad x_1 = \sqrt{\frac{18}{\pi}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{18}{\pi}}. \text{ Проверка показы-}$$

вает, что уравнение (1) имеет только один корень  $x = \sqrt{\frac{18}{\pi}}$ ,

$\sqrt{\frac{18}{\pi}} \in \left(0; 2\sqrt{\frac{7}{\pi}}\right)$ . На промежутке  $\left(0; \sqrt{\frac{18}{\pi}}\right)$   $p'(x) > 0$ , на промежутке  $\left(\sqrt{\frac{18}{\pi}}; 2\sqrt{\frac{7}{\pi}}\right)$   $p'(x) < 0$ . Значит,  $x = \sqrt{\frac{18}{\pi}}$  — точка миниму-

ма. Так как функция  $p(x)$  имеет на промежутке  $\left(0; 2\sqrt{\frac{7}{\pi}}\right)$  единственную критическую точку, которая является точкой максимума, то в ней функция принимает наибольшее значение на этом промежутке. Меньшая сторона основания параллелепипеда равна  $\sqrt{\frac{18}{\pi}}$ . Радиус круга равен  $\sqrt{\frac{18}{\pi}}$ .

$$S_{\text{кр}} = \pi \left(\sqrt{\frac{18}{\pi}}\right)^2 = 18.$$

Ответ: 18.

**898.** По условию куб вневписан в конус. Проведём осевое сечение конуса, параллельное одной из граней куба (см. рис. 213). Пусть  $x$  — радиус основания конуса ( $x > 0$ ). Выразим через  $x$  высоту конуса, зная его объём:  $\frac{1}{3}\pi x^2 h = \frac{17}{3}$ ,  $h = \frac{17}{\pi x^2}$ . Обозначим ребро вневписанного в конус куба через  $a$  и выразим его через  $x$ .  $\triangle SOK \sim \triangle SO_1C_1$  ( $\angle S$  — общий,  $\angle SKO = \angle SC_1O_1$  как соответственные при  $OK \parallel O_1C_1$  и  $SK$  секущей),  $\frac{OK}{O_1C_1} = \frac{SO}{SO_1}$ , где  $OK = x$ ,  $O_1C_1 = \frac{a}{2}$ ,  $SO = \frac{17}{\pi x^2}$ ,

$$SO_1 = SO - OO_1 = \frac{17}{\pi x^2} - a. \quad \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{17}{\pi x^2}}{\frac{17}{\pi x^2} - a}; \quad 2x(17 - a\pi x^2) = 17a;$$

$$34x - 2a\pi x^3 = 17a; \quad a(17 + 2\pi x^3) = 34x; \quad a = \frac{34x}{17 + 2\pi x^3}.$$

Введём функцию  $a(x) = \frac{34x}{17 + 2\pi x^3}$ . Найдём с помощью производной наибольшее значение функции  $a(x)$  при  $x > 0$ :

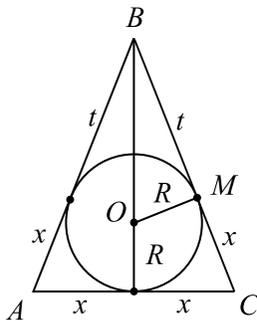


Рис. 213.

$$\left(\frac{34x}{17+2\pi x^3}\right)' = \frac{34(17+2\pi x^3) - 6\pi x^2 \cdot 34x}{(17+2\pi x^3)^2} = \frac{34(17-4\pi x^3)}{(17+2\pi x^3)^2};$$

$$a'(x) = 0 \text{ при } x = \sqrt[3]{\frac{17}{4\pi}}, \sqrt[3]{\frac{17}{4\pi}} \in (0; +\infty).$$

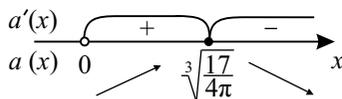


Рис. 214.

При переходе через точку  $x = \sqrt[3]{\frac{17}{4\pi}}$  производная меняет знак с «+»

на «-» (см. рис. 214).  $x = \sqrt[3]{\frac{17}{4\pi}}$  — точка максимума. Функция  $a(x)$  имеет единственную критическую точку на промежутке  $(0; +\infty)$ , которая является точкой максимума, значит, принимает в ней наибольшее значение на этом промежутке. Радиус основания конуса равен  $\sqrt[3]{\frac{17}{4\pi}}$ . Радиус шара ра-

$$\text{вен } \sqrt[3]{\frac{17}{4\pi}}, V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{17}{4\pi}}\right)^3 = \frac{17}{3}.$$

Ответ:  $\frac{17}{3}$ .

**899.** Составим план решения задачи.

1) Обозначим через  $x$  радиус основания конуса, описанного около шара (на рис. 215 приведено осевое сечение конуса). Выразим через  $x$  величину  $t$ . Отметим, что  $t$  (см. рис. 215) есть расстояние от вершины конуса до окружности касания шара и конуса.

2) Пусть  $f(x)$  — полупериметр осевого сечения. Находим  $x_0$ , при котором функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение на промежутке  $(0; +\infty)$ .

3) Находим  $t(x_0)$ .

*Решение.*

1) Найдём  $R$  — радиус шара.

$$\frac{256\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3, 64 = R^3, R = 4.$$

Из подобия треугольников  $\triangle DBC$  и  $\triangle OBM$ :

$$\frac{x}{R} = \frac{x+t}{\sqrt{R^2+t^2}}; \quad \frac{x}{4} = \frac{x+t}{\sqrt{16+t^2}};$$

$$x\sqrt{16+t^2} = 4x+4t;$$

$$16x^2+t^2x^2 = 16x^2+16t^2+32xt;$$

$$tx^2 = 16t+32x;$$

$$t(x^2-16) = 32x; \quad t = \frac{32x}{x^2-16}.$$

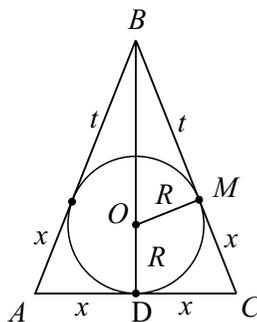


Рис. 215.

$$2) f(x) = 2x + t = 2x + \frac{32x}{x^2-16} = \frac{2x^3 - 32x + 32x}{x^2-16} = \frac{2x^3}{x^2-16}.$$

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2-16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2-16)^2} = \frac{6x^4 - 96x^2 - 4x^4}{(x^2-16)^2} = \frac{2x^4 - 96x^2}{(x^2-16)^2}.$$

$$2x^4 - 96x^2 = 0;$$

$$x^2 - 48 = 0; \quad x^2 = 48;$$

$$x = 4\sqrt{3}.$$

$$3) t(4\sqrt{3}) = \frac{32 \cdot 4\sqrt{3}}{48-16} = \frac{32 \cdot 4\sqrt{3}}{32} = 4\sqrt{3}.$$



Рис. 216.

*Ответ:*  $4\sqrt{3}$ .

**900.** Пусть  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — координаты точки  $B_1$ . Так как  $x$ ,  $y$  и  $z$  положительные числа, то длины сторон прямоугольного параллелепипеда равны  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а объём  $V = xyz$ .  $V = x \cdot 2x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + x \cdot e^{3-2x}\right) = 2 + 2x^3e^{3-2x}$ ,  $1 \leq x \leq 7$ . Введём функцию  $v(x) = 2 + 2x^3e^{3-2x}$ . Найдём с помощью

производной наибольшее и наименьшее значение функции  $v(x)$  на отрезке  $[1; 7]$ :  $(2 + 2x^3e^{3-2x})' = 6x^2e^{3-2x} - 4x^3e^{3-2x} = 2x^2e^{3-2x}(3 - 2x)$ .  $v'(x) = 0$  при  $x = 0$  и  $x = 1,5$ .  $0 \notin [1; 7]$ ,  $1,5 \in [1; 7]$ . Найдём значение функции в концах отрезка и в стационарной точке:

$$v(1) = 2 + 2e; \quad v(7) = 2 + \frac{686}{e^{11}}; \quad v(1,5) = 2 + 2 \cdot 1,5^3 e^0 = 8,75. \quad \text{Из чисел}$$

$$2 + 2e, \quad 2 + \frac{686}{e^{11}} \text{ и } 8,75 \text{ наибольшее } 8,75, \text{ наименьшее } 2 + \frac{686}{e^{11}}.$$

$$\text{Ответ: } 8,75; \quad 2 + \frac{686}{e^{11}}.$$

**901.** Пусть  $x, y, z$  — координаты точки  $B_1$ . Так как  $x, y$  и  $z$  положительные числа, то длины сторон прямоугольного параллелепипеда равны  $x, y, z$ , а  $S_{\text{полн. пов.}} = 2(x + y) \cdot z + 2xy$ ,

$$\begin{aligned} S_{\text{полн. пов.}} &= 2(x + 2x) \cdot \left(x + \frac{36}{(2x)^2}\right) + 2x \cdot 2x = 6x \left(x + \frac{9}{x^2}\right) + 4x^2 = \\ &= 6x^2 + \frac{54}{x} + 4x^2 = 10x^2 + \frac{54}{x}, \quad 1 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Введём функцию  $S(x) = 10x^2 + \frac{54}{x}$ . Найдём с помощью производной на отрезке  $[1; 2]$  наименьшее значение функции  $S(x)$ :

$$S'(x) = \left(10x^2 + \frac{54}{x}\right)'; \quad S'(x) = 20x - \frac{54}{x^2}; \quad S'(x) = \frac{20x^3 - 54}{x^2}. \quad S'(x) = 0$$

при  $x = \frac{3}{\sqrt[3]{10}}$ ,  $\frac{3}{\sqrt[3]{10}} \in [1; 2]$ .  $x = \frac{3}{\sqrt[3]{10}}$  — точка минимума (см. рис. 217).

Так как функция  $S(x)$  на отрезке  $[1; 2]$  имеет единственную критическую точку, а именно, точку минимума, то в этой точке функция принимает наименьшее значение на отрезке  $[1; 2]$ . Длина меньшего ребра параллелепипеда равна  $\frac{3}{\sqrt[3]{10}}$ .

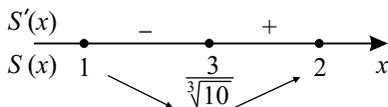


Рис. 217.

$$\text{Ответ: } \frac{3}{\sqrt[3]{10}}.$$

**902.** Выполним рисунок и введём обозначения:  $SO$  — высота, на которую нужно подвесить лампу,  $OB$  — радиус круглого стола,  $\angle OSB$  — угол падения луча (см. рис. 218). Пусть  $OS = x$  ( $x > 0$ ), тогда  $BS = \sqrt{x^2 + 2}$ ,  $\cos \angle OSB = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$ ,  $F = \frac{kx}{\sqrt{x^2 + 2} \cdot (x^2 + 2)} = \frac{kx}{(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}$ .

Введём функцию  $f(x) = \frac{kx}{(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}$ . Исследуем её на наибольшее значение с помощью производной на промежутке  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{kx}{(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}} \right)' &= \frac{k(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2kx^2}{(x^2 + 2)^3} = \\ &= \frac{k(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}(x^2 + 2 - 3x^2)}{(x^2 + 2)^3} = \frac{k(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}(2 - 2x^2)}{(x^2 + 2)^3} = \frac{2k(1 - x^2)}{(x^2 + 2)^{\frac{5}{2}}}; \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ , если  $x = 1$  или  $x = -1$ .  $1 \in (0; +\infty)$ ,  $-1 \notin (0; +\infty)$ .  $y'(x) > 0$  на промежутке  $0 < x < 1$ ,  $y'(x) < 0$  на промежутке  $x > 1$ .

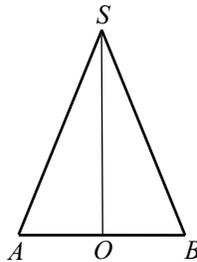


Рис. 218.

Значит,  $x = 1$  — точка максимума. Так как функция  $f(x)$  на промежутке  $x > 0$  имеет единственную точку экстремума, которая является точкой максимума, то в ней функция принимает наибольшее значение.

*Ответ:* 1.

**903.** *Решение.* Так как точка  $A$  — ближайшая на автотрассе к точке  $M$ , автотрасса прямолинейна, то треугольник  $MAB$  — прямоугольный, (см. рис. 219),  $AB$  — участок автотрассы.  $AM = 60$ ,  $MB = 110$ ,  $AB = \sqrt{110^2 - 60^2} = 10\sqrt{11^2 - 6^2} = 10\sqrt{85}$ . Пусть  $C \in AB$  и  $AC = x$ . Путь от  $M$  до  $C$  прямолинейен по условию,  $MC = \sqrt{60^2 + x^2}$ .

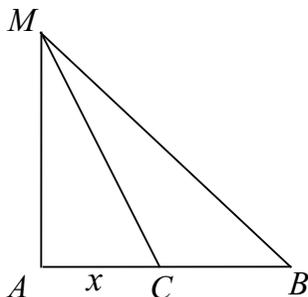


Рис. 219.

$$t_1(x) = \frac{\sqrt{60^2 + x^2}}{30} \text{ — время движения от точки } M \text{ до точки } C.$$

$$t_2(x) = \frac{10\sqrt{85} - x}{50} \text{ — время движения от точки } C \text{ до точки } B.$$

$$t(x) = \frac{\sqrt{60^2 + x^2}}{30} + \frac{10\sqrt{85} - x}{50} \text{ — общее время.}$$

Так как  $0 \leq x \leq 10\sqrt{85}$ , то найдём наименьшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[0; 10\sqrt{85}]$ .  $t'(x) = \frac{2x}{30 \cdot 2\sqrt{60^2 + x^2}} - \frac{1}{50}$ ;  $t'(x) =$   
 $= \frac{1}{10} \left( \frac{x}{3\sqrt{60^2 + x^2}} - \frac{1}{5} \right)$ .  $t'(x) = 0$ ;  $\frac{x}{3\sqrt{60^2 + x^2}} - \frac{1}{5} = 0$ ,  
 $\sqrt{60^2 + x^2} \neq 0$ ;  $5x - 3\sqrt{60^2 + x^2} = 0$ ;  $25x^2 = 9(60^2 + x^2)$ ;  $16x^2 = 9 \cdot 60^2$ ;  
 $4x = 3 \cdot 60 = 180$ ;  $x = 45$  (так как  $x \geq 0$ ).

$t'(x)$  определена для любого  $x$ . При  $x < 45$ ,  $t'(x) < 0$ , а при  $x > 45$ ,  $t'(x) > 0$ . Следовательно,  $x = 45$  — точка минимума функции  $t(x)$ , а так как  $45 \in [0; 10\sqrt{85}]$  и это единственная критическая точка на отрезке  $[0; 10\sqrt{85}]$ , то при  $x = 45$  функция  $t(x)$  принимает наименьшее значение на этом отрезке.

**904.** Пусть координаты точки  $A(x; y_1)$ , координаты точки  $B(x; y_2)$ , координаты точки  $C(x; 0)$  (см. рис. 220). В силу того, что  $1,7 \leq x \leq 4,1$  и отрезок  $AB$  параллелен оси ординат, длина отрезка  $OC = x$ , длина отрезка  $AB = |y_1 - y_2|$ , т. к.  $y_1 > y_2$ , то  $AB = y_1 - y_2$ .

$$S = \frac{1}{2}OC \cdot AB; S = \frac{1}{2}x \left( \frac{5x + 8}{x - 1} - \frac{1 - 4x}{x - 1} \right) = \frac{1}{2}x \left( \frac{9x + 7}{x - 1} \right) = \frac{9x^2 + 7x}{2(x - 1)}.$$

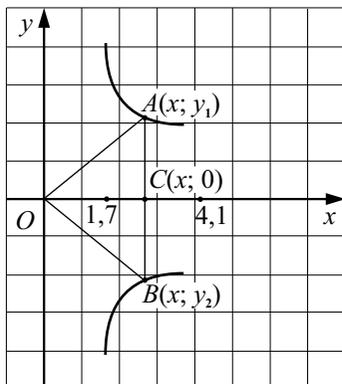


Рис. 220.

Введём функцию  $S(x) = \frac{9x^2 + 7x}{2x - 2}$ . Найдём с помощью производной на отрезке  $[1,7; 4,1]$  наименьшее значение функции  $S(x)$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{9x^2 + 7x}{2x - 2} \right)' &= \frac{(18x + 7)(2x - 2) - 2(9x^2 + 7x)}{4(x - 1)^2} = \\ &= \frac{36x^2 - 22x - 14 - 18x^2 - 14x}{4(x - 1)^2} = \frac{18x^2 - 36x - 14}{4(x - 1)^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{9x^2 - 18x - 7}{2(x - 1)^2} = \frac{9\left(x - \frac{7}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{2(x - 1)^2}; \quad S'(x) = 0 \text{ при } x = -\frac{1}{3} \text{ и } x = \frac{7}{3};$$

$-\frac{1}{3} \notin [1,7; 4,1]$ ,  $\frac{7}{3} \in [1,7; 4,1]$ . На промежутке  $1,7 \leq x < \frac{7}{3}$   $S'(x) < 0$ ,

на промежутке  $\frac{7}{3} < x \leq 4,1$   $S'(x) > 0$ . Значит,  $x = \frac{7}{3}$  — точка мини-

мума. Так как  $x = \frac{7}{3}$  — единственная критическая точка функции  $S(x)$  на отрезке  $[1,7; 4,1]$ , и эта точка является точкой минимума, то в ней функция принимает наименьшее значение.

$$S\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{9 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{3}}{2\left(\frac{7}{3} - 1\right)} = 24,5.$$

Ответ: 24,5.

**905.** Пусть призма вписана в полушар. Выполним чертёж осевого сечения (см. рис. 221) и введём обозначения:  $AD$  — диагональ основания призмы,  $OB$  — радиус полушара,  $AB$  — высота призмы.

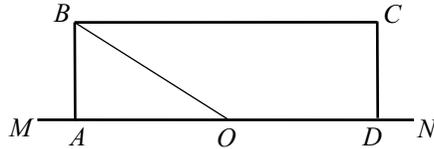


Рис. 221.

Пусть  $a$  — длина стороны квадрата, лежащего в основании призмы,  $a > 0$ . Тогда  $AD = a\sqrt{2}$ ,  $AO = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Объём полушара  $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ ,  $R = OB$ ,  $\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi$ , значит,  $R = 1$ .

$\triangle OAB$  :  $AB = \sqrt{OB^2 - AO^2} = \sqrt{1 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2a^2}$ . Запишем

сумму длин всех рёбер призмы:  $P = 4\left(a + a + \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2a^2}\right) =$

$= 4\left(2a + \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2a^2}\right)$ . По смыслу задачи длины рёбер — положительные числа, значит, должна выполняться система неравенств:

$\begin{cases} 4 - 2a^2 > 0, \\ a > 0; \end{cases} \Rightarrow 0 < a < \sqrt{2}$ . Введём функцию  $p(a) = 8a + 2\sqrt{4 - 2a^2}$ .

Найдём с помощью производной наибольшее значение функции  $p(a)$  на интервале  $(0; \sqrt{2})$ :

$$p'(a) = 8 - \frac{4a}{\sqrt{4 - 2a^2}}, \quad p'(a) = \frac{4(2\sqrt{4 - 2a^2} - a)}{\sqrt{4 - 2a^2}}.$$

$p'(a) = 0$ ,  $2\sqrt{4 - 2a^2} - a = 0$  (1),  $4 - 2a^2 > 0$  при всех  $a \in (0; \sqrt{2})$ ,

$4(4 - 2a^2) = a^2$ ,  $9a^2 = 16$ ,  $a_1 = \frac{4}{3}$ ,  $a_2 = -\frac{4}{3}$ . Проверка показывает,

что только  $a = \frac{4}{3}$  является корнем уравнения (1),  $\frac{4}{3} \in (0; \sqrt{2})$ .  $p'(a) > 0$

на промежутке  $0 < x < \frac{4}{3}$  и  $p'(a) < 0$  на промежутке  $\left(\frac{4}{3}; \sqrt{2}\right)$ . Значит,

$a = \frac{4}{3}$  — точка максимума. Так как функция  $p(a)$  на интервале  $(0; \sqrt{2})$  имеет единственную критическую точку, которая является точкой максимума, то в ней она принимает наибольшее значение.

$$p\left(\frac{4}{3}\right) = 8 \cdot \frac{4}{3} + 2\sqrt{4 - 2 \cdot \frac{16}{9}} = \frac{32}{3} + \frac{4}{3} = 12.$$

Ответ: 12.

**906.** Пусть прожектор установлен в точке  $A(3; 0)$  (см. рис. 222). Объект находится на границе в точке  $C(x; \sqrt{77 + \ln(4x - 3)})$ . Проекция точки  $C$  на ось абсцисс — точка  $B(x; 0)$ .  $AC$  — расстояние от места расположения прожектора до объекта.  $\triangle ABC$ :  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ . По условию  $AC^2 = l^2$ ,  $AB^2 = (3 - x)^2$ ,  $BC^2 = 77 + \ln(4x - 3)$ ,  $l^2 = (3 - x)^2 + 77 + \ln(4x - 3) = 9 - 6x + x^2 + 77 + \ln(4x - 3) = x^2 - 6x + 86 + \ln(4x - 3)$ . Введём функцию  $f(x) = x^2 - 6x + 86 + \ln(4x - 3)$ . Найдём с помощью производной наибольшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[0,9; 2,1]$ .

$$f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{4x - 3}, \quad f'(x) = \frac{8x^2 - 30x + 22}{4x - 3},$$

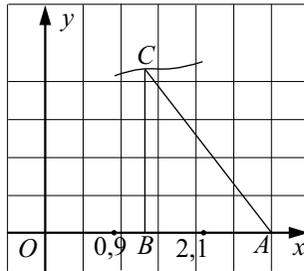


Рис. 222.

$f'(x) = \frac{8\left(x - \frac{11}{4}\right)(x - 1)}{4x - 3}$ ,  $f'(x) = 0$  при  $x = \frac{11}{4}$  и  $x = 1$ ;  $\frac{11}{4} \notin [0,9; 2,1]$ ,  $1 \in [0,9; 2,1]$ .  $x = 1$  — точка максимума (см. рис. 223).

Так как функция  $f(x)$  на отрезке  $[0,9; 2,1]$  имеет единственную критическую точку, и она является точкой максимума, то в ней функция принимает наибольшее значение на этом отрезке.

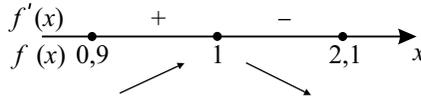


Рис. 223.

$f(1) = 1 - 6 + 86 = 81$ ,  $l^2 = 81$ ,  $l = 9$ , тогда минимальная мощность прожектора  $5l = 5 \cdot 9 = 45$ .

Ответ: 45.

**907.** Следует отметить, что на отрезке  $[-1; 3]$  данная в условии функция отрицательна (см. рис. 224). Пусть точка  $A$  располагается левее точки  $B$  на оси абсцисс и имеет координаты  $(t; 0)$ . Так как  $AB$  является высотой

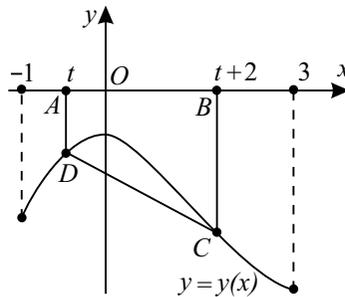


Рис. 224.

трапеции, то есть  $AB = 2$ . Тогда точка  $B$  задаётся координатами  $(t + 2; 0)$ . Тогда точка  $C$  имеет координаты  $(t + 2, y(t + 2))$ , а точка  $D$  — координаты  $(t, y(t))$ . Найдём площадь трапеции  $ABCD$  в зависимости от параметра  $t$ ,

то есть как функцию от  $t$ . Итак,  $S = S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB =$

$= AD + BC$ . Так как  $AD = -y(t)$ , а  $BC = -y(t + 2)$  (в силу отрицательности данной функции), то  $S(t) = -y(t) - y(t + 2)$ . Учитывая вид заданной функции, получаем, что  $S(t) = -t^3 + 5t^2 + 1 - ((t + 2)^3 - 5(t + 2)^2 - 1)$ ;  
 $S(t) = -t^3 + 5t^2 + 1 - (t^3 + 6t^2 + 12t + 8 - 5t^2 - 20t - 20 - 1)$ ;  
 $S(t) = -2t^3 + 4t^2 + 8t + 22$ .

Так как  $C$  и  $D$  принадлежат графику функции  $y(x)$ , заданному на отрезке  $[-1; 3]$ , то  $t \geq -1$ , а  $t + 2 \leq 3$ , следовательно,  $-1 \leq t \leq 1$ .

Таким образом, наибольшее значение площади трапеции  $ABCD$  совпадает с наибольшим значением функции  $S(t) = -2t^3 + 4t^2 + 8t + 22$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Найдём это значение, исследовав на экстремумы функцию  $S(t)$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Для этого найдём производную функции  $S(t)$ :

$$S'(t) = (-2t^3 + 4t^2 + 8t + 22)' = -6t^2 + 8t + 8.$$

Найдём нули производной, принадлежащие отрезку  $[-1; 1]$ .

$$S'(t) = 0; 6t^2 - 8t - 8 = 0; 3t^2 - 4t - 4 = 0; t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 3 \cdot (-4)}}{3} = \\ = \frac{2 \pm 4}{3}; t_1 = -\frac{2}{3} \in [-1; 1], t_2 = 2 \notin [-1; 1]. S'(t) = -6(t-2)\left(t + \frac{2}{3}\right),$$

следовательно, что  $S'(t) < 0$  на промежутке  $\left[-1; -\frac{2}{3}\right)$  и  $S'(t) > 0$  на промежутке  $\left(-\frac{2}{3}; 1\right]$ . Значит,  $t = -\frac{2}{3}$  — точка минимума функции  $S(t)$ .

Таким образом, из проведённого анализа следует, что на отрезке  $[-1; 1]$  имеется единственная критическая точка  $t = -\frac{2}{3}$  функции  $S(t)$ , которая является точкой минимума. Следовательно, в силу непрерывности функции  $S(t)$  её наибольшее значение на отрезке  $[-1; 1]$  достигается на одном из концов этого отрезка. Поэтому найдём значения  $S(-1)$  и  $S(1)$  и выберем из них наибольшее. Итак,  $S(-1) = 2 + 4 - 8 + 22 = 20$ ,  $S(1) = -2 + 4 + 8 + 22 = 32$ . Следовательно, наибольшее значение площади трапеции  $ABCD$  равно 32.

Ответ: 32.

$$908. 2. \frac{2x \cdot (x+2) + (1-x) \cdot (1+x+x^2)}{x \cdot (x-3) \cdot (x+1)} = 2 \cdot \frac{2x^2 + 4x + 1 - x^3}{x \cdot (x-3) \cdot (x+1)} = \\ = 2 \cdot \frac{-x^3 + 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - 2x^2 - 3x} = 2 \cdot \frac{-(x^3 - 2x^2 - 3x) + x + 1}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \\ = \frac{2 \cdot (x+1)}{x \cdot (x-3) \cdot (x+1)} - 2 = \frac{2}{x \cdot (x-3)} - 2. y = \frac{2}{x \cdot (x-3)} - 2.$$

Пусть  $AH = x$ , тогда  $AK = \frac{2}{x \cdot (x-3)} - 2$ .

$$AB = \frac{AK + MD}{2} = \frac{1}{x \cdot (x-3)} + 1. S_{ABCD} = S_{ABMH} \text{ (см. рис. 225).}$$

$S_{ABMH} = x \cdot \left(\frac{1}{x \cdot (x-3)} + 1\right) = \frac{1}{x-3} + x$ . Чтобы найти наименьшую возможную площадь, нужно найти минимум функции  $s(x) = \frac{1}{x-3} + x$

$$\text{при } x > 2. s(x) = \frac{1}{x-3} + x, s'(x) = 1 - \frac{1}{(x-3)^2}.$$

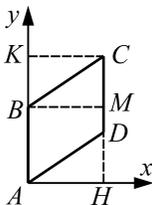


Рис. 225.

$s'(x) = 0, 1 - \frac{1}{(x-3)^2} = 0, x = 4$  (так как  $x = 2$  не удовлетворяет условию  $x > 2$ ).

При  $x > 4$   $s'(x) > 0$ , при  $2 < x < 4$   $s'(x) < 0$ , значит,  $x = 4$  — точка минимума функции  $s(x)$ , минимум функции равен  $s(4) = 5$ , значит, наименьшая  $S_{ABCD}$  равна 5.

Ответ: 5.

**909.** Пусть  $v$  км/ч — собственная скорость лодки. Так как при переправе лодка всегда направлена перпендикулярно берегам, то в направлении, перпендикулярном берегам, скорость движения при переправе равна  $v$  км/ч, а в направлении, параллельном берегам, скорость движения совпадает со скоростью течения реки. Следовательно, рыбак переправляется через реку за  $\frac{1}{v}$  часов, при этом вдоль берегов он продвигается

на  $10 \cdot \frac{1}{v}$  км. Оставшийся путь до пункта  $M$  в  $3 - \frac{10}{v}$  км он проходит за

$\frac{3 - \frac{10}{v}}{v} = \frac{3v - 10}{v^2}$  часов. Следовательно общее время, затраченное рыбаком на передвижение из пункта  $N$  в пункт  $M$  равно  $T(v) = \frac{1}{v} + \frac{3v - 10}{v^2} =$

$= \frac{4v - 10}{v^2}$ . Исходя из формулировки задачи, заметим, что должны выполняться условия  $3 - \frac{10}{v} \geq 0$  и  $v > 0 \Rightarrow v \geq \frac{10}{3}$ . Найдём максимальное значение функции  $T(v) = \frac{1}{v} + \frac{3v - 10}{v^2} = \frac{4v - 10}{v^2}$  на промежутке  $\left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$ . Для этого исследуем на экстремумы функцию  $T(v)$ .

$$T'(v) = \frac{4 \cdot v^2 - 2v \cdot (4v - 10)}{v^4} = \frac{20v - 4v^2}{v^4} = \frac{4(5 - v)}{v^3}. T'(v) = 0 \Rightarrow$$

$v = 5 \in \left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$ . Таким образом,  $T'(v) > 0$  при  $\frac{10}{3} \leq v < 5$ ,  $T'(v) = 0$  при  $v = 5$  и  $T'(v) < 0$  при  $5 < v$ . Значит, точка  $v = 5$  — единственная критическая точка, и она является точкой максимума функции  $T(v)$  на промежутке  $\left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$ . Поэтому максимальное значение функции  $T(v)$  на промежутке  $\left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$  достигается в точке  $v = 5$ . Следовательно, максимальное количество времени, которое может занять передвижение рыбака из пункта  $N$  в пункт  $M$ , равно  $T(5) = \frac{10}{25} = 0,4$  часа = 24 минуты.

*Ответ:* 24 минуты.

**910.** План решения:

1) Докажем, что периметр многоугольника  $ABCEFGH$  будет минимальным при  $GH = 50$  м.

2) Представим периметр многоугольника  $ABCEFGH$  как функцию от некоторого параметра и найдём её минимум с помощью первой производной.

1) Обозначим  $AB$  через  $x$ , а  $EF$  через  $y$ . Покажем, что при фиксированном  $x$  периметр фигуры  $ABCEFGH$  уменьшается при уменьшении  $GH$ . Это будет означать, что если рассмотреть фигуру  $ABCEFGH$ , удовлетворяющую условиям задачи, у которой  $GH \neq 50$  м (то есть  $GH > 50$  м), то можно уменьшить  $GH$  всегда так, чтобы выполнялись все требования задачи, но при этом периметр фигуры  $ABCEFGH$  уменьшится. Таким образом, доказав указанный выше факт, мы докажем, что периметр фигуры  $ABCEFGH$  будет наименьшим при  $GH = 50$  м. Рассмотрим такие две фигуры  $ABCEFGH$  и  $A_1B_1C_1E_1FGH_1$  (см. рис. 226), удовлетворяющие всем требованиям задачи, что  $GH_1 < GH$ . Так как  $S_{ABCEFGH} = S_{A_1B_1C_1E_1FGH_1} = 3500$  м<sup>2</sup>,  
 $S_{ABCEFGH} = S_{A_1B_1CEFGH_1} + S_{A_1B_1BA} + S_{GHH_1}$  и  $S_{A_1B_1C_1E_1FGH_1} = S_{A_1B_1CEFGH_1} + S_{ECC_1E_1}$ , то  $S_{A_1B_1BA} + S_{GHH_1} = S_{ECC_1E_1}$ . Так как  $S_{GHH_1} = \frac{1}{2}GK \cdot HH_1$ ,  $S_{A_1B_1BA} = AB \cdot AA_1$ , а  $S_{ECC_1E_1} = EC \cdot CC_1$  и  $AA_1 = HH_1$  (это следует из  $AA_1 = AH = 40$  м), то  $(15 + x) \cdot HH_1 = (65 + x) \cdot CC_1 \Rightarrow HH_1 = \frac{65 + x}{15 + x} \cdot CC_1$ .  $P_{A_1B_1C_1E_1FGH_1} - P_{ABCEFGH} =$



**911. План решения:** 1. Докажем, что периметр многоугольника  $ACDFGHM$  будет минимальным при  $AM = 130$  м. 2. Представим периметр многоугольника  $ACDFGHM$  как функцию от некоторого параметра и найдём её минимум с помощью первой производной.

*Решение.* 1. Обозначим  $BC$  через  $x$ , а  $FG$  через  $y$ . Покажем, что при фиксированном  $y$  периметр фигуры  $ACDFGHM$  уменьшается при уменьшении  $AM$ . Значит, если рассмотреть фигуру  $ACDFGHM$ , удовлетворяющую условиям задачи, у которой  $AM \neq 130$  м (то есть  $AM > 130$  м), то можно уменьшить  $AM$  всегда так, чтобы остались выполняться все требования задачи, но при этом периметр фигуры  $ACDFGHM$  уменьшится. Таким образом, доказав указанный выше факт, мы докажем, что наименьший периметр фигуры  $ACDFGHM$  будет при  $AM = 130$  м. Рассмотрим такие две фигуры  $ACDFGHM$  и  $A_1C_1D_1FGHM$  (см. рисунок 227), удовлетворяющие требованиям задачи, что  $A_1M < AM$ . Так как  $S_{ACDFGHM} = S_{A_1C_1D_1FGHM} = 6700$  м<sup>2</sup>,

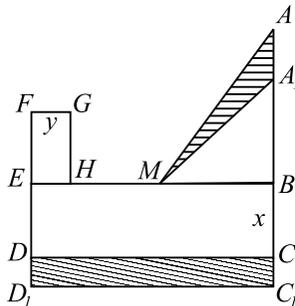


Рис. 227.

$S_{ACDFGHM} = S_{A_1CDFGHM} + S_{A_1AM}$  и  $S_{A_1C_1D_1FGHM} = S_{A_1CDFGHM} + S_{CC_1D_1D}$ , то  $S_{MAA_1} = S_{CC_1D_1D}$ . Так как  $S_{MAA_1} = \frac{1}{2}MB \cdot AA_1$ ,

$S_{CC_1D_1D} = CC_1 \cdot CD$ , то  $25AA_1 = CC_1 \cdot (60 + y) \Rightarrow AA_1 = \frac{60 + y}{25} \cdot CC_1$ .

$P_{A_1C_1D_1FGHM} - P_{ACDFGHM} = 2CC_1 - AA_1 + MA_1 - MA$ . Найдём знак выражения  $2CC_1 - AA_1 + MA_1 - MA$ . Так как  $MA_1 < MA$ , то  $2CC_1 - AA_1 + MA_1 - MA < 2CC_1 - AA_1 = 2CC_1 - \frac{60 + y}{25} \cdot CC_1 =$   
 $= \frac{-y - 10}{60 + y} \cdot CC_1 < 0$ .

Значит,  $P_{A_1C_1D_1FGHM} < P_{ACDFGHM}$ , что и требовалось доказать.

2. Так как  $AM = 130$ , то из  $\triangle AMB \Rightarrow AB = \sqrt{AM^2 - MB^2} = 120$  м. Выразим периметр и площадь фигуры  $ACDFGHM$  через параметры  $x$  и  $y$ .  $P_{ACDFGHM} = 2(x + y) + 360$ .  $S_{ACDFGHM} = S_{ABM} + S_{BCDE} +$

$$+ S_{EFGH} = \frac{1}{2}AB \cdot BM + BC \cdot CD + FG \cdot GH = 3000 + x(60 + y) + 20y = 6700$$

$$\Rightarrow x = \frac{3700 - 20y}{60 + y}. \text{ Поэтому } P_{ACDFGHM} = P(y) = 2\left(\frac{3700 - 20y}{60 + y} + y\right) +$$

$$+ 360. \text{ Найдём минимальное значение функции } P(y) \text{ на промежутке } (0; +\infty). P'(y) = 2 \cdot \frac{-20(60 + y) - (3700 - 20y)}{(60 + y)^2} + 2 = 2 - 2 \cdot$$

$$\cdot \frac{4900}{(60 + y)^2} = 2 \cdot \frac{(60 + y)^2 - 70^2}{(60 + y)^2} = 2 \cdot \frac{(y - 10)(y + 130)}{(60 + y)^2}. \text{ Из вида произ-$$

водной  $P'(y)$  следует, что  $P'(y) < 0$  при  $y \in (0; 10)$ ,  $P'(y) = 0$  при  $y = 10$  и  $P'(y) > 0$  при  $y > 10$ . Следовательно, функция  $P(y)$  при  $y > 0$  имеет единственную критическую точку  $y = 10$ , при этом  $y = 10$  — точка минимума. Поэтому наименьшее значение периметра  $P_{ACDFGHM}$  равно  $P(10) = 480$ .

Ответ: 480.

**912.** Пусть  $UT = x$ ,  $UV = y$ ,  $AE = a$ ,  $a \geq 10$ . Выразим через введённые переменные площади ковра и орнамента.

$$S_{\text{ковра}} = xy = 3600, S_{\text{орн.}} = S_{AELP} + 4S_{LMN} + 4S_{PQR} =$$

$$= a^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{y - a}{2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{x - a}{2}\right) = a^2 + \frac{a}{2} \cdot (y - a) + \frac{a}{2} \cdot (x - a) =$$

$= \frac{a}{2} \cdot (x + y)$ . Докажем, что при любом фиксированном  $a$  площадь орнамента наименьшая, когда  $x = y$ .

$$S_{\text{орн.}} = \frac{a}{2} \cdot (x + y) = \frac{a}{2} \cdot \left(x + \frac{3600}{x}\right); S'_{\text{орн.}}(x) = \frac{a(x^2 - 3600)}{2x^2}. \text{ Легко}$$

видеть, что  $S'_{\text{орн.}}(x) > 0$  при  $x > 60$  и  $S'_{\text{орн.}}(x) < 0$  при  $-60 < x < 60$ . Поэтому наименьшее значение функция  $S_{\text{орн.}}(x)$  принимает при  $x = 60$ .

$$\text{При этом } y = \frac{3600}{60} = 60.$$

$S_{\text{орн.}} = \frac{a}{2} \cdot (x + y) = 60a$ .  $f(a) = 60a$  — возрастающая функция, значит наименьшее значение принимает при наименьшем возможном  $a$ , то есть при  $a = 10$ .

$$S_{\text{орн.наим.}} = 60 \cdot 10 = 600.$$

Ответ: 600.

**913.** Пусть  $UT = x$ ,  $UV = y$ ,  $AE = a$ ,  $a \geq 20$ . Выразим через введённые переменные площади ковра и орнамента.

$$S_{\text{ковра}} = xy, \quad S_{\text{орн.}} = S_{AELP} + 4S_{LMN} + 4S_{PQR} =$$

$$= a^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{y-a}{2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{x-a}{2}\right) = a^2 + \frac{a}{2} \cdot (y-a) + \frac{a}{2} \cdot (x-a) =$$

$= \frac{a}{2} \cdot (x+y)$ . Докажем, что при любом фиксированном  $a$  площадь ковра наибольшая, когда  $x = y$ .

$$\frac{a}{2}(x+y) = 1400, \quad y = \frac{2800}{a} - x. \quad S_{\text{ковра}} = xy = x\left(\frac{2800}{a} - x\right),$$

$$S'_{\text{ковра}}(x) = \frac{2800}{a} - 2x. \quad \text{Легко видеть, что } S'_{\text{ковра}}(x) > 0 \text{ при } x < \frac{1400}{a}$$

и  $S'_{\text{ковра}}(x) < 0$  при  $x > \frac{1400}{a}$ . Поэтому наибольшее значение функция

$$S_{\text{ковра}}(x) \text{ принимает при } x = \frac{1400}{a}. \quad \text{При этом } y = \frac{2800}{a} - \frac{1400}{a} = \frac{1400}{a}.$$

$S_{\text{ковра}} = xy = \left(\frac{1400}{a}\right)^2$ .  $f(a) = \left(\frac{1400}{a}\right)^2$  — убывающая функция, значит наибольшее значение принимает при наименьшем возможном  $a$ , то есть при  $a = 20$ .

$$S_{\text{ковра наиб.}} = \left(\frac{1400}{20}\right)^2 = 4900.$$

Ответ: 4900.

**914.** Пусть  $M_1P_1 = x$ , а  $AA_1 = y$ . Введём параметр  $B_1E = A_1B_1 = a$ . Так как  $S_{A_1B_1EF} = a^2 \geq 16$ , то  $a \geq 4$ . Объём всей фигуры равен сумме объёмов параллелепипедов  $NMPQN_1M_1P_1Q_1$ ,  $FEC_1D_1F_1E_1PQ$ ,

$ABCD A_1B_1C_1D_1$ :

$$V = 96 = a[y \cdot (a+1+x) + 5 \cdot (1+x) + 1 \cdot x] = a[y \cdot (x+a+1) + 6x+5],$$

$$\frac{96}{a} - 6x - 5$$

откуда получаем, что  $y = \frac{\quad}{x+a+1}$ .

Сварить надо все рёбра фигуры, не принадлежащие прямоугольникам  $ABCD$  и  $Q_1P_1DC$ , поэтому общая длина сварочного шва  $L$  равна:

$$L = 2M_1P_1 + 2MM_1 + 2ME_1 + 2E_1E + 2EB_1 + 2BB_1 + 5A_1B_1 = 2(x+y) + 7a + 14. \quad \text{Подставим выражение для } y:$$

$L(x) = 2x + \frac{192}{a} - 12x - 10$   
 $L(x) = 2x + \frac{192}{a} - 12x - 10 + 7a + 14$ . Найдём производную:

$$L'(x) = 2 + \frac{-12(x+a+1) - \left(\frac{192}{a} - 12x - 10\right)}{(x+a+1)^2} = 2 - \frac{\frac{192}{a} + 12a + 2}{(x+a+1)^2}.$$

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+a+1)^2 = \frac{96}{a} + 6a + 1 \Rightarrow x+a+1 = \sqrt{\frac{96}{a} + 6a + 1} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_* = -a - 1 + \sqrt{\frac{96}{a} + 6a + 1}.$$

В точке минимума вторая производная функции положительна. Так как  $L''(x) = 2 \cdot \frac{a}{(x+a+1)^3}$  и  $L''(x_*) > 0$ .  
 $L'(x)$  возрастает в точке  $x_*$ , значит при переходе через точку  $x_*$  меняет знак с  $\ll - \gg$  на  $\ll + \gg$ . Тогда  $x_*$  — точка минимума функции  $L(x)$ .

Найдём минимальную длину сварочного шва  $L(x)$ :

$$L(x_*) = 14 + 5a + \frac{2(x_* + a)(x_* + a + 1) - 12x_* + \frac{192}{a} - 10}{x_* + a + 1} = 14 + 5a +$$

$$+ \frac{\frac{192}{a} + 12a + 2 - 2\sqrt{\frac{96}{a} + 6a + 1}}{\sqrt{\frac{96}{a} + 6a + 1}} +$$

$$+ \frac{-12\left(-a - 1 + \sqrt{\frac{96}{a} + 6a + 1}\right) + \frac{192}{a} - 10}{\sqrt{\frac{96}{a} + 6a + 1}} =$$

$$= 14 + 5a + \frac{4\left(\frac{96}{a} + 6a + 1\right) - 14\sqrt{\frac{96}{a} + 6a + 1}}{\sqrt{\frac{96}{a} + 6a + 1}} = 5a + 4\sqrt{\frac{96}{a} + 6a + 1}.$$

Таким образом, мы получили зависимость минимальной длины сварочного шва от параметра  $a \geq 4$ . Рассмотрим функцию  $g(a) = \frac{96}{a} + 6a$ .

Так как

$g'(a) = 6 - \frac{96}{a^2} > 0$  при  $a > 4$  и  $g'(4) = 0$ , то  $g(a)$  не убывает на промежутке  $[4; \infty)$  и принимает на нём минимальное значение в точке  $a = 4$ . Следовательно, общая длина сварочного шва будет минимальной, если  $a = 4$ . В этом случае

$$L(x_*) = 5 \cdot 4 + 4 \cdot \sqrt{\frac{96}{4} + 6 \cdot 4 + 1} = 48 \text{ дм.}$$

Ответ: 48.

**915.** Пусть  $BB_1 = x$ , а  $EG = y$ . Введём параметр  $C_1Q = PQ = A_1B_1 = b$ . Так как  $SPQC_1D_1 = b^2 \geq 25$ , то  $b \geq 5$ .

$$V = 125 = b[5x + 2(x + b) + y(x + b + 2)] = b[y(x + b + 2) + 7x + 2b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{\frac{125}{b} - 7x - 2b}{x + b + 2}. \text{ Общая длина сварочного шва } L \text{ равна:}$$

$$L = 2KG_1 + 2KE_1 + 2E_1Q + 2C_1Q + 2C_1B_1 + 2BB_1 + 5A_1B_1 = 2(x + y) + \frac{250}{b} - 14x - 4b + 7b + 18 \Rightarrow L(x) = 2x + \frac{250}{x + b + 2} + 7b + 18.$$

$$L'(x) = 2 + \frac{-14(x + b + 2) - \left(\frac{250}{b} - 14x - 4b\right)}{(x + b + 2)^2} = 2 - \frac{\frac{250}{b} + 10b + 28}{(x + b + 2)^2}.$$

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + b + 2)^2 = \frac{125}{b} + 5b + 14 \Rightarrow x + b + 2 = \sqrt{\frac{125}{b} + 5b + 14} > 0 \Rightarrow x_* = -b - 2 + \sqrt{\frac{125}{b} + 5b + 14}.$$

Так как  $L''(x) = 2 \cdot \frac{\frac{250}{a} + 10b + 28}{(x + b + 2)^3}$  и  $L''(x_*) > 0$ , то  $x_*$  — точка минимума функции  $L(x)$ .

Минимальная длина сварочного шва  $L(x)$ :

$$\begin{aligned}
 L(x_*) &= 18 + 5b + \frac{2(x_* + b)(x_* + b + 2) - 14x_* + \frac{250}{b} - 4b}{x_* + b + 2} = \\
 &= 18 + 5b + \frac{4\left(\frac{125}{b} + 5b + 14\right) - 18\sqrt{\frac{125}{b} + 5b + 14}}{\sqrt{\frac{125}{b} + 5b + 14}} = 5b + \\
 &+ 4\sqrt{\frac{125}{b} + 5b + 14}.
 \end{aligned}$$

Функция  $f(b) = \frac{125}{b} + 5b$  не убывает на промежутке  $[5; +\infty)$ , так как  $f'(b) = 5 - \frac{125}{b^2} > 0$  при  $b > 5$  и  $f'(5) = 0$ , и принимает минимальное значение в точке  $b = 5$ .  $L_{\min} = L(x_*)$  также принимает минимальное значение при  $b = 5$ .

$$L_{\min} = L(x_*) = 5 \cdot 5 + 4 \cdot \sqrt{\frac{125}{5} + 5 \cdot 5 + 14} = 57 \text{ дм.}$$

Ответ: 57.

**916.** 1) Обозначим  $LM = x (> 0)$ ,  $DC = y (> 0)$ ,  $BC = z (z \leq 15)$ . Площадь участка  $ABDEHFLM$   $S = 1700 = S_{DEHC} + S_{CFGB} + S_{AGLM} = y \cdot (x + 10) + (x + 30) \cdot z + 20x \Rightarrow y = \frac{1700 - 20x - xz - 30z}{x + 10}$ ;  $y > 0$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Полупериметр участка } \frac{P}{2} &= x + y + z + 30 + 20 = x + y + z + 50 = \\
 &= x + \frac{1700 - 20x - xz - 30z}{x + 10} + z + 50 = \\
 &= \frac{x^2 + 10x + 1700 - 20x - xz - 30z + xz + 50x + 10z + 500}{x + 10} = \\
 &= \frac{x^2 + 40x + 2200 - 20z}{x + 10} = x + 30 + \frac{1900 - 20z}{x + 10} = f(x).
 \end{aligned}$$

2) Исследуем функцию  $f(x)$  при  $x > 0$  с помощью производной. Пусть  $z_0 \leq 15$ ;  $f'(x) = 1 - \frac{1900 - 20z_0}{(x + 10)^2} = \frac{x^2 + 20x + 100 - 1900 - 20z_0}{(x + 10)^2}$ . Найдём критическую точку  $x_0 > 0$  при данном  $z_0$ .  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 1800 + 20z_0 = 0$  (1);  $x_0 = -10 + \sqrt{1900 - 20z_0} \geq \geq -10 + \sqrt{1900 - 20 \cdot 15} = -10 + 40 = 30$ . Далее, при  $0 < x < x_0$   $f'(x) < 0$ , а при  $x > x_0$   $f'(x) > 0$ , так как  $x_0$  — больший из корней квадратного трёхчлена (1) со старшим коэффициентом 1, то есть ветви параболы направлены вверх. Следовательно,  $x_0$  — точка минимума функции  $f(x)$  при  $x > 0$ .

3) Полупериметр  $\frac{P}{2}$  данного участка принимает наименьшее значение для заданного  $z_0$  в точке  $x_0 = -10 + \sqrt{1900 - 20z_0}$ , равное

$$f_{\text{наим.}} = f(x_0) = -10 + \sqrt{1900 - 20z_0} + 30 + \frac{1900 - 20z_0}{-10 + \sqrt{1900 - 20z_0} + 10} =$$

$$= 20 + \sqrt{1900 - 20z_0} + \sqrt{1900 - 20z_0} = 20 + 2\sqrt{1900 - 20z_0}.$$

Заметим, что чем меньше  $z_0$ , тем больше  $\frac{P}{2} = 20 + 2\sqrt{1900 - 20z_0}$ . Следовательно, наименьший из наименьших периметров будет при наибольшем из допустимых  $z_0 \in (0; 15]$ , то есть при  $z_0 = 15$ . Отсюда  $20 + 2\sqrt{1900 - 20z_0} = 20 + 2\sqrt{1600} = 20 + 2 \cdot 40 = 100$ ,  $x_0 = 30$ . Значит  $BC = z = 15$ , периметр  $P = 2 \cdot 100 = 200$ ,  $KL = y + 15 + 20 = \frac{1700 - 20 \cdot 30 - 30 \cdot 15 - 30 \cdot 15}{30 + 10} +$

$$+ 15 + 20 = \frac{200}{40} + 15 + 20 = 5 + 15 + 20 = 40, KD = LN = 30 + 30 = 60.$$

*Ответ:* 200 м, 40 м, 60 м, 15 м.

**917.** Пусть на первом участке мощность была  $x$ , а на втором  $y$ . Тогда  $12x + 6y = 60$ , а времени было потрачено  $t = \frac{12}{x} + \frac{6}{y}$ . Выразим  $y = 10 - 2x$  и подставим в выражение для  $t$ , получая функцию затрачиваемого времени от мощности на первом участке  $t(x) = \frac{12}{x} + \frac{6}{10 - 2x}$ . Найдём её минимум с помощью производной.

$$t'(x) = -\frac{12}{x^2} + \frac{12}{(10 - 2x)^2} = \frac{12((10 - 2x)^2 - x^2)}{x^2(10 - 2x)^2} = 12 \frac{(10 - 3x)(10 - x)}{x^2(10 - 2x)^2}.$$

Из условий задачи  $10 - 2x > 0$  и  $x > 0$ , а при таких ограничениях на  $x$   $t' < 0$  при  $x < \frac{10}{3}$ ;  $t' > 0$  при  $x > \frac{10}{3}$ . Поэтому единственная точка экстремума  $x = \frac{10}{3}$  — точка минимума.

Значит наименьшее значение  $t$  принимает в этой точке.

$$\text{Находим } t\left(\frac{10}{3}\right) = 5\frac{2}{5}.$$

*Ответ:* 5 часов 24 минуты.

**918.** Пусть  $OP = x$ ,  $OS = y$ ,  $AD = a$ ,  $a \geq 20$ . Выразим через введённые переменные площади ковра и орнамента.

$$\begin{aligned} S_{\text{ковра}} &= xy = 4900, \quad S_{\text{орн.}} = S_{ADGM} + 2S_{BCD} + 2S_{ANT} = \\ &= a^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{y-a}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{x-a}{2}\right) = \frac{a^2}{2} + \frac{a}{4} \cdot (x+y). \end{aligned}$$

Докажем, что при любом фиксированном  $a$  площадь орнамента наименьшая, когда  $x = y$ .

$$S_{\text{орн.}} = \frac{a^2}{2} + \frac{a}{4} \cdot (x+y) = \frac{a^2}{2} + \frac{a}{4} \cdot \left(x + \frac{4900}{x}\right), \quad S'_{\text{орн.}}(x) = \frac{a(x^2 - 4900)}{4x^2}.$$

Легко видеть (по методу интервалов), что  $S'_{\text{орн.}}(x) > 0$  при  $x > 70$  и  $S'_{\text{орн.}}(x) < 0$  при  $-70 < x < 70$ . Поэтому наименьшее значение функция  $S_{\text{орн.}}(x)$  принимает при  $x = 70$ . При этом  $y = \frac{4900}{70} = 70$ .

$S_{\text{орн.}} = \frac{a^2}{2} + \frac{a}{4} \cdot (x+y) = \frac{a^2}{2} + 35a$ .  $f(a) = \frac{a^2}{2} + 35a$  — возрастающая функция при  $x \geq 17,5$ , значит наименьшее значение принимает при наименьшем возможном  $a$ , то есть при  $a = 20$ .

$$S_{\text{орн.наим.}} = \frac{20^2}{2} + 35 \cdot 20 = 200 + 700 = 900.$$

*Ответ:* 900.

**919.** Пусть  $OP = x$ ,  $OS = y$ ,  $AD = a$ . Выразим через введённые переменные площади ковра и орнамента.

$$\begin{aligned} S_{\text{ковра}} &= xy; \quad S_{\text{орн.}} = S_{ADGM} + 2S_{BCD} + 2S_{ANT} = \\ &= a^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{y-a}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{x-a}{2}\right) = \frac{a^2}{2} + \frac{a}{4} \cdot (x+y). \end{aligned}$$

Докажем, что при любом фиксированном  $a$  площадь ковра наибольшая, когда  $x = y$ .

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{4} \cdot (x+y) = 1000, \quad y = \frac{4000}{a} - 2a - x.$$

$$S_{\text{ковра}} = xy = x \cdot \left(\frac{4000}{a} - 2a - x\right), \quad S'_{\text{ковра}}(x) = \frac{4000}{a} - 2a - 2x. \text{ Легко}$$

видеть, что  $S'_{\text{ковра}}(x) > 0$  при  $x < \frac{2000}{a} - a$  и  $S'_{\text{ковра}}(x) < 0$  при

$x > \frac{2000}{a} - a$ . Поэтому наибольшее значение функция  $S_{\text{ковра}}(x)$  принимает при  $x = \frac{2000}{a} - a$ . При этом  $y = \frac{4000}{a} - 2a - \frac{2000}{a} + a = \frac{2000}{a} - a$ ;

$$S_{\text{ковра}} = \left( \frac{2000}{a} - a \right)^2.$$

$f(a) = \frac{2000}{a} - a$  — убывающая функция (так как является суммой двух убывающих), значит наибольшее значение принимает при наименьшем возможном  $a$ , то есть при  $a = 20$ .

$$S_{\text{ковра наиб.}} = \left( \frac{2000}{20} - 20 \right)^2 = 6400.$$

Ответ: 6400.

**920.** 1) Обозначим  $AB = FG = x$ ,  $AH = CD = y$ , тогда  $LM \leq \frac{y}{2}$ ,  $x > 0, y > 0$ . Имеем:  $S_{ACEG} = 5000 = (AB + BC) \cdot (AH + GH) =$   
 $= (x + 20) \cdot (y + 30) = x \cdot y + 20y + 30x + 600$ , откуда  $y = \frac{4400 - 30x}{x + 20}$ .

Площадь  $S$  многоугольника  $ABKLMDEFQPNH$  равна

$$\begin{aligned} S &= S_{ACEG} - S_{BCDO} + S_{KLMO} - S_{FGHO} + S_{NPQO} = \\ &= x \cdot y + 20y + 30x + 600 - 20y + 10 \cdot LM - 30x + 150. \end{aligned}$$

Так как  $LM \leq \frac{y}{2}$ , то  $S \leq x \cdot y + 750 + 5y$ . Подставим  $y = \frac{4400 - 30x}{x + 20}$  в  $S$ :

$$\begin{aligned} S &= \frac{x \cdot (4400 - 30x)}{x + 20} + 750 + 5x = \\ &= \frac{-30x^2 + 5000x + 37000}{x + 20} = -30x + \frac{5600x + 37000}{x + 20} = \\ &= -30x + 5600 - \frac{75000}{x + 20}. \end{aligned}$$

2) Исследуем функцию  $f(x) = -30x + 5600 - \frac{75000}{x + 20}$  при  $x > 0$  с помощью производной:  $f'(x) = -30 + \frac{75000}{(x + 20)^2} = \frac{75000 - 30 \cdot (x + 20)^2}{(x + 20)^2}$ .  
 $f'(x) = 0$  при  $x = 30$ ,  $f'(x) > 0$  при  $0 < x < 30$ ,  $f'(x) < 0$  при  $x > 30$ .  
 Поэтому наибольшее значение функции принимается в точке  $x_0 = 30$  и равно  $f_{\text{наиб.}} = f(30) = 3200$ .

3) При  $x = 30$  имеем:  $y = \frac{4400 - 30 \cdot 30}{50} = 70$ ,  $AC = x + 20 = 50$ ,  $CE = y + 30 = 100$ . Итак, если прямоугольник  $ACEG$  таков, что  $AC = 50$ ,  $CE = 100$ , то при  $NP = 35$  площадь многоугольника  $ABKLMDEFQPNH$  наибольшая и равна 3200.

Ответ: 3200 м<sup>2</sup>, 50 м, 100 м.

**921.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{1}{5}(2^{-x+1} + 2^{x-1})$ , равную отношению времени, требуемому на остывание станка, ко времени работы. С помощью производной найдём её минимум на отрезке  $[1; 5]$ .

$f'(x) = \frac{\ln 2}{5}(2^{x-1} - 2^{1-x})$ . При  $x < 1$   $f'(x) < 0$ , а при  $x > 1$   $f'(x) > 0$ , то есть  $x = 1$  — точка минимума. Таким образом, минимальное значение функции  $f$  равно  $f(1) = \frac{2}{5}$ . Теперь изобразим схематично на рис. 228 промежутки работы станка (соответствуют  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ ) и перерывы между ними ( $b_1, \dots, b_n$ ), и запишем условия, которые на них накладываются:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = 10, \\ b_k \geq \frac{2}{5}a_k, \text{ при всех } k = 1, \dots, n, \\ a_{n+1} \leq 5. \end{cases}$$

Отсюда:

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 10 - a_{n+1} \geq 5$ ;  $b_1 + \dots + b_n \geq \frac{2}{5}(a_1 + \dots + a_n) \geq \frac{2}{5} \cdot 5 = 2$ ,  
итого:  $a_1 + b_1 + \dots + a_n + b_n + a_{n+1} \geq 12$ , причём равенство здесь достигается, когда оно достигалось во всех неравенствах, то есть при  $a_1 = 1, \dots, a_n = 1, a_{n+1} = 5, n = 5$  время работы минимально и составляет 12 часов.



Рис. 228.

Ответ: 12.

**922.** Из условия следует, что абсцисса точки  $C$  принадлежит промежутку  $(1; 3)$ . Заметим, что заданная в условии функция больше нуля при  $x \in (-1; 1)$  и меньше нуля при  $x \in (1; 3)$ . Обозначим абсциссу точки  $A$  через  $t \in (-1; 1)$ , тогда абсцисса точки  $C$  равна  $t + 2$ ,  $AB = (t^2 - 1)(t^2 - 9)$ ,  $CD = -((t + 2)^2 - 1)((t + 2)^2 - 9)$ . Следовательно, площадь трапеции

$ABCD$  можно представить как функцию параметра  $t$ :

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}((t^2 - 1)(t^2 - 9) - ((t + 2)^2 - 1)((t + 2)^2 - 9)) \cdot 2 = \\ &= t^4 - 10t^2 + 9 - (t + 2)^4 + 10(t + 2)^2 - 9 = \\ &= t^4 - 10t^2 - (t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t + 16) + 10(t^2 + 4t + 4) = \\ &= t^4 - 10t^2 - t^4 - 8t^3 - 24t^2 - 32t - 16 + 10t^2 + 40t + 40 = \\ &= -8t^3 - 24t^2 + 8t + 24. \text{ Найдём наибольшее значение функции } S(t) \text{ на} \\ &\text{ промежутке } (-1; 1). \text{ Для этого найдём производную этой функции и ис-} \\ &\text{следуем её на экстремумы. } S'(t) = -24t^2 - 48t + 8. S'(t) = 0, \\ &-24t^2 - 48t + 8 = 0, 3t^2 + 6t - 1 = 0, t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+3}}{3} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3} \\ \Rightarrow t_1 &= \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3} \notin (-1; 1), t_2 = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3} \in (-1; 1). \text{ Так как} \end{aligned}$$

$$S'(t) = -24(t - t_1)(t - t_2), \text{ то } S'(t) > 0 \text{ при } t \in \left(-1; \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}\right) \text{ и}$$

$$S'(t) < 0 \text{ при } t \in \left(\frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}; 1\right). \text{ Следовательно, точка } t = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}$$

является единственной критической точкой в которой достигается максимум функции  $S(t)$  на промежутке  $(-1; 1)$ . Следовательно, трапеция  $ABCD$  имеет наибольшую площадь, когда абсцисса точки  $A$  равна  $\frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}$ . Наиболее удалённая от оси  $Oy$  точка трапеции  $ABCD$  — это

$$\begin{aligned} \text{любая точка отрезка } CD. \text{ Абсцисса такой точки равна } \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3} + 2 = \\ = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

**923.** План решения:

- 1) Выразим  $y$  через  $x$  и рассмотрим  $f(x, y)$  как функцию от  $x$ .
- 2) Найдём наименьшее значение этой функции, зависящее от параметра  $a$ .
- 3) Найдём наибольшее значение минимума как функции от  $a$ .

Ключевая идея: Если непрерывная функция на промежутке имеет единственную критическую точку — точку минимума, то в ней достигается наименьшее значение функции.

- 1) Из уравнения  $x^2y = a$  следует, что  $y = \frac{a}{x^2}$ . Обозначим через  $g(x) = f\left(x, \frac{a}{x^2}\right) = 3x + \frac{2a}{x^2}$ ;  $a \in [6; 48]$ ,  $x > 0$ .
- 2) Для нахождения наименьшего значения  $g(x)$  найдём её производную. Имеем,  $g'(x) = 3 - \frac{4a}{x^3}$ . Ясно, что  $g'(x) < 0$  при  $0 < x < \sqrt[3]{\frac{4a}{3}}$  и  $g'(x) > 0$  при  $x > \sqrt[3]{\frac{4a}{3}}$ . Следовательно,  $x_0 = \sqrt[3]{\frac{4a}{3}}$  — единственная критическая точка, и она является точкой минимума, а  $g(x_0) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{36a}$  — минимум и наименьшее значение функции при  $x > 0$ .
- 3) Заметим, что  $g(x_0)$  — возрастающая функция от  $a$  на отрезке  $[6; 48]$ . Следовательно, наибольшее значение  $g(x_0)$  достигается в правой границе отрезка  $[6; 48]$ , то есть при  $a = 48$ . Таким образом, наибольшее значение  $g(x_0)$  равно 18, а соответствующие значения  $x_0 = 4$  и  $y_0 = \frac{a}{x_0^2} = 3$ .

*Ответ:* 18 при  $a = 48$ ,  $x = 4$ ,  $y = 3$ .

**924.** Ключевая идея: Если непрерывная на промежутке функция имеет единственную критическую точку — точку минимума (максимума), то в ней достигается наименьшее (наибольшее) значение функции.

1. Из уравнения  $x^3y = a$  следует, что  $y = \frac{a}{x^3}$ . Обозначим через  $g(x) = f\left(x, \frac{a}{x^3}\right) = 48x + \frac{a}{x^3} - a$ ,  $a \in [1; +\infty]$ ,  $x > 0$ .
2. Для нахождения наименьшего значения  $g(x)$  найдём её производную. Имеем,  $g'(x) = 48 - \frac{3a}{x^4}$ . Ясно, что  $g'(x) < 0$  при  $0 < x < \frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{a}$  и  $g'(x) > 0$  при  $x > \frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{a}$ . Следовательно,  $x_0 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{a}$  — точка минимума, а  $g(x_0) = 32\sqrt[4]{a} - a$  — минимум и наименьшее значение функции при  $x > 0$ .
3. Найдём наибольшее значение  $p(a) := g(x_0)$  как функции от  $a$  на промежутке  $[1; +\infty)$ . Для этого найдём производную. Получаем,  $p'(a) = \frac{8}{a^{\frac{3}{4}}} - 1$ . Ясно, что  $p'(a) > 0$  при  $1 < a < 16$  и  $p'(a) < 0$  при

$x > 16$ . Следовательно,  $a = 16$  — точка максимума, и наибольшее значение  $g(x_0)$  достигается на промежутке  $[1; +\infty)$  при  $a = 16$ . Таким образом, наибольшее значение  $g(x_0)$  равно 48, а соответствующие значения  $x_0 = 1$  и  $y_0 = \frac{a}{x_0^3} = 16$ .

*Ответ:* 48 при  $a = 16$ ,  $x = 1$ ,  $y = 16$ .

**925.** План решения:

- 1) Выразим  $y$  через  $x$  и рассмотрим  $f(x, y)$  как функцию от  $x$ .
- 2) Найдём наибольшее значение этой функции, зависящее от параметра  $a$ .
- 3) Найдём наибольшее значение максимума как функции от  $a$ .

Ключевая идея: Если непрерывная функция на промежутке имеет единственную критическую точку — точку максимума, то в ней достигается наибольшее значение функции.

1) Из уравнения  $x^3y = a$  следует, что  $y = \frac{a}{x^3}$ . Обозначим через

$$g(x) = f\left(x, \frac{a}{x^3}\right) = 20 + \frac{a^2 - 4a}{x} - 12x; \quad a \in [1; 3], \quad x > 0.$$

2) Для нахождения наибольшего значения  $g(x)$  найдём её производную. Имеем,  $g'(x) = \frac{4a - a^2}{x^2} - 12$ . Ясно, что  $4a - a^2 > 0$  при  $a \in [1; 3]$ ,

поэтому  $g'(x) > 0$  при  $0 < x < \frac{1}{6}\sqrt{12a - 3a^2}$  и  $g'(x) < 0$  при

$x > \frac{1}{6}\sqrt{12a - 3a^2}$ . Следовательно,  $x_0 = \frac{1}{6}\sqrt{12a - 3a^2}$  — единственная критическая точка, и она является точкой максимума, а  $g(x_0) = 20 - 4\sqrt{12a - 3a^2}$  — максимум и наибольшее значение функции при  $x > 0$ .

3) Найдём наибольшее значение  $p(a) = g(x_0)$  как функции от  $a$  на промежутке  $[1; 3]$ . Ясно, что  $p(a)$  достигает наибольшего значения на отрезке  $[1; 3]$  в тех точках, в которых принимает наименьшее значение функция  $12a - 3a^2$ , графиком которой на отрезке  $a \in [1; 3]$  является парабола с ветвями, направленными вниз, и вершиной  $a = 2$ . Следовательно, наибольшее значение  $p(a)$  достигается на границах промежутка  $[1; 3]$ , то есть при  $a = 1$  или  $a = 3$ . Таким образом, наибольшее значение  $g(x_0) = p(1) = p(3) = 8$ , а соответствующие значения  $x_0 = 0,5$  и  $y_0 = \frac{a}{x_0^3} = 8$ .

*Ответ:* 8 при  $a = 1$ ,  $x = 0,5$ ,  $y = 8$ .

**926.** Фразу «для любого» заменим символом  $\forall$ . Переформулируем задачу. Найдите все значения  $x$  такие, что  $\forall a \notin (0; 2] (x^2 + a \neq (a - 6)x + 7)$ . Преобразуем последнюю формулу.  $\forall a \notin (0; 2] (a(x - 1) \neq (x - 1)(x + 7))$ . При  $x = 1$  получаем:  $\forall a \notin (0; 2] (a \cdot 0 \neq 0)$  — ложное утверждение,  $x = 1$  не удовлетворяет условию задачи. При  $x \neq 1$  получаем  $\forall a \notin (0; 2] (x + 7 \neq a)$ , что равносильно  $\forall a (a \notin (0; 2] \rightarrow (x + 7 \neq a)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall a (x + 7 = a \rightarrow a \in (0; 2]) \Leftrightarrow x + 7 \in (0; 2]$ , то есть  $x \in (-7; -5]$ .

*Ответ:*  $(-7; -5]$ .

**927.** Замена  $4^x = t$ ,  $t \in \left(\frac{1}{4}; 4\right]$  приводит выражения к виду  $t^2 + 5at$  и  $5 + 4at + 4t$ . Найдём, при каких значениях  $a$  выполняется условие  $t^2 + 5at \neq 5 + 4at + 4t$ ,  $t \in \left(\frac{1}{4}; 4\right]$ ;  $-t^2 + 4t + 5 \neq at$ . Разделив обе части неравенства на  $t (t \neq 0)$ , получим  $\frac{5}{t} - t + 4 \neq a$ . Рассмотрим функцию  $f(t) = \frac{5}{t} - t + 4$  на промежутке  $\left(\frac{1}{4}; 4\right]$ .  $f'(t) = -\frac{5}{t^2} - 1$ ,  $f'(t) < 0$ , значит функция  $f(t)$  убывает.  $f\left(\frac{1}{4}\right) = 23,75$ ;  $f(4) = 1,25$ .

Имеем:  $\frac{5}{t} - t + 4 \neq a$  при  $a \in (-\infty; 1,25) \cup [23,75; +\infty)$ .

*Ответ:*  $(-\infty; 1,25) \cup [23,75; +\infty)$ .

**928.** Замена  $5^x = t$ ,  $t \in \left[\frac{1}{25}; 1\right)$  приводит выражения к виду  $3 - 4at$  и  $t^2 + 5t(1 - a)$ . Найдём, при каких значениях  $a$  выполняется условие  $3 - 4at \neq t^2 + 5t - 5at$ ;  $t^2 + 5t - 3 \neq at$ . Разделив обе части неравенства на  $t (t \neq 0)$ , получаем  $t + 5 - \frac{3}{t} \neq a$ . Рассмотрим функцию  $f(t) = t + 5 - \frac{3}{t}$  на промежутке  $\left[\frac{1}{25}; 1\right)$ .  $f'(t) = 1 + \frac{3}{t^2}$ ,  $f'(t) > 0$ , значит функция  $f(t)$  возрастает.  $f\left(\frac{1}{25}\right) = -69,96$ ;  $f(1) = 3$ . Имеем:  $t + 5 - \frac{3}{t} \neq a$  при  $a \in (-\infty; -69,96) \cup [3; +\infty)$ .

*Ответ:*  $(-\infty; -69,96) \cup [3; +\infty)$ .

**929.** Сделаем замену  $3^{x^2} = t$ ,  $t \geq 1$ . Задача сводится к следующей: найдите все значения  $a$ , при которых неравенство  $t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 2 > 0$  выполняется при всех значениях  $t \in [1; +\infty)$ . Так как ветви параболы направлены вверх, это возможно в случаях 1) и 2) (см. рис. 229).

Пусть  $f(t) = t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 2$ ,  $D$  — дискриминант уравнения  $f(t) = 0$ .

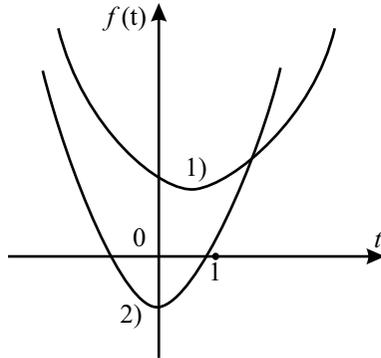


Рис. 229.

Случай 1).  $D < 0$ ,  $4(a^2 - 2a + 1) - 4a^2 + 8 < 0$ ;  $-8a < -12$ ;  $a > \frac{3}{2}$ ;  
 $a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .

Случай 2).  $\begin{cases} D \geq 0, \\ t_B < 1, \\ f(1) > 0; \end{cases} \begin{cases} a \leq \frac{3}{2}, \\ a > 0, \\ (a-1)(a+3) > 0; \end{cases} \Rightarrow a \in \left(1; \frac{3}{2}\right]$ .

Объединяя решения случаев 1) и 2), получим ответ  $a \in (1; +\infty)$ .

*Ответ:*  $(1; +\infty)$ .

**930.** Сделаем замену  $\log_3 x = t$ . При  $x \in [3; 9)$   $t \in [1; 2)$ . Задача сводится к следующей: найдите все значения  $a$ , для которых парабола  $f(t) = t^2 - (3a+2)t - 6$  не пересекает ось абсцисс на промежутке  $[1; 2)$ . Это условие может выполняться только в указанных на рисунке 230 четырёх случаях (ветви параболы направлены вверх). Рассмотрим эти случаи.

Пусть  $D$  — дискриминант уравнения  $f(t) = 0$ .

1)  $D < 0$ ;  $D = (3a+2)^2 + 24 > 0 \Rightarrow$  решений нет. Так как  $D > 0$  для любых  $a$ , в случаях 2), 3), 4) мы не будем писать условие  $D \geq 0$ .

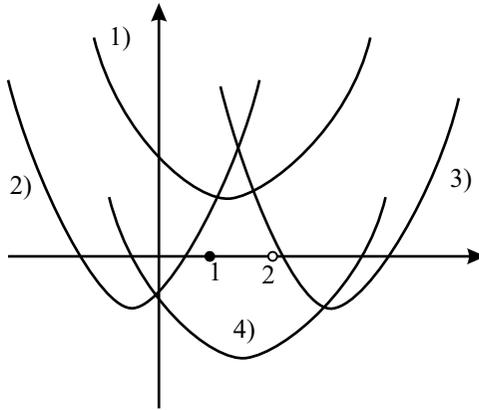


Рис. 230.

$$2) \begin{cases} t_B < 1, \\ f(1) > 0; \end{cases} \begin{cases} \frac{3a+2}{2} < 1, \\ 1 - (3a+2) \cdot 1 - 6 > 0; \end{cases} \begin{cases} a < 0, \\ a < -\frac{7}{3}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right).$$

$$3) \begin{cases} t_B \geq 2, \\ f(2) \geq 0; \end{cases} \begin{cases} \frac{3a+2}{2} \geq 2, \\ 4 - (3a+2) \cdot 2 - 6 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq \frac{2}{3}, \\ a \leq -1; \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$$

$$4) \begin{cases} f(1) < 0, \\ f(2) \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a > -\frac{7}{3}, \\ a \geq -1; \end{cases} \Rightarrow a \in [-1; +\infty).$$

Объединяя решения всех случаев, получим ответ.

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right) \cup [-1; +\infty).$$

**931.** Сделаем замену  $2^x = t$ ,  $t \in (4; 8]$ . Задача сводится к следующей: найдите все значения  $a$ , при которых парабола  $f(t) = t^2 + (1-a)t - 1$  не пересекает ось абсцисс на промежутке  $t \in (4; 8]$ . Так как ветви параболы направлены вверх, то условие задачи выполняется только в четырёх случаях, указанных на рисунке 231.

Пусть  $D$  — дискриминант уравнения  $f(t) = 0$ . 1)  $D < 0$ ;

$D = (1-a)^2 + 4 > 0$  для любого  $a \Rightarrow$  решений нет. В дальнейшем зная, что  $D > 0$ , будем опускать это условие.

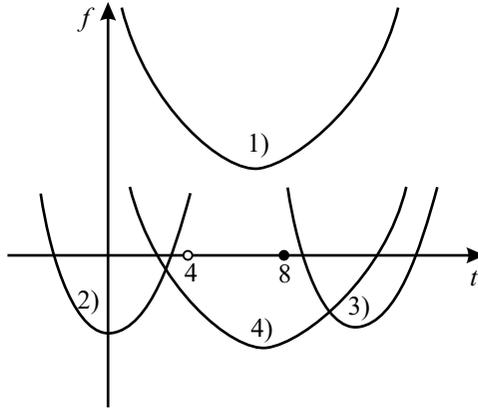


Рис. 231.

$$2) \begin{cases} t_B = \frac{a-1}{2} \leq 4, \\ f(4) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq 9, \\ a \leq \frac{19}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; \frac{19}{4}\right].$$

$$3) \begin{cases} t_B > 8, \\ f(8) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 17, \\ a < \frac{71}{8}; \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$$

$$4) \begin{cases} f(4) \leq 0, \\ f(8) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq \frac{19}{4}, \\ a > \frac{71}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{71}{8}; +\infty\right).$$

Объединяя решения всех случаев, получим ответ.

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{19}{4}\right] \cup \left(\frac{71}{8}; +\infty\right).$$

**932.** Преобразуем наше неравенство:  $\left|\frac{1}{2} \sin 2x + 1 - a \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2}\right| \leq \frac{3}{2}$ ,  
 $-3 \leq \sin 2x + 2 - a + a \cos 2x \leq 3$ ,  $a - 5 \leq \sin 2x + a \cos 2x \leq a + 1$ ,  
 $\frac{a-5}{\sqrt{a^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \sin 2x + \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \cos 2x \leq \frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}$ . В середине  
двойного неравенства стоит функция  $\cos \varphi \sin 2x + \sin \varphi \cos 2x =$   
 $= \sin(2x + \varphi)$ , где  $\varphi$  удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}, \\ \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}. \end{cases} \quad \text{Поэтому}$$

$\frac{a-5}{\sqrt{a^2+1}} \leq \sin(2x+\varphi) \leq \frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}$ . Так как это неравенство должно выполняться для любых значений  $x$ , то

$$\begin{cases} \frac{a-5}{\sqrt{a^2+1}} \leq -1, \\ \frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}} \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+1} \leq 5-a, \\ \sqrt{a^2+1} \leq a+1. \end{cases}$$

Решим каждое из неравенств системы:

$$1) \sqrt{a^2+1} \leq 5-a \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+1 \leq a^2-10a+25, \\ a \leq 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2,4, \\ a \leq 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$a \leq 2,4.$$

$$2) \sqrt{a^2+1} \leq a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+1 \leq a^2+2a+1, \\ a \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ a \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \geq 0. \text{ Решением системы неравенств будет } 0 \leq a \leq 2,4.$$

Ответ:  $[0; 2,4]$ .

**933.** Неравенство имеет смысл при  $a > 0, x \neq \pm 1$ .

1. При  $a = 1, 1 \frac{2x+4}{x-1} \geq 1 \frac{4x+8}{x+1}$  верно для любого  $x$ , кроме  $x = \pm 1$ . Но при  $a = 1, 2^a - 1 = 1$ . Значит, этот случай невозможен.

$$2. \text{ При } 0 < a < 1, a \frac{2x+4}{x-1} \geq a \frac{4x+8}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x+4}{x-1} - \frac{4x+8}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 1) \cup [3; +\infty).$$

$$\text{Так как } \begin{cases} 2^a > 0 \\ 3^a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a - 1 > -1 \\ 3^a - 3 > -3 \end{cases}, \text{ то}$$

а)  $\begin{cases} -1 < 2^a - 1 < 1 \\ -3 < 3^a - 3 \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2^a < 2 \\ 0 < 3^a \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq 0$ . Так как  $0 < a < 1$ , то этот случай невозможен.

$$\text{б) } \begin{cases} -1 < 2^a - 1 < 1 \\ -1 < 3^a - 3 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ \log_3 2 < a < \log_3 4 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (\log_3 2; 1).$$

в) Если  $3^a - 3 \geq 3$ , то  $a \geq \log_3 6$ , но  $0 < a < 1 \Rightarrow$  этот случай невозможен.

г) Если  $2^a - 1 \geq 3$ , то  $a \geq 2$  — также невозможно.

3. При  $a > 1$ ,  $\frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; -1) \cup (1; 3]$ .

$$а) \begin{cases} -2 \leq 3^a - 3 < -1 \\ 1 < 2^a - 1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq 3^a < 2 \\ 2 < 2^a \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq \log_3 2 \\ 1 < a \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset.$$

$$б) \begin{cases} 1 < 3^a - 3 \leq 3 \\ 1 < 2^a - 1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < 3^a \leq 6 \\ 2 < 2^a \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 4 < a \leq \log_3 6 \\ 1 < a \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (\log_3 4; \log_3 6].$$

Объединяя рассмотренные случаи, получим  $a \in (\log_3 2; 1) \cup (2 \log_3 2; 1 + \log_3 2]$ .

Ответ:  $(\log_3 2; 1) \cup (2 \log_3 2; 1 + \log_3 2]$ .

**934.** Неравенство имеет смысл при  $a > 0$ ,  $x \neq \pm 2$ .

1. При  $a = 1$ ,  $1 \frac{3x-1}{x-2} \geq 1 \frac{2x+1}{x+2}$  верно для любого  $x$ , кроме  $x = \pm 2$ . Но при  $a = 1$ ,  $4^a - 2 = 2$ . Значит этот случай невозможен.

$$2. \text{ При } a > 1, a \frac{3x-1}{x-2} \geq a \frac{2x+1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x-2} - \frac{2x+1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x(x+8)}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -8] \cup (-2; 0] \cup (2; +\infty).$$

$$\text{Так как при } a > 1 \begin{cases} 4^a - 2 > 0 \\ 2^a - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^a - 2 > 2 \\ 2^a - 1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a > \log_2 3 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (\log_2 3; +\infty).$$

3. При  $0 < a < 1$ ,  $\frac{x(x+8)}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-8; -2) \cup [0; 2)$ . Так как при

$$0 < a < 1 \begin{cases} 2^a - 1 > 0 \\ 4^a - 2 > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2^a - 1 < 2 \\ 0 \leq 4^a - 2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < \log_2 3 \\ \log_4 2 \leq a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right).$$

Объединяя все случаи, получим  $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (\log_2 3; +\infty)$ .

Ответ:  $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (\log_2 3; +\infty)$ .

**935.** Пусть  $f(a) = a(x^2 - x) + 9x^2 + 15x - 24 < 0$ . Так как  $a \in (-1; 3)$ , то для решения неравенства  $f(a) < 0$  достаточно, чтобы  $f(-1) \leq 0$ ,  $f(3) \leq 0$ , и если  $x^2 - x = 0$ , то  $9x^2 + 15x - 24 < 0$ .

Решив первое неравенство, получим  $x \in [-3; 1]$ , решением второго будет  $x \in [-2; 1]$ .  $x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$ .  $f(0) = -24 < 0, f(1) = 0$ , значит  $x = 1$  не удовлетворяет поставленным условиям.

Ответ:  $[-2; 1)$ .

**936.** Запишем исходное неравенство в виде неравенства относительно  $a$ :  $a(x^2 + 8x + 3) + 12x^2 + 6x - 54 < 0$ . Для решения неравенства достаточно, чтобы  $f(-2) \leq 0, f(3) \leq 0$ , и если  $x^2 + 8x + 3 = 0$ , то  $12x^2 + 6x - 54 < 0$ , где  $f(a) = a(x^2 + 8x + 3) + 12x^2 + 6x - 54$ . Решив первое неравенство, получим  $x \in [-2; 3]$ , решением второго будет  $x \in [-3; 1]$ .  $x^2 + 8x + 3 = 0, x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{13}$ .  $f(-4 - \sqrt{13}) > 0$ , значит  $x = -4 - \sqrt{13}$  не удовлетворяет поставленным условиям.  $f(-4 + \sqrt{13}) < 0$  и  $-4 + \sqrt{13} \in [-2; 1]$ .

Ответ:  $[-2; 1]$ .

**937.** Рассмотрим все возможные случаи для неравенства

$$y(x) = (k + 1)x^2 + (2k - 1)x + k - 4 > 0.$$

1.  $k + 1 = 0, k = -1$ . Неравенство имеет вид  $-3x - 5 > 0, x < -\frac{5}{3}$ .

Значит  $k = -1$  удовлетворяет условию.

2.  $k + 1 > 0$ . При  $k > -1$  ветви параболы  $y(x)$  направлены вверх, значит найдутся такие  $x < 1$ , при которых выполняется  $y(x) > 0$ .

3.  $\begin{cases} k + 1 < 0, \\ D \geq 0, \\ x_1 < 1, \end{cases}$  где  $D$  — дискриминант уравнения  $y(x) = 0, x_1$  — его

меньший корень. Тогда  $\begin{cases} k < -1, \\ 8k + 17 \geq 0, \\ \frac{-(2k - 1) - \sqrt{8k + 17}}{2(k + 1)} < 1, \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} k < -1, \\ k \geq -\frac{17}{8}, \\ \left[ \begin{array}{l} k > 1, \\ k < -1; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{17}{8} \leq k < -1.$$

Объединяя три случая, получаем  $k \in \left[-\frac{17}{8}; +\infty\right)$ .

Ответ:  $\left[-\frac{17}{8}; +\infty\right)$ .

**938.** Рассмотрим неравенство  $(k - 2)x^2 + (2k - 5)x + 2k - 3 > 0$ . Введём функцию  $y(x) = (k - 2)x^2 + (2k - 5)x + 2k - 3$ .

1) Пусть  $k - 2 = 0$ ,  $k = 2$ . Неравенство имеет вид  $-x + 1 > 0$ ,  $x < 1$ . Значит  $k = 2$  удовлетворяет условию.

2) Пусть  $k - 2 > 0$ . При  $k > 2$  ветви параболы  $y(x)$  направлены вверх, значит найдутся такие  $x < 2$ , при которых выполняется  $y(x) > 0$ .

3) Пусть  $k - 2 < 0$ . В этом случае условие задачи выполняется, когда выполняется система неравенств: 
$$\begin{cases} k - 2 < 0, \\ D > 0, \\ x_1 < 2; \end{cases} \quad \text{где } D \text{ — дискриминант}$$

уравнения  $y(x) = 0$ ,  $x_1$  — его меньший корень. Тогда

$$\begin{cases} k < 2, \\ -4k^2 + 8k + 1 > 0, \\ \frac{-(2k - 5) - \sqrt{-4k^2 + 8k + 1}}{2(k - 2)} < 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k < 2, \\ 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} < k < 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ \left[ \begin{array}{l} k > 2, 1, \\ k < 2; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} < k < 2.$$

Объединяя три случая, получаем  $k \in \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$ .

Ответ:  $\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$ .

**939.** 1. Пусть  $a = 0$ . Неравенство  $ax^2 + 2(1 - a)x + a - 3 < 0$  примет вид  $2x - 3 < 0$ ,  $x < 1,5$ . При  $a = 0$  условие задачи выполняется.

2. При  $a \in [-2; 0) \cup (0; 3]$  неравенство  $ax^2 + 2(1 - a)x + a - 3 < 0$  квадратное. Найдём корни уравнения  $ax^2 + 2(1 - a)x + a - 3 = 0$ , (1)

$$x_{1,2} = \frac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a + 1 - a^2 + 3a}}{a} = \frac{a - 1 \pm \sqrt{a + 1}}{a}.$$

При  $a + 1 < 0$  уравнение (1) не имеет действительных корней. Старший коэффициент  $a < -1$ , значит, квадратный трёхчлен, стоящий в левой части неравенства, отрицателен на всей числовой прямой. Учитывая, что  $a \in [-2; 0) \cup (0; 3]$  получаем  $a \in [-2; -1)$ .

3. Рассмотрим два случая  $a \in [-1; 0)$  и  $a \in (0; 3]$ .

3.1.  $a \in [-1; 0)$ , тогда  $x_1 < x_2$ . Знак старшего коэффициента совпадает со знаком неравенства, следовательно  $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ . По условию  $x \in [-4; 1]$ , тогда либо  $x_1 > 1$ , либо  $x_2 < -4$ . Случай  $x_2 < -4$  невозможен, так как на рассматриваемом промежутке  $x_2 > 0$ . Случай  $x_1 > 1$  воз-

можен, рассмотрим его.  $\frac{a-1+\sqrt{a+1}}{a} > 1$ ;  $\frac{\sqrt{a+1}-1}{a} > 0$ ;  $a \in [-1; 0)$ ,

значит  $\sqrt{a+1}-1 < 0$ ;  $\sqrt{a+1} < 1$ ;  $a < 0$ , следовательно  $a \in [-1; 0)$ .

3.2.  $a \in (0; 3]$ , тогда  $x_1 > x_2$ . Знак старшего коэффициента противоположен знаку неравенства, следовательно  $x \in (x_2; x_1)$ . По условию  $x \in [-4; 1]$ . Условие задачи выполняется, если:

$$\begin{cases} x_2 < -4, \\ x_1 > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-1-\sqrt{a+1}}{a} < -4, \\ \frac{a-1+\sqrt{a+1}}{a} > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5a-1-\sqrt{a+1}}{a} < 0, \\ \frac{\sqrt{a+1}-1}{a} > 0. \end{cases}$$

На промежутке  $(0; 3]$  система равносильна неравенству  $5a-1 < \sqrt{a+1}$ .

$$\text{а) } \begin{cases} 5a-1 < 0, \\ a+1 \geq 0, \\ 0 < a \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{1}{5}, \\ a \geq -1, \\ 0 < a \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{5}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5a-1 \geq 0, \\ 25a^2-10a+1 < a+1, \\ 0 < a \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{1}{5}, \\ a(25a-11) < 0, \\ 0 < a \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq a < \frac{11}{25}.$$

Из а) и б) следует, что  $a \in \left(0; \frac{11}{25}\right)$ . Учитывая все рассмотренные случаи,

получаем  $a \in \left[-2; \frac{11}{25}\right)$ .

Ответ:  $\left[-2; \frac{11}{25}\right)$ .

**940.** 1. Если  $a = 0$ , то неравенство примет вид  $2x-2 < 0$ ,  $x < 1$  и верно при любых  $x \in [-2; 0]$ .

2. Если  $0 < a \leq 4$ , то неравенство выполняется для любых  $x \in [-2; 0]$ , для  $f(x) = ax^2 + (2-3a)x + 2a-2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(-2) < 0, \\ f(0) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + (2-3a)(-2) + 2a-2 < 0, \\ 2a-2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 12a < 6, \\ a < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{1}{2}, \\ a < 1. \end{cases} \text{Итак, } \begin{cases} 0 < a \leq 4, \\ a < \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{2}.$$

3. Если  $-3 \leq a < 0$  и  $x_0 = \frac{3a-2}{2a}$  — координаты вершины параболы

$y = f(x)$ , то  $f(x) < 0$  для любых  $x \in [-2; 0] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq a < 0 \\ f(-2) < 0 \\ f(0) < 0 \\ \begin{cases} x_0 > 0 \\ x_0 < -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq a < 0 \\ a < \frac{1}{2} \\ a < 1 \\ \begin{cases} a < 0 \\ a > \frac{2}{3} \end{cases} \\ 0 < a < \frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq a < 0.$$

$$4. \begin{cases} a = 0, \\ -3 \leq a < 0, \\ 0 < a < \frac{1}{2}. \end{cases} \text{ Итак, } -3 \leq a < \frac{1}{2}.$$

Ответ:  $a \in \left[-3; \frac{1}{2}\right)$ .

**941.** 1) Сделаем замену  $t = \sin^2 x$ . Тогда  $\cos^2 x = 1 - t$ ,  $\cos^4 x = (1 - t)^2$ . Неравенство принимает вид:  $a(1 - t)^2 + 2t + 4a > 5$ ,  $t \in [0; 1]$ . Или  $a[(1 - t)^2 + 4] > 5 - 2t$ ,  $t \in [0; 1]$ . Так как  $(1 - t)^2 + 4 > 0$ , то должно выполняться неравенство  $a > \frac{5 - 2t}{(1 - t)^2 + 4}$  при всех  $t \in [0; 1]$ .

2) Найдём наибольшее значение функции  $f(t) = \frac{5 - 2t}{(1 - t)^2 + 4}$  на отрезке  $[0; 1]$ .

$$f'(t) = \frac{-2(t^2 - 2t + 5) - (5 - 2t)(2t - 2)}{[(1 - t)^2 + 4]^2} = \frac{2t(t - 5)}{[(1 - t)^2 + 4]^2}, f'(t) < 0$$

при  $t \in (0; 1)$ . Следовательно, на отрезке  $[0; 1]$  функция  $f(t)$  убывает и достигает своего наибольшего значения при  $t = 0$ .  $f_{\text{наиб}} = f(0) = 1$ .

3) Очевидно, что решением неравенства будут все значения  $a$ , при которых  $a > f_{\text{наиб}}$ , то есть  $a > 1$ .

Ответ:  $(1; +\infty)$ .

**942.** Обозначим  $f(x) = (a - 1)x^2 + (2a - 3)x - 3 + a - 3$ ;

Пусть  $D$  — дискриминант уравнения  $f(x) = 0$  ( $a \neq 0$ ).

$$D = (2a - 3)^2 - 4(a - 1)(a - 3) = 4a - 3, x_{\text{в}} = \frac{3 - 2a}{2(a - 1)}.$$

Возможны два случая.

1)  $a < 1$ . Ветви параболы  $y = f(x)$  направлены вниз (см. рис. 232).

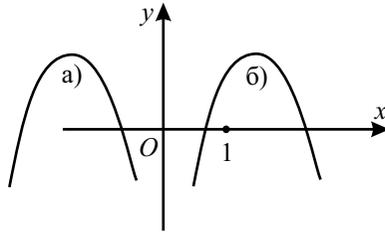


Рис. 232.

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \begin{cases} a < 1, \\ D > 0, \\ x_B < 1, \\ f(1) < 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ 4a - 3 > 0, \\ \frac{3 - 2a}{2(a - 1)} < 1, \\ 4a - 7 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ a > \frac{3}{4}, \\ a < \frac{5}{4}, \\ a < \frac{7}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{3}{4}; 1\right). \\
 \text{б) } \begin{cases} a < 1, \\ D > 0, \\ f(1) > 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ a > \frac{3}{4}, \\ a > \frac{7}{4}; \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}
 \end{aligned}$$

2)  $a > 1$ . В этом случае ветви параболы  $y = f(x)$  направлены вверх и условие задачи выполняется.

Теперь рассмотрим  $a = 1$ . Подставим это значение в неравенство  $f(x) > 0$ . Получим:  $-x - 2 > 0$ , то есть  $x < -2$ . Значит при  $a = 1$  условие задачи выполняется.

Объединяя решения всех рассмотренных случаев получим, что условия задачи выполняются при  $a > \frac{3}{4}$ .

Ответ:  $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$ .

**943.** Рассмотрим функцию  $f(a) = (7x^2 - 5x - 8)a - 3x^2 + 4x + 11$ . Так как  $f(a)$  — линейная функция,  $a \in [2; 4]$ , то для выполнения исходного неравенства достаточно выполнения двух условий:  $\begin{cases} f(2) \leq 0, \\ f(4) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{11} \leq x \leq 1, \\ \frac{8 - \sqrt{589}}{25} \leq x \leq \frac{8 + \sqrt{589}}{25}; \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{11} \leq x \leq 1.$$

Ответ:  $\left[-\frac{5}{11}; 1\right]$ .

**944.** Неравенство  $3^{a^2+ax} \leq 81$  равносильно неравенству  $a^2 + ax \leq 4$ , то есть  $ax \leq 4 - a^2$ . Рассмотрим три случая:

1)  $a > 0$ :  $x \leq \frac{4 - a^2}{a}$ . Для выполнения условия задачи необходимо

и достаточно выполнения условия:  $\frac{4 - a^2}{a} \geq 3$ ;  $\frac{4 - a^2 - 3a}{a} \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 3a - 4 \leq 0 \Leftrightarrow a \in [-4; 1]$ . Учитывая условие  $a > 0$ , получаем  $a \in (0; 1]$ .

2)  $a < 0$ :  $x \geq \frac{4 - a^2}{a}$ . Для выполнения условия задачи необходимо и до-

статочно выполнения условия  $\frac{4 - a^2}{a} \leq 0$ . Учитывая условие  $a < 0$ , получаем  $a \in [-2; 0)$ .

3)  $a = 0 \Rightarrow 4 \geq 0$  верно, значит  $a = 0$  удовлетворяет условию задачи. Объединяя решения всех случаев, получим  $a \in [-2; 1]$ .

Ответ:  $[-2; 1]$ .

**945.** Решим первое неравенство. Рассмотрим уравнение

$x^2 - (2a + 3)x + a^2 + 3a + 2 = 0$  как квадратное относительно  $x$ . Получим

$$x_{1,2} = \frac{2a + 3 \pm 1}{2}; x_1 = a + 1, x_2 = a + 2. \text{ Решение первого неравенства:}$$

$a + 1 < x < a + 2$  (так как  $a + 1 < a + 2$  для любых  $a$ ). Таким образом,

задача сводится к следующей: найти все значения  $a$ , при которых решение неравенства  $x^2 + (a + 1)x + 6a < 0$  содержит интервал  $(a + 1; a + 2)$ .

Так как ветви параболы  $f(x) = x^2 + (a + 1)x + 6a$  направлены вверх, то это возможно только в случае, изображённом на рис. 233. Таким образом должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} f(a + 1) \leq 0, \\ f(a + 2) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 1)^2 + (a + 1)^2 + 6a \leq 0, \\ (a + 2)^2 + (a + 1)(a + 2) + 6a \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 5a + 1 \leq 0, \\ 2a^2 + 13a + 6 \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

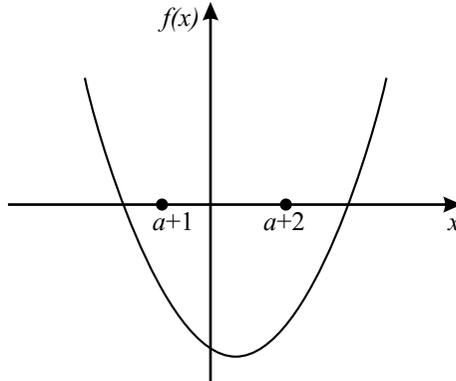


Рис. 233.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{21} - 5}{2}, \\ -6 \leq a \leq -\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[ \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}; -\frac{1}{2} \right] \text{ (см. рис. 234).}$$

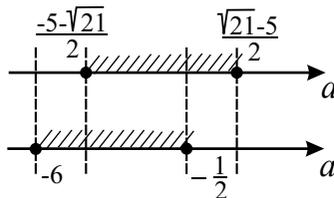


Рис. 234.

Ответ:  $\left[ \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}; -\frac{1}{2} \right]$ .

**946.** Исследуем неравенство  $x^2(2a-1) - (a+2)x - 10a < 0$ . Найдём корни уравнения  $x^2(2a-1) - (a+2)x - 10a = 0$ :

$$x_{1,2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{(a+2)^2 + 40a(2a-1)}}{2(2a-1)} \text{ (при } a \in (2; 3) \text{ знаменатель не}$$

$$\text{обращается в ноль); } x_{1,2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{81a^2 - 36a + 4}}{2(2a-1)},$$

$$x_{1,2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{(9a-2)^2}}{2(2a-1)}; x_{1,2} = \frac{a+2 \pm (9a-2)}{2(2a-1)}, \text{ (так как при}$$

$a \in (2; 3) \mid 9a - 2 \mid = 9a - 2$ ;  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = \frac{5a}{2a-1}$ . Значения  $x$  из интервала  $\left(-2; \frac{5a}{2a-1}\right)$  удовлетворяют исходному неравенству. Функция  $f(a) = \frac{5a}{2a-1}$  на интервале  $(2; 3)$  монотонно убывает и принимает значения из интервала  $\left(3; \frac{10}{3}\right)$ . Таким образом, значения  $x \in (-2; 3]$  удовлетворяют исходному неравенству при любом  $a \in (2; 3)$ .

Ответ:  $(-2; 3]$ .

**947.**  $2^{a^2-ax} \leq 16 \Leftrightarrow a^2 - ax \leq 4$ ;  $a^2 - ax - 4 \leq 0$ ;  $ax - a^2 + 4 \geq 0$ . Пусть  $f(x) = ax - a^2 + 4$  — линейная функция  $x$ .

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \geq 0, \\ f(3) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 4 \geq 0, \\ 3a - a^2 + 4 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4 \leq 0, \\ a^2 - 3a - 4 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq a \leq 2, \\ -1 \leq a \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 2.$$

Ответ:  $[-1; 2]$ .

**948.** Решим первое неравенство относительно  $x$ :

$$x \in \left( \frac{3a+2-|a-4|}{2}; \frac{3a+2+|a-4|}{2} \right).$$

Пусть  $f(x; a) = x^2 + (2a+1)x + 20a = a(2x+20) + x^2 + x$ . Тогда исходная задача равносильна системе:

$$\begin{cases} f(a+3; a) \leq 0, \\ f(2a-1; a) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + 33a + 12 \leq 0, \\ 8a^2 + 16a \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 11a + 4 \leq 0, \\ a(a+2) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-11 - \sqrt{105}}{2} \leq a \leq \frac{-11 + \sqrt{105}}{2}, \\ -2 \leq a \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq a \leq \frac{-11 + \sqrt{105}}{2}.$$

Ответ:  $\left[-2; \frac{\sqrt{105}-11}{2}\right]$ .

**949.**  $\sqrt{x^2+ax} > x-2$ . Так как  $x \in [4; 7]$ , то  $x-2 > 0$ . Тогда полученное неравенство равносильно такому:  $(\sqrt{x^2+ax})^2 > (x-2)^2$ . Решаем его, учитывая, что  $x^2+ax \geq 0$  для  $x \in [4; 7]$ .

$$x^2+ax > x^2-4x+4, (a+4)x-4 > 0.$$

Требование наличия в решении полученного неравенства отрезка  $[4; 7]$  равносильно тому, что функция  $y = (a+4)x-4$ , графиком которой явля-

ется прямая линия, в точках 4 и 7 принимает положительные значения.

$$\begin{cases} (a+4) \cdot 4 - 4 > 0, \\ (a+4) \cdot 7 - 4 > 0; \end{cases} \begin{cases} a+4-1 > 0, \\ 7a+24 > 0; \end{cases} \begin{cases} a > -3, \\ a > -\frac{24}{7}; \end{cases} \quad a > -3.$$

Ответ:  $(-3; +\infty)$ .

**950.**  $x^4 - x^2 + 3 = a(x^2 - 2) \Leftrightarrow x^4 - (a+1)x^2 + (3+2a) = 0$ .  $t = x^2$ ,  
 $t \in [1; 9]$ .  $t^2 - (a+1)t + (3+2a) = 0$ .

Данная задача эквивалентна следующей. Найдите все  $a$ , для которых квадратный трёхчлен  $f(t) = t^2 - (a+1)t + (3+2a)$  имеет ровно один корень на промежутке  $[1; 9]$ . Это имеет место в следующих случаях:

1)  $D = 0$ ,  $1 \leq t_0 < 9$ , где  $t_0$  — абсцисса вершины параболы  $y = f(t)$ ;

2)  $f(1) \cdot f(9) \leq 0$ ,  $f(1) \neq 0$ ;

3)  $f(1) = 0$ ,  $\begin{cases} t_1 t_2 = (3+2a) \geq 9, \\ t_1 t_2 = (3+2a) < 1, \end{cases}$  где  $t_1, t_2$  — корни уравнения

$f(t) = 0$  и, например,  $t_1 = 1$ .

1)  $\begin{cases} (a+1)^2 - 4(3+2a) = 0, \\ 1 \leq \frac{a+1}{2} < 9; \end{cases} \begin{cases} a^2 + 2a + 1 - 12 - 8a = 0, \\ a+1 < 18, \\ a+1 \geq 2; \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 6a - 11 = 0, \\ 1 \leq a < 17; \end{cases} \quad a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+11} = 3 \pm \sqrt{20} = 3 \pm 2\sqrt{5}$ .

$1 < 3 + 2\sqrt{5} < 17$ ;  $3 - 2\sqrt{5} < 1 \Rightarrow 3 + 2\sqrt{5}$  удовлетворяет условию задачи.

2)  $f(1) = 1 - (a+1) + 3 + 2a = a + 3$ ;

$f(9) = 81 - 9(a+1) + (3+2a) = -7a + 75$ . Тогда  $\begin{cases} (a+3)(7a-75) \geq 0, \\ a+3 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a < -3, \\ a \geq 10\frac{5}{7}. \end{cases}$

3)  $\begin{cases} 1 - (a+1) + (3+2a) = 0, \\ \begin{cases} 3+2a < 1, \\ 3+2a \geq 9; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} a = -3, \\ \begin{cases} a < -1, \\ a \geq 3; \end{cases} \end{cases} \Rightarrow a = -3$  удовле-

творяет условию задачи.

Ответ:  $(-\infty; -3] \cup \{3 + 2\sqrt{5}\} \cup [10\frac{5}{7}; +\infty)$ .

**951.** Пусть  $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 2$ , а  $g(x) = a^2x + 2$ . Построим эскизы

графиков функций  $y = |f(x)|$  и  $y = g(x)$  на промежутке  $(0; 3]$ .

$f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$  (см. рис. 235).

$f(0) = -2$ ,  $f(1) = -3\frac{2}{3}$ ,  $f(3) = 7$ . Видим, что для выполнения условий задачи необходимо и достаточно, чтобы угловой коэффициент прямой  $y = g(x)$  был не меньше, чем  $|f'(0)|$  и  $g(3) > 7$  (см. рис. 236).  $f'(0) = -3 \Rightarrow a^2 \geq 3$ ,  $\begin{cases} a \leq -\sqrt{3}, \\ a \geq \sqrt{3}. \end{cases}$   
 $g(3) = 2 + 3a^2 > 2 + 9 = 11$ .

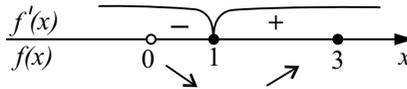


Рис. 235.

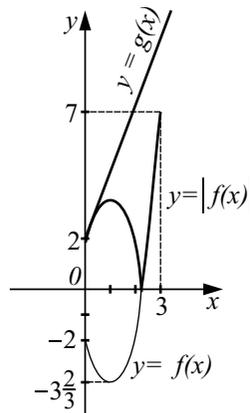


Рис. 236.

Ответ:  $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$ .

**952.** Перепишем данное неравенство в виде  $x^2 + 4x - ax(a + 1) + a^2(a - 4) \leq 0$ ,  $x^2 - x(a^2 + a - 4) + a^2(a - 4) \leq 0$ . Применяя теорему, обратную теореме Виета, к уравнению  $x^2 - x(a^2 + a - 4) + a^2(a - 4) = 0$ , получим  $(x - a^2)(x - a + 4) \leq 0$ .

Так как  $a^2 - a + 4 > 0$ ,  $a^2 > a - 4$  для любого значения  $a$ , то условие задачи равносильно условиям

$$\begin{cases} a - 4 \leq -2, \\ 3 \leq a^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2, \\ a \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty), \end{cases} \text{ откуда получаем}$$

$$a \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2].$$

Ответ:  $a \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2]$ .

953.1) Из первого уравнения:  $x \neq 0 \Rightarrow y = \frac{7}{x} - x^2 \Rightarrow y - 1 = \frac{7}{x} - (x^2 + 1)$ .

Так как  $y - 1 \geq 0$  из второго уравнения, то  $\frac{7}{x} \geq x^2 + 1$ . Так как  $x \neq 0$ , то  $x^2 + 1 > 1 \Rightarrow \frac{7}{x} > 1 \Rightarrow 0 < x < 7$ .

2) Так как  $x > 0$ , то второе уравнение равносильно следующему:

$x + \frac{\sqrt{y-1}}{x} - (1 + \sqrt{y-1}) = 0$ ,  $x^2 - (1 + \sqrt{y-1})x + \sqrt{y-1} = 0$ . Отсюда  $x = 1$  и  $x = \sqrt{y-1}$ .

а)  $x = 1$ . Из первого уравнения  $y = 6$ . (1; 6) — решение системы.

б)  $x = \sqrt{y-1}$ . Из первого уравнения  $x^2 + x^2 + 1 = \frac{7}{x}$ , то есть  $2x^2 + 1 = \frac{7}{x}$ . Обозначим  $f(x) = 2x^2 + 1$ ,  $g(x) = \frac{7}{x}$ .

График функции  $y = f(x)$  — парабола, ветви которой направлены вверх, координаты вершины (0; 1). График функции  $y = g(x)$  — гипербола, расположенная в первой и третьей четверти.

Очевидно, что графики функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  имеют единственную точку пересечения с абсциссой  $x_0$ , которая удовлетворяет условию  $0 < x_0 < 7$ . Таким образом имеем ещё одно решение.

Ответ: 2 решения.

954. ОДЗ:  $y > -5$ ,  $x \neq -1$ .

Попытаемся выразить  $y$  через  $x$  из первого уравнения системы.

$(x + 1)y = -x^3 - 3x^2 - 9x = (x + 1)(-x^2 - 2x - 7) + 7$ . Видим, что  $x = -1$  в паре ни с каким  $y$  не является решением полученного уравнения.

$y = -x^2 - 2x - 7 + \frac{7}{x+1}$  (\*),  $y + 5 = -x^2 - 2x - 2 + \frac{7}{x+1} > 0 \Rightarrow$

$\frac{7}{x+1} > (x+1)^2 + 1 \Rightarrow 0 < x+1 < 7$ . Пусть  $x+1 = t$ . Учтывая, что

$\sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x+1 = t$ , преобразуем второе уравнение системы к виду:  $t^2 - (1 + \sqrt{y+5})t + \sqrt{y+5} = 0$ ;  $t = 1$ ,  $t = \sqrt{y+5}$ .  $t = 1$  даёт решение  $x = y = 0$ .  $t = \sqrt{y+5}$  даёт  $x+1 = \sqrt{y+5}$ , то есть  $y = (x+1)^2 - 5$ . В сово-

купности с уравнением (\*) имеем систему  $\begin{cases} y = (x+1)^2 - 5, \\ y = -(x+1)^2 - 6 + \frac{7}{x+1}. \end{cases}$

$$(x+1)^2 - 5 = -(x+1)^2 - 6 + \frac{7}{x+1} \Leftrightarrow 2(x+1)^2 + 1 = \frac{7}{x+1} (**).$$

Нарисовав эскизы графиков функций  $y_1 = 2(x+1)^2 + 1$  и  $y_2 = \frac{7}{x+1}$ , легко убедиться, что уравнение (\*\*) имеет единственный корень  $x_0$ , принадлежащий промежутку  $(0; 1)$ . Действительно,  $y_1(0) < y_2(0)$ , а  $y_1(1) > y_2(1)$ .

Ответ: 2.

**955.** Так как  $3^{\sin^2 \pi x} \geq 1$  и  $\sqrt{1 + \cos \pi y} \geq 0$ , то первое уравнение системы может быть выполнено тогда и только тогда, когда  $\sin^2 \pi x = 0$  и  $1 + \cos \pi y = 0$ , то есть при  $x = k$  и при  $y = 2n + 1$ ;  $k, n \in \mathbb{Z}$ . Значит,  $x$  — любое целое число, а  $y$  — целое нечётное. Для того, чтобы второе уравнение системы имело смысл, нужно чтобы  $11 + 41x - 12x^2 > 0$ . Решением этого неравенства будет интервал:  $-\frac{1}{4} < x < \frac{11}{3}$ .

Так как  $x$  может быть только целым числом, то нам нужно рассмотреть лишь случаи:  $x = 0$ ;  $x = 1$ ;  $x = 2$ ;  $x = 3$ . При этих  $x$   $\log_3(11 + 41x - 12x^2) \neq 0$ . Значит, остаётся случай  $x^3 - 4xy + y^2 - y - 2x + 1 = 0$ .

1) При  $x = 0$ :  $y^2 - y + 1 = 0$ . Решений нет.

2) При  $x = 1$ :  $1 - 4y + y^2 - y - 2 + 1 = 0$ ;  $y^2 - 5y = 0$ ;  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 5$ . Так как  $y$  может быть только целым нечётным числом, то имеем одно решение  $x = 1$ ;  $y = 5$ .

3) При  $x = 2$ :  $8 - 8y + y^2 - y - 4 + 1 = 0$ ;  $y^2 - 9y + 5 = 0$ ;  $D = 81 - 20 = 61$ . Уравнение не имеет целых корней.

4) При  $x = 3$ :  $27 - 12y + y^2 - y - 6 + 1 = 0$ ;  $y^2 - 13y + 22 = 0$ ;  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 11$ . Так как  $y$  может быть только целым нечётным числом, получаем следующее решение  $x = 3$ ;  $y = 11$ .

Ответ: (1; 5), (3; 11).

**956.** Из первого уравнения  $\cos^2 \frac{\pi x}{2} = 0$  и  $\sqrt{1 - \cos \pi y} = 0 \Rightarrow x = 2k + 1$ ,  $y = 2n$ ;  $k, n \in \mathbb{Z}$ . То есть  $x$  — целое нечётное число;  $y$  — целое чётное число. ОДЗ исходной системы:  $17y + 10 - 6y^2 \geq 0$ ;  $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{10}{3}$ . Нам достаточно рассмотреть случаи:  $y = 0$  и  $y = 2$ . При этих значениях  $y = 0$  и  $y = 2$   $17y + 10 - 6y^2 \neq 0$ , тогда  $y^3 - 2xy + x^2 - 2x + 1 = 0$ . При  $y = 0$ :  $x = 1$  — является решением.

При  $y = 2$ :  $x^2 - 6x + 9 = 0$ ,  $x = 3$  — является решением.

Ответ:  $(1; 0)$ ,  $(3; 2)$ .

**957.** Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно  $x$ :  $x^2 + (2 - 4y)x + 2y^2 + 1 = 0$ . Его дискриминант  $D = 8(y^2 - 2y)$ . Для того, чтобы это уравнение (и вся система) имело решение, нужно, чтобы  $y^2 - 2y \geq 0$ . Второе уравнение имеет смысл при  $2y - y^2 \geq 0$ . Значит  $2y - y^2 = 0$ , то есть  $y_1 = 0$ ;  $y_2 = 2$ . Из первого уравнения находим:

$$1) y = 0: x^2 + 2x + 1 = 0; x = -1;$$

2)  $y = 2: x^2 - 6x + 9 = 0; x = 3$ . Используя найденные пары  $x$  и  $y$ , из второго уравнения найдём  $z$ :

$$1) \sqrt{z-1} + \sqrt{z} = 1; z = 1; \text{ значит } (-1; 0; 1) \text{ — решение системы;}$$

$$2) \sqrt{z+3} + \sqrt{z-2} = 1 \text{ — уравнение корней не имеет.}$$

Ответ:  $(-1; 0; 1)$ .

**958.** Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно  $x$ :  $x^2 + (1 - 3y)x + 2y^2 - y + 1 = 0$ .

Его дискриминант  $D = (1-3y)^2 - 4(2y^2 - y + 1) = y^2 - 2y - 3$ .  $D \geq 0$ , иначе первое уравнение системы и, значит, вся система решений не имеет. Для того, чтобы второе уравнение системы удовлетворяло ОДЗ, необходимо, чтобы  $3 + 2y - y^2 \geq 0$ . Эти два неравенства выполняются одновременно, только когда  $y^2 - 2y - 3 = 0$ . Решениями этого уравнения будут  $y_1 = -1$ ;  $y_2 = 3$ . При  $y = -1: x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ ;  
 $y = 3: x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$ . Получаем  $x_1 = -2$ ,  $y_1 = -1$  и  $x_2 = 4$ ,  $y_2 = 3$ . Найдём соответствующие этим парам  $z$ .

1) При  $x = -2$ ,  $y = -1$  второе уравнение системы имеет вид:  
 $\sqrt{z-1} + z = \sqrt{z-4}$ . ОДЗ этого уравнения  $z \geq 4$ . Ясно, что левая часть для любых  $z \geq 4$  больше правой. Поэтому это уравнение решений не имеет.

2) При  $x = 4$ ,  $y = 3$  имеем:  $\sqrt{z+3} + z = \sqrt{z+8}$ . Очевидно, что  $z = 1$  — корень этого уравнения. Покажем, что других корней оно не имеет. Запишем его в виде:  $\sqrt{z+8} - \sqrt{z+3} = z$ ;  $\frac{5}{\sqrt{z+8} + \sqrt{z+3}} = z$  ( $\sqrt{z+8} + \sqrt{z+3} \neq 0$ ). Ясно, что правая часть этого уравнения — непре-

рывная возрастающая функция, а левая его часть — функция непрерывная убывающая. Поэтому уравнение  $\sqrt{z+3}+z = \sqrt{z+8}$  не может иметь более одного корня.

Ответ: (4; 3; 1).

**959.** Преобразуем второе уравнение системы:

$$x^2y(2^{3x} - 64) + (x + 1)^3(64 - 2^{3x}) = 0, (2^{3x} - 64)(x^2y - (x + 1)^3) = 0.$$

Это равенство возможно в случаях:  $2^{3x} = 64$  или  $x^2y = (x + 1)^3$ . То есть

$x = 2$  или  $y = \frac{(x + 1)^3}{x^2}$ . При  $x = 2$  из первого уравнения находим, что

$y = 8$ . Это первое решение системы (2; 8).

Рассмотрим систему: 
$$\begin{cases} y = 6 + \sqrt{4x - x^2}, \\ y = \frac{(x + 1)^3}{x^2}. \end{cases} \quad \text{Её ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x \leq 4, \\ 6 \leq y \leq 8. \end{cases}$$

Построим эскизы графиков первого и второго уравнений системы (см. рис. 237).

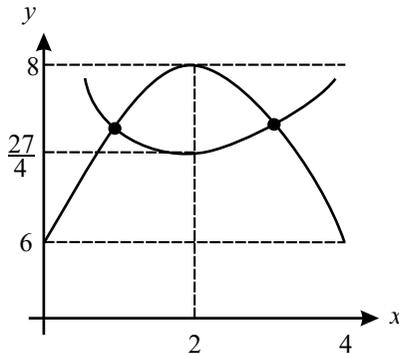


Рис. 237.

Из рисунка видно, что эта система имеет два решения, причём  $x$  и  $y$  попадают в ОДЗ системы. Всего же исходная система имеет три решения.

Ответ: 3.

**960.** Пусть  $t = 3^y > 0$ , тогда первое уравнение системы имеет вид:

$$3x^2 - 12t(x - 1) - 3x = 0 \Leftrightarrow 3(x - 1)(x - 4t) = 0. \text{ Отсюда } x = 1 \text{ или } x = 4t.$$

1) При  $x = 1$  второе уравнение имеет вид  $1 + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -4$ , значит (1; -4) — решение системы.

2) При  $x = 4t$  второе уравнение имеет вид  $64t^3 + y + 3 = 0$ . Но, так как  $t = 3^y$ , то  $y = \log_3 t$ . Рассмотрим функцию  $f(t) = 64t^3 + \log_3 t + 3$ ,

определённую при  $t > 0$ . Так как  $f'(t) = 64 \cdot 3 \cdot t^2 + \frac{1}{t \ln 3} > 0$  при  $t > 0$ , то  $f(t)$  возрастает на своей области определения. Так как  $f\left(\frac{1}{81}\right) < 0$  и  $f(1) > 0$ , то промежуток  $\left(\frac{1}{81}; 1\right)$  содержит единственный корень  $t_0$  уравнения  $f(t) = 0$ . Тогда  $(4t_0; \log_3 t_0)$  — второе решение системы.

Ответ: 2.

**961.** 1. ОДЗ:  $x \neq -3$ . Пусть  $t = 4^y > 0$ , тогда первое уравнение системы имеет вид  $2x^2 - 6tx + 4x - 12t = 0$ ,  $2x(x + 2) - 6t(x + 2) = 0$ ,  $2(x + 2)(x - 3t) = 0$ . Отсюда  $x = -2$  или  $x = 3t$ .

2. При  $x = -2$  второе уравнение имеет вид  $1 - |y - 2| = 0$ . Отсюда  $y = 3$  или  $y = 1$ . Получим два решения:  $(-2; 3)$  и  $(-2; 1)$ .

3. При  $x = 3t$  второе уравнение имеет вид  $\frac{1}{(3t + 3)^3} - |y - 2| = 0$ .

Так как  $t = 4^y$ , то  $y = \log_4 t$ . Рассмотрим  $f(t) = \frac{1}{(3t + 3)^3} - |\log_4 t - 2|$ , определённую при  $t > 0$ .

а) При  $t \geq 16$   $f(t) = \frac{1}{(3t + 3)^3} + 2 - \log_4 t$ .  $f'(t) = -\frac{9}{(3t + 3)^4} - \frac{1}{t \ln 4} < 0$  при  $t \geq 16 \Rightarrow f(t)$  убывает на данном промежутке. Так как  $f(16) > 0$  и  $f(64) < 0$ , то существует единственный корень  $t_1 \in (16; +\infty)$  уравнения  $f(t) = 0$ . Значит  $(3t_1; \log_4 t_1)$  — третье решение системы.

б) При  $0 < t < 16$   $f(t) = \frac{1}{(3t + 3)^3} - 2 + \log_4 t$ .  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 4} - \frac{9}{(3t + 3)^4} = \frac{(3t + 3)^4 - 9t \ln 4}{(3t + 3)^4 \cdot t \cdot \ln 4}$ . Рассмотрим  $g(t) = (3t + 3)^4 - 9t \ln 4$ ,  $t \in [0; 16)$ .  $g'(t) = 12(3t + 3)^3 - 9 \ln 4$ . Так как  $g''(t) = 12 \cdot 3^2 \cdot (3t + 3)^2 > 0$  ( $g'(t)$  возрастает) и  $g'(0) > 0$ , то  $g'(t) > 0$ . Значит  $g(t)$  возрастает и так как  $g(0) > 0$ , то  $g(t) > 0$  на своей области определения. Отсюда следует, что  $f'(t) > 0$ , то есть  $f(t)$  возрастает при  $t \in (0; 16)$ . Так как  $f(1) < 0$  и  $f(16) > 0$ , то существует единственный корень  $t_2 \in (1; 16)$  уравнения  $f(t) = 0$ . Значит  $(3t_2; \log_4 t_2)$  — четвёртое решение системы.

Ответ: 4.

**962.** ОДЗ:  $\begin{cases} x > 2, \\ y \neq 0. \end{cases}$

Упростим второе уравнение системы:  $\frac{y}{2} + \frac{\log_2(x - 2)}{y} = 1 + \frac{1}{2} \log_2(x - 2)$ ;

$$\frac{y^2 + 2 \log_2(x-2) - 2y - y \log_2(x-2)}{2y} = 0; (y-2)(y - \log_2(x-2)) = 0.$$

Отсюда  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = \log_2(x-2)$ .

1) Подставим  $y = 2$  в первое уравнение:  $4(x^2 + 2x + 1) + 1 - x = 0$ ;  $4x^2 + 7x + 5 = 0$ ;  $D < 0 \Rightarrow$  действительных корней нет.

2) Подставим  $y = \log_2(x-2)$  в первое уравнение:  $\log_2^2(x-2) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ . Пусть  $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ ,  $g(x) = \log_2^2(x-2)$ ;

$$f'(x) = -\frac{x-3}{(x+1)^3}, \text{ значит, на области определения при } x > 3 \text{ } f(x) \text{ убывает,}$$

а при  $x < 3$  возрастает;  $g'(x) = 2 \frac{\log_2(x-2)}{(x-2) \ln 2}$ , поэтому  $g(x)$  возрастает при  $x > 3$  и убывает при  $x < 3$ . Так как  $f(2,5) - g(2,5) < 0$ ,  $f(3) - g(3) > 0$  и  $f(4) - g(4) < 0$  и функции монотонны при  $x > 3$  и  $x < 3$ , то уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет 2 корня.

Ответ: 2.

**963.** ОДЗ:  $\begin{cases} x > 1, \\ y \neq 0. \end{cases}$  Упростим первое уравнение системы:

$$\frac{2}{3}y - \frac{1}{3} \log_3 3(x-1)^2 = \frac{2 \log_3(x-1)}{3y} - 1;$$

$$\frac{2y^2 - 2y \log_3(x-1) + 2y - 2 \log_3(x-1)}{3y} = 0;$$

$$(y+1)(2y - 2 \log_3(x-1)) = 0. \text{ Отсюда } y_1 = -1, y_2 = \log_3(x-1).$$

1. Подставим  $y = -1$  во второе уравнение:  $(x+3)^2 - 1 - 2x = 0$ ;  $x^2 + 4x + 8 = 0$ ;  $D < 0 \Rightarrow$  действительных корней нет.

2. Подставим  $y = \log_3(x-1)$  во второе уравнение:  $\log_3^2(x-1) = \frac{2x+1}{(x+3)^2}$ .

Рассмотрим функции  $f(x) = \frac{2x+1}{(x+3)^2}$  и  $g(x) = \log_3^2(x-1)$ , определённые при  $x > 1$ .  $f'(x) = \frac{2(2-x)}{(x+3)^3}$ , значит на области определения  $f(x)$

убывает при  $x > 2$ , а при  $1 < x < 2$  возрастает;  $g'(x) = \frac{2 \log_3(x-1)}{(x-1) \ln 3}$ ,

поэтому  $g(x)$  возрастает при  $x > 2$  и убывает при  $1 < x < 2$ . Так как

$f\left(\frac{4}{3}\right) - g\left(\frac{4}{3}\right) < 0$ ,  $f(2) - g(2) > 0$  и  $f(4) - g(4) < 0$  и функции монотонны при  $x > 2$  и  $1 < x < 2$ , то уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет 2 корня, которым соответствуют 2 решения исходной системы.

Ответ: 2.

**964.** ОДЗ:  $y \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ . Упростим первое уравнение системы:  $(2x - 5)(x - \log_3 y) = 0$ . Отсюда  $x_1 = 2,5$ ,  $x_2 = \log_3 y$ .

Подставим  $x_1 = 2,5$  во второе уравнение:  $2,5 = 3 - y(2,5 - 1)$ ;  $y = \frac{1}{3}$ ,

значит  $(2,5; \frac{1}{3})$  является решением системы.

Подставим  $x_2 = \log_3 y$  во второе уравнение:  $\log_3 y = 3 - y|\log_3 y - 1|$  (1).

1)  $\log_3 y \geq 1$ ,  $y \geq 3$ , тогда  $\log_3 y = 1 + \frac{2}{y+1}$ . Построим графики функций  $f(y) = \log_3 y$ ;  $g(y) = 1 + \frac{2}{y+1}$  (см. рис. 238). Видно, что имеется единственное решение  $y = y_0$  уравнения (1), которое удовлетворяет условию  $y \geq 3$ . Тогда  $(\log_3 y_0; y_0)$  — второе решение системы.

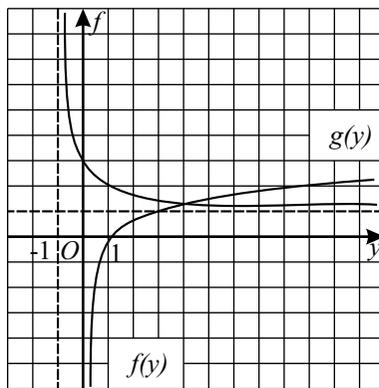


Рис. 238.

2) Рассмотрев аналогично случай, когда  $\log_3 y < 1$ ,  $0 < y < 3$  получаем, что в этом случае уравнение (1) не имеет решений.

Ответ: 2.

965. ОДЗ:  $\begin{cases} y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$  Упростим первое уравнение системы:

$$(x - 4)(x - \log_2 y) = 0. \text{ Отсюда } x_1 = 4, x_2 = \log_2 y.$$

Подставим  $x_1 = 4$  во второе уравнение:  $8 = 5y + 3$ ;  $y = 1$  — не входит в ОДЗ.

Подставим  $x_2 = \log_2 y$  во второе уравнение:  $2 \log_2 y = y |\log_2 y + 1| + 3$ .

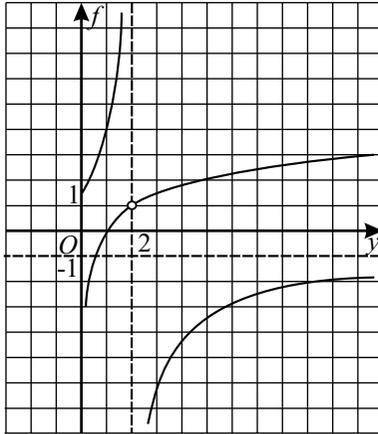


Рис. 239.

1. Проверкой убеждаемся, что  $y = \frac{1}{2}$  не является решением этого уравнения.

2.  $\log_2 y > -1, y > \frac{1}{2}$ , тогда  $\log_2 y = \frac{y+3}{2-y}$ . Построим графики функций

$f(y) = \log_2 y, g(y) = \frac{y+3}{2-y}$  на области определения (см. рис. 239). Видно,

что графики  $f(y)$  и  $g(y)$  не пересекаются. Значит при  $y > \frac{1}{2}$  решений нет.

3. Аналогично получаем, что при  $0 < y < \frac{1}{2}$  также нет решений.

Ответ: 0.

966. 1) Преобразуем сначала второе уравнение системы к более удобному виду

$$x + y = 1 - \sqrt{4xy + 3y - 7x - 5} \Leftrightarrow \sqrt{4xy + 3y - 7x - 5} = 1 - x - y. \text{ Воз-}$$

ведём обе части последнего уравнения в квадрат:  $4xy + 3y - 7x - 5 = (1 - x - y)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2xy - 5y + x^2 + 5x + 6 = 0$ . Решим это уравнение как квадратное относительно  $y$ :  $y_{1,2} = \frac{2x + 5 \pm 1}{2}$ ,  $y_1 = x + 3$ ,  $y_2 = x + 2$ .

2) Прологарифмируем обе части первого уравнения по основанию 3. Получим  $x + y \log_3 2 = -2$ .

3) Решим системы уравнений

$$\begin{cases} x + y \log_3 2 = -2, \\ y = x + 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y \log_3 2 = -2, \\ y = x + 2. \end{cases}$$

Решением первой системы будет пара  $(-\log_6 72; \log_6 3)$ . Решением второй — пара  $(-2; 0)$ .

4) Непосредственной проверкой убеждаемся, что обе пары являются решением исходной системы.

*Ответ:*  $(-2; 0)$ ,  $(-\log_6 72; \log_6 3)$ .

**967.** 1) Преобразуем сначала второе уравнение системы к более удобному виду  $x + y = \sqrt{4xy + 9x - y - 2} - 2 \Leftrightarrow x + y + 2 = \sqrt{4xy + 9x - y - 2}$  (\*).

Возведём обе части последнего уравнения в квадрат (ОДЗ находить здесь слишком сложно):

$(x + y + 2)^2 = 4xy + 9x - y - 2 \Leftrightarrow y^2 - 2xy + 5y + x^2 - 5x + 6 = 0$ . Решим это уравнение как квадратное относительно  $y$ :

$$y_{1,2} = \frac{2x - 5 \pm 1}{2}, y_1 = x - 2; y_2 = x - 3.$$

2) Прологарифмируем обе части первого уравнения по основанию 4. Получим  $y + x \log_4 5 = -2$ .

3) Решим системы уравнений

$$\begin{cases} y + x \log_4 5 = -2, \\ y = x - 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y + x \log_4 5 = -2, \\ y = x - 3. \end{cases}$$

Решением первой системы будет пара  $(0; -2)$ . Решением второй — пара  $(\log_{20} 4; \log_{20} 4 - 3)$ .

4) Непосредственной проверкой убеждаемся, что вторая пара не принадлежит области определения исходной системы, так как в уравнении (\*) при  $x = \log_{20} 4$ ,  $y = \log_{20} 4 - 3$  левая часть становится отрицательной.

*Ответ:*  $(0; -2)$ .

**968.** а) Преобразуем подкоренное выражение во втором уравнении системы:  $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x + 1)(x + 2)^2$  (легко заметить, что  $x = -1$  корень, так как  $-1 + 5 - 8 + 4 = 0$ ). Подкоренное выражение должно быть неотрицательно:  $(x + 1)(x + 2)^2 \geq 0$ , но  $x + 1 \neq 0$ , то  $x = -2$ ,  $x > -1$ .

б) Исследуем функцию  $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 2$  (найдем графиче-

ски число возможных корней). Производная:  $f'(x) = 12x^2 + 18x - 12$ .  
 Стационарные точки  $f'(x) = 0$ .  $x = -2$ ,  $x = \frac{1}{2}$ . Точки экстремума:

$f'(x) = 6(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ .  $x = -2$  — точка максимума,  $x = \frac{1}{2}$  — точка минимума (см. рис. 240).

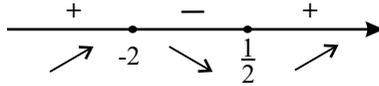


Рис. 240.

$f(-2) = 30$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{4}$ ,  $f(0) = 2$  (см. рис. 241).

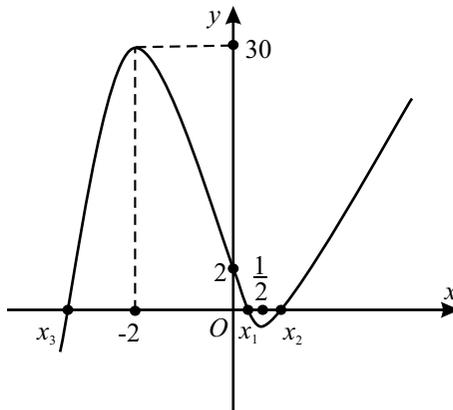


Рис. 241.

$x_3 < -2$ ,  $x_3 \notin \text{ОДЗ}$ .  $0 < x_1 < \frac{1}{2}$ ,  $x_2 > \frac{1}{2}$ .  $x_1$  и  $x_2$  — могут быть решениями.

Пусть  $x_1 = \alpha_1$ ,  $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$ ;  $x_2 = \alpha_2$ ,  $\alpha_2 > \frac{1}{2}$ . Проверим, могут ли они быть решениями второго уравнения:

$\frac{y}{\alpha_1 + 1} + 5 = 2^{\alpha_1 - y} \sqrt{\alpha_1^2(\alpha_1 + 5) + 4(2\alpha_1 + 1)} - \alpha_1 y$ . Так как  $\alpha_1 > 0$ , то корень существует.

$$\frac{y}{\alpha_1 + 1} + \alpha_1 y + 5 = 2^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y \sqrt{\alpha_1^2(\alpha_1 + 5) + 4(2\alpha_1 + 1)};$$

$$y\left(\frac{1}{\alpha_1 + 1} + \alpha_1\right) + 5 = 2^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y \sqrt{\alpha_1^2(\alpha_1 + 5) + 4(2\alpha_1 + 1)}$$

Вводя обозначения  $B = \left(\frac{1}{\alpha_1 + 1} + \alpha_1\right)$  и

$A = 2^{\alpha_1} \cdot \sqrt{\alpha_1^2(\alpha_1 + 5) + 4(2\alpha_1 + 1)}$ , получим уравнение

$$By + 5 = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y, \quad A > 0, \quad B > 0. \text{ Левая часть есть линейная возрастающая функция, а правая — показательная убывающая. Следовательно, они пересекаются только один раз, значит для } x = \alpha_1 \text{ существует единственный } y. \text{ Аналогично, рассуждаем для } x_2 = \alpha_2. \text{ Таким образом, система имеет два решения.}$$

*Ответ: 2.*

**969.** а) Преобразуем подкоренное выражение первого уравнения системы:

$4x^3 - 3x - 1 = (x - 1)(2x + 1)^2$  (легко заметить, что  $x = 1$  корень, так как  $4 - 3 - 1 = 0$ ). Подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$(x - 1)(2x + 1)^2 \geq 0; \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{Так как при } x > 0, \text{ то ОДЗ системы: } x \geq 1.$$

б) Исследуем функцию  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 3$ . Производная:

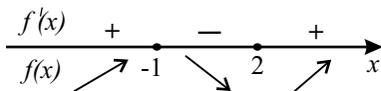


Рис. 242.

$f'(x) = 6(x + 1)(x - 2)$ . Точки экстремума:  $x = -1$  — точка максимума,  $x = 2$  — точка минимума (см. рис. 242).  $f(-1) = 4$ ;  $f(2) = 23$ .

Обозначим через  $x_1, x_2, x_3$  корни уравнения  $f(x) = 0$ . Тогда  $x_1 < -1$ ,  $-1 < x_2 < 0$ ,  $x_3 > 2$  (см. рис. 243).  $x_1$  и  $x_2$  не удовлетворяют условию  $x \geq 1$ . Пусть  $x_3 = \alpha$ . Подставим  $x_3 = \alpha$  в первое уравнение:

$$\alpha^{-y} \sqrt{4\alpha^3 - 3\alpha - 1} = \alpha y - 1. \text{ Обозначим } \sqrt{4\alpha^3 - 3\alpha - 1} = A.$$

$A \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^y = \alpha y - 1, (A > 0, \alpha > 2)$ . Левая часть равенства есть всюду

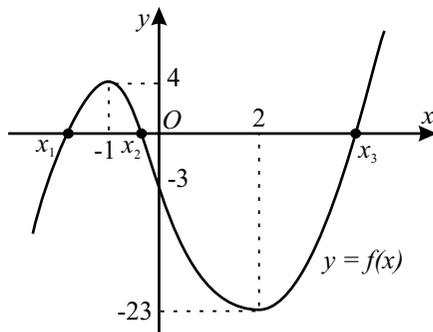


Рис. 243.

определённая убывающая, а правая — линейная возрастающая функции. Следовательно, уравнение имеет только один корень. Таким образом, система имеет только одно решение.

**970.** Разложим первое уравнение на множители:  $y^2(y-2) - 3^x(y-2) = 0$ ;  $(y-2)(y^2 - 3^x) = 0$ , что может быть только если  $y = 2$  или  $y^2 = 3^x$ . Рассмотрим эти два случая.

1.  $y = 2$ . Тогда из второго уравнения системы получим:

$$\frac{1}{3} \cdot 27^x - 2 \cdot 9^x + 3 \cdot 3^x - 1 = 0, \quad 27^x - 6 \cdot 9^x + 9 \cdot 3^x - 3 = 0. \text{ Обозначим}$$

$3^x = t$  ( $t > 0$ ). Тогда  $t^3 - 6t^2 + 9t - 3 = 0$ . Определим, сколько корней имеет это уравнение на промежутке  $t > 0$ . Построим график функции  $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 3$  (см. рис. 244).

$f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-1)(t-3)$ . Причём  $f(1) = 1$ ,  $f(3) = -3$ ,  $f(0) = -3$ . Из рисунка видно, что уравнение  $t^3 - 6t^2 + 9t - 3 = 0$  имеет три положительных ( $t > 0$ ) решения. Значит, исходная система при  $y = 2$  имеет три решения.

2.  $y^2 = 3^x$ . Тогда из второго уравнения системы получим:

$$27^x - 6 \cdot 9^x + 12 \cdot 3^x - 15 = 0.$$

Поступим аналогично случаю 1:  $3^x = t$  ( $t > 0$ ),  $t^3 - 6t^2 + 12t - 15 = 0$ .

$f'(t) = 3t^2 - 12t + 12 = 3(t^2 - 4t + 4) = 3(t-2)^2$ . Так как производная функции при переходе через точку  $t = 2$  не меняет знак, то в точке  $t = 2$  экстремума нет, и функция  $f(t)$  всюду возрастает ( $f'(t) \geq 0$ ). Причём  $f(0) = -15$ ,  $f(2) = -7$ . Из рисунка 245 видим, что уравнение  $t^3 - 6t^2 + 12t - 15 = 0$  имеет один положительный корень ( $t > 0$ ). Но  $y^2 = 3^x$ , отсюда  $y = \pm 3^{\frac{x}{2}}$ .

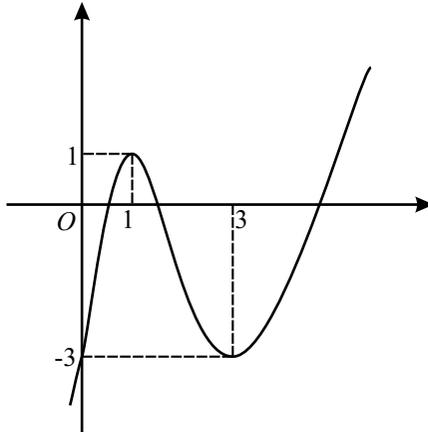


Рис. 244.

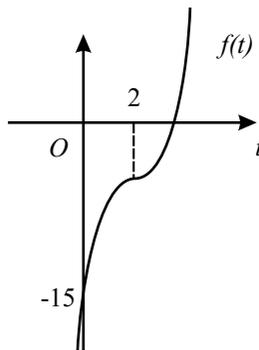


Рис. 245.

Значит, система имеет ещё два решения. А всего их пять.

*Ответ:* 5.

**971.** ОДЗ:  $\begin{cases} \sin x - \cos y > 0, \\ \sin x + \cos y > 0. \end{cases}$  Из второго уравнения получаем

$\log_2(\sin^2 x - \cos^2 y) = -1$ ,  $\sin^2 x - \cos^2 y = \frac{1}{2}$ . Из первого уравнения,

преобразовав его к виду  $5^{\cos x} = 5^{-\cos y}$ , получаем  $\cos x = -\cos y$ , откуда  $\cos^2 x = \cos^2 y$ .

Далее имеем:  $(1 - \cos^2 x) - \cos^2 y = \frac{1}{2}$ ;  $1 - 2 \cos^2 y = \frac{1}{2}$ ,  $\cos^2 y = \frac{1}{4}$ ,  
 $\cos y = \pm \frac{1}{2}$ .

1.  $\cos y = \frac{1}{2}$ ,  $y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $\cos x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

ОДЗ удовлетворяют решения  $(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n)$ ,  $k, n \in \mathbb{Z}$ .

2.  $\cos y = -\frac{1}{2}$ ,  $y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $\cos x = \frac{1}{2}$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

ОДЗ удовлетворяют решения  $(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n)$ ,  $k, n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n)$ ;  $(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n)$ ,  $k, n \in \mathbb{Z}$ .

**972.** 1) ОДЗ:  $x^3 - x^2 - 5x - 3 \geq 0$ ;  $(x+1)^2(x-3) \geq 0$ ,  $\begin{cases} x = -1, \\ x \geq 3. \end{cases}$

2) Рассмотрим функцию  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ .  $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$ ;  
 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ ,  $x = -\frac{2}{3}$ . При  $x \geq 3$   $f(x)$  возрастает (см. рис. 246), а,  
 значит, обращается в 0 не более одного раза.

Заметим, что  $x_1 = -1$  является корнем первого уравнения. Получим:

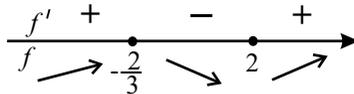


Рис. 246.

$x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = (x+1)(x^2 - 3x - 1)$ ;  $x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ ,  $x_3 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ .

$x_3 \in \text{ОДЗ}$ .

3) При  $x = -1$  второе уравнения системы примет вид:  $3 + 11^{-1-y} = y$ ;  
 $11^{-1-y} = y - 3$ .

Пусть  $f(y) = \left(\frac{1}{11}\right)^y - 11y + 33$  — монотонно убывает.

$f(3) = \left(\frac{1}{11}\right)^3 > 0$ ,  $f(4) = \left(\frac{1}{11}\right)^4 - 44 + 33 < 0$ . То есть  $f(y)$  обращается  
 в 0 на  $(3; 4)$ , а второе уравнение системы имеет корень  $y \in (3; 4)$ .

Если  $x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ , то  $3 < x_2 < 4$ . При этом значении  $x$  второе уравнение примет вид:  $k^{b-y} = y + c$ , где  $1 < k < 3$ ,  $3 < b < 4$ ,  $-3 < c < 2$ . В левой части уравнения стоит непрерывная убывающая функция, а в правой — непрерывная возрастающая. При  $y = -2$ : левая часть  $k^{b+2} > 0$ , правая часть:  $y + c < 0$ . При  $y = 4$ : левая часть  $k^{b-4} < 1$ , правая часть  $y + c > 1$ . Это означает, что существует корень  $y_2$ , причём  $-2 < y_2 < 4$ . Получаем ещё одно решение:  $(x_2; y_2)$ . Таким образом, исходная система имеет два решения.

Ответ: 2.

$$973. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} \sin x + \cos y > 0, \\ \cos x - \sin y > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = -\sin y, \\ (\sin x + \cos y)(\cos x - \sin y) = 2; \\ |\sin x| = |\cos y|, \\ \cos(\sin x + \cos y) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\sin y, \\ \cos x(\sin x + \cos y) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$1. \begin{cases} \sin x = -\cos y, \\ \cos x(\sin x - \sin x) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\cos y, \\ 0 = 1. \end{cases} \quad 0 \neq 1, \text{ решений нет.}$$

$$2. \begin{cases} \sin x = \cos y, \\ \cos x(\sin x + \sin x) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos y, \\ \sin 2x = 1; \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \Rightarrow$$

$$\cos y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

$$\text{Учитывая ОДЗ: } \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \quad \text{отсюда } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,$$

$$y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, k, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, k, n \in Z.$$

974. Рассматривая первое уравнение данной системы как квадратное относительно  $y$  с коэффициентами, зависящими от  $x$ , и выражая  $y$  через  $x$  по формуле корней квадратного уравнения, получаем:  $y = x$  или  $y = 3x$ . Аналогично, рассмотрев второе уравнение как квадратное относительно  $y$  и воспользовавшись теоремой Виетта, получим:  $y = \operatorname{tg} x$  или  $y = \sqrt{8 - x^2}$ . Таким образом, данная система равносильна совокупности следующих четырёх систем:

$$1) \begin{cases} y = x, \\ y^2 = 8 - x^2, y \geq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = 3x, \\ y^2 = 8 - x^2, y \geq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y = x, \\ y = \operatorname{tg} x, \\ 8 - x^2 \geq 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} y = 3x, \\ y = \operatorname{tg} x, \\ 8 - x^2 \geq 0; \end{cases}$$

Легко видеть, что первая и вторая системы имеют по одному решению:

$(2; 2)$  и  $(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{6}{\sqrt{5}})$  соответственно. Очевидно, что  $x = 0, y = 0$  является решением третьей системы. Покажем, что это единственное её решение. В силу нечётности функций  $y = x$  и  $y = \operatorname{tg} x$  достаточно показать, что система 3) не имеет решений при положительных  $x$ . На интервале  $(\frac{\pi}{2}; \pi)$  значения  $\operatorname{tg} x$  отрицательны, поэтому на этом интервале графики  $y = x$  и  $y = \operatorname{tg} x$  не пересекаются. Так как  $\pi^2 > 9$ , то при  $x \geq \pi$  не выполнено условие  $x^2 \leq 8$ . Чтобы показать, что на интервале  $(0; \frac{\pi}{2})$  также нет решений системы 3), исследуем поведение функции  $d(x) = \operatorname{tg} x - x$  на этом интервале:  $d'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0 \Rightarrow$  при  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$  функция  $d(x)$  возрастает, а поскольку  $d(0) = 0$ , то  $d(x) > 0$ , то есть  $\operatorname{tg} x > x$  при  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ , см. рис. 247.

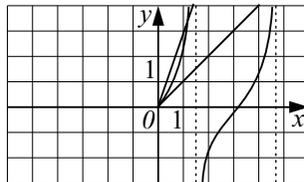


Рис. 247.

Далее, при  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$  графики  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = 3x$  имеют ровно одну общую точку, пусть  $x_0$  её абсцисса. Тогда четвёртая система имеет три решения:  $(0; 0), (\pm x_0; \pm \operatorname{tg} x_0)$ .

Таким образом, всего исходная система имеет 5 различных решений.

Ответ: 5

**975. 1.** Найдём множество значений функции  $f(x)$ .

$f'(x) = 4x^3 - 32 = 4(x^3 - 8) = 4(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ .  $f'(x) = 0$ ,  $x = 2$ .  
 $x = 2$  — единственная точка экстремума функции  $f(x)$ . Так как  $x = 2$  —

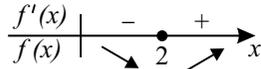


Рис. 248.

точка минимума (см. рис. 248), то наименьшее значение функции  $f(x)$  равно  $f(2) = 2$ ,  $E(f) = [2; +\infty)$ .

2.  $f(x) \geq 2$  при любом значении  $x$ , тогда  $(f(x) + 3) \geq 5$ , откуда

$$g(f(x) + 3) = -4.$$

3. Исходное уравнение примет вид  $f(g(x) + 1) - (-4) = 6$ ,  $f(g(x) + 1) = 2$ .

Как было показано выше,  $y = 2$  — минимум функции  $y = f(t)$  и  $f(t) = 2$

только при  $t = 2$ . Получаем  $g(x) + 1 = 2$ ;  $g(x) = 1$ ;

$$\left[ \begin{cases} g(x) = 1, \\ x \geq 5; \\ g(x) = 1, \\ x < 5; \end{cases} \right.$$

$$\left[ \begin{cases} -4 = 1, \\ x \geq 5; \\ \frac{2}{5-x} + \log_8(3x-4) = 1, \\ x < 5; \end{cases} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{5-x} + \log_8(3x-4) = 1, \\ x < 5. \end{array} \right. \quad (*)$$

Рассмотрим функцию  $h(x) = \frac{2}{5-x} + \log_8(3x-4)$ . Функция  $y = 5-x$  убывает, тогда  $y = \frac{2}{5-x}$  — возрастает. Функция  $h(x) = \frac{2}{5-x} + \log_8(3x-4)$

возрастающая, так как является суммой двух возрастающих, значит каждое своё значение принимает ровно один раз.

Подставив  $x = 2$ , получим  $h(2) = \frac{2}{3} + \log_8 2 = 1$ .  $x = 2$  удовлетворяет условию  $x < 5$ , значит является решением системы (\*), а значит и решением исходного уравнения.

Ответ: 2.

**976.** Докажем, что для любых значений  $x$  выполняется неравенство  $-4 < 1 - f(x) < 2$ .

1)  $f(x) - 5 = \frac{x+8}{x^2+2} - 5 = \frac{-5x^2+x-2}{x^2+2}$ . Дискриминант квадратного уравнения  $-5x^2+x-2=0$   $D = -39 < 0$ , значит для любых значений  $x$  верно  $-5x^2+x-2 < 0$ ,  $f(x) - 5 < 0$ ,  $f(x) < 5$ .

2)  $f(x) + 1 = \frac{x+8}{x^2+2} + 1 = \frac{x^2+x+10}{x^2+2}$ . Дискриминант квадратного уравнения  $x^2+x+10=0$   $D = -39 < 0$ , значит для любых значений  $x$  верно  $x^2+x+10 > 0$ ,  $f(x) + 1 > 0$ ,  $f(x) > -1$ .

Итак, справедливо  $-1 < f(x) < 5$ , тогда  $-5 < -f(x) < 1$ ,  $-4 < 1 - f(x) < 2$ , откуда  $g(1 - f(x)) = 2 - (1 - f(x)) = 1 + f(x)$ . Исходное уравнение примет вид  $f(g(x)) + 1 + f(x) = f(x) + 2$ ,  $f(g(x)) = 1$ .  $\frac{g(x)+8}{g^2(x)+2} = 1$ ;  $g^2(x) - g(x) - 6 = 0$ ; или  $g(x) = -2$ ,  $g(x) = 3$ . Заметим, что для любых значений  $x$  верно  $-x^2 - 6x - 10 < 0$ , и для  $x > 2$  выполняется  $-\frac{8}{1+x} + \log_3(6+x) + 3 > 0$ .

$$1) \quad g(x) = -2. \quad \left\{ \begin{array}{l} -x^2 - 6x - 10 = -2, \\ x \leq -4, \\ 2 - x = -2, \\ -4 < x \leq 2; \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{l} x^2 + 6x + 8 = 0, \\ x \leq -4, \\ x = 4, \\ -4 < x \leq 2; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2, \\ x = -4, \\ x \leq -4; \end{array} \right. \quad x = -4.$$

$$2) \quad g(x) = 3. \quad \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2 - x = 3, \\ -4 < x \leq 2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{-8}{1+x} + \log_3(6+x) + 3 = 3, \\ x > 2; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = -1, \\ -4 < x \leq 2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{-8}{1+x} + \log_3(6+x) = 0, \\ x > 2; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{l} x = -1, \\ \log_3(6+x) = \frac{8}{1+x}, \\ x > 2. \end{array} \right.$$

Функция  $y = \log_3(6+x)$  возрастает, а  $y = \frac{8}{1+x}$  — убывает при  $x > 2$ , значит при  $x > 2$  уравнение  $\log_3(6+x) = \frac{8}{1+x}$  имеет единственное решение. Проверкой убеждаемся, что  $x = 3$  является решением.

Итак, решениями исходного уравнения являются числа  $-4$ ;  $-1$ ;  $3$ .

Ответ:  $-4$ ;  $-1$ ;  $3$ .

**977.** 1. Докажем, что  $f(x) - 44 < 1$  для любых значений  $x$ .

$f'(x) = -6x^5 + 32 = -6\left(x^5 - \frac{32}{6}\right)$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $x = \frac{2}{\sqrt[5]{6}}$  — точка максимума функции  $f(x)$  (см. рис. 249), значит  $f(x)$  принимает наибольшее значение при  $x = \frac{2}{\sqrt[5]{6}}$ .  $f\left(\frac{2}{\sqrt[5]{6}}\right) = -\frac{32}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt[5]{6}} + 32 \cdot \frac{2}{\sqrt[5]{6}} + 5 = 32 \cdot \frac{2}{\sqrt[5]{6}} \cdot \frac{5}{6} + 5 =$

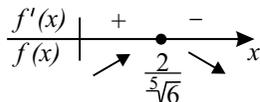


Рис. 249.

$$= 40 \cdot \frac{4}{3\sqrt[5]{6}} + 5. \quad f(x) - 45 < f\left(\frac{2}{\sqrt[5]{6}}\right) - 45 = 40\left(\frac{4}{3\sqrt[5]{6}} - 1\right) =$$

$$= 40\left(\sqrt[5]{\frac{1024}{1458}} - 1\right) < 0, \quad f(x) - 44 < 1.$$

2.  $g(f(x) - 44) = 3$ , тогда исходное уравнение примет вид  $3 + f(g(x)) = 8$ ;  $f(g(x)) = 5$ ;  $-g^6(x) + 32g(x) = 0$ ;  $g(x)(g^5(x) - 32) = 0$ ;  $g(x) = 0$  или

$$g(x) = 2. \left[ \begin{cases} \log_2 x + (x-1)^3 = 0, \\ x > 1, \\ \log_2 x + (x-1)^3 = 2, \\ x > 1. \end{cases} \right. \quad \text{Функция } \log_2 x + (x-1)^3 \text{ строго}$$

возрастает, значит каждое своё значение принимает ровно один раз. При  $x > 1$   $\log_2 x + (x-1)^3 > 0$ , значит уравнение  $g(x) = 0$  не имеет решений. Подбором находим  $x = 2$  — корень уравнения  $\log_2 x + (x-1)^3 = 2$ ,  $x = 2$  удовлетворяет условию  $x > 1$ .

*Ответ:* 2.

**978.** Найдём

$$f(x) + f(-x) = 3^x + 2x - \ln 5 + 3^{-x} + 2(-x) - \ln 5 = 3^x + 3^{-x} - 2 \ln 5.$$

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= 3^x + \frac{1}{3^x} - 2 \ln 5 = \frac{(3^x)^2 + 1 - 2 \cdot 3^x + 2 \cdot 3^x}{3^x} - 2 \ln 5 = \\ &= \frac{(3^x - 1)^2 + 2 \cdot 3^x}{3^x} - 2 \ln 5 = \frac{(3^x - 1)^2}{3^x} + 2 - 2 \ln 5 \geq 2 - 2 \ln 5. \end{aligned}$$

как  $\ln 5 < 2$ ,  $-2 \ln 5 > -4$ , то  $2 - 2 \ln 5 > -2 \Rightarrow f(x) + f(-x) > -2 \Rightarrow g(f(x) + f(-x)) = \ln 5$ . Заданное уравнение примет вид  $f(g(x)) + \ln 5 = 5$ ;  $3^g + 2g - \ln 5 + \ln 5 = 5$ ;  $3^g + 2g = 5$ , где  $g = 5^{x^2+2x-2} - 4$ .

$y = 3^g + 2g$  — возрастающая функция как сумма двух возрастающих, значит, любое значение может принимать не более одного раза;  $y(1) = 3^1 + 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow g = 1$  — единственный корень уравнения  $3^g + 2g = 5$ .

$g(x) = 1$  может быть только при  $x < -2$ ;  $5^{x^2+2x-2} - 4 = 1$ ;  $5^{x^2+2x-2} = 5$ ;  $x^2 + 2x - 2 = 1$ ;  $x^2 + 2x - 3 = 0$ ;  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -3$ . Так как  $x < -2$ ,  $x = -3$  — корень уравнения.

*Ответ:* -3.

**979.** Обозначим  $t = x^{\frac{3}{2}}$  и перепишем уравнение в виде

$$\frac{5t^2}{5t^2 - 7t + 6} + \frac{2t^2}{5t^2 - t + 6} = t, t \left( \frac{5t}{5t^2 - 7t + 6} + \frac{2t}{5t^2 - t + 6} - 1 \right) = 0.$$

Очевидно, что  $t = 0$  — корень последнего уравнения, который приводит нас к одному из корней исходного уравнения  $x = 0$  (это значение удовлетворяет исходному уравнению).

$$\text{Решим теперь уравнение } \frac{5t}{5t^2 - 7t + 6} + \frac{2t}{5t^2 - t + 6} = 1.$$

Поскольку значение  $t = 0$  не является его корнем, разделим числитель и знаменатель каждой дроби на  $t$ :

$$\frac{5}{5t + \frac{6}{t} - 7} + \frac{2}{5t + \frac{6}{t} - 1} = 1.$$

Введём новую переменную  $u = 5t + \frac{6}{t}$ . Тогда уравнение примет вид

$\frac{5}{u-7} + \frac{2}{u-1} = 1$ . Далее получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} 5(u-1) + 2(u-7) = (u-7)(u-1), \\ u \neq 1, u \neq 7, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} u^2 - 15u + 26 = 0, \\ u \neq 1, u \neq 7. \end{cases}$$

Отсюда  $u_1 = 13, u_2 = 2$ . Возвращаясь к переменной  $t$ , получим два квадратных уравнения: 1)  $5t + \frac{6}{t} = 13; 5t^2 - 13t + 6 = 0; t_1 = 2, t_2 = 0,6;$

2)  $5t + \frac{6}{t} = 2; 5t^2 - 2t + 6 = 0$  — уравнение не имеет действительных корней.

Вернёмся к исходной переменной, решив следующие два уравнения:

$$x^{\frac{3}{2}} = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}; x^{\frac{3}{2}} = 0,6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{25}}.$$

убеждаемся, что значения  $x_1 = \sqrt[3]{4}$  и  $x_2 = \sqrt[3]{\frac{9}{25}}$  — корни исходного уравнения.

Ответ:  $0; \sqrt[3]{\frac{9}{25}}; \sqrt[3]{4}$ .

**980.** 1. Оценим множество значений функции  $f(x)$ . Если  $x < 3$ , то  $2x - 1 < 5$ . Если  $x \geq 3$ , то  $-5 \leq 3 \cos x - 2 \leq 1$ . Следовательно,  $f(x) < 5$  при всех значениях  $x$ . Так как  $a_{n+1} = f(a_n)$  и  $a_n > 0$ , то  $0 < a_n < 5$  при  $n > 1$ .

2. Так как  $a_{40} = 1$ , то возможны два случая.

а)  $0 < a_{39} < 3$ . Найдём  $a_{39}$  из уравнения  $2a_{39} - 1 = 1, a_{39} = 1 \in (0; 5)$ .  
б)  $3 \leq a_{39} < 5$ . Найдём  $a_{39}$  из уравнения  $3 \cos(a_{39}) - 2 = 1, \cos(a_{39}) = 1, a_{39} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ . Ни для какого  $n \in \mathbb{Z}, 2\pi n \notin (0; 5)$ . Значит, этот случай невозможен.

Аналогично доказывается, что  $a_{38} = a_{37} = \dots = a_2 = 1$ . Таким образом,  $a_5 + a_8 + a_{11} = 1 + 1 + 1 = 3$ .

Ответ: 3.

**981.** 1. По условию  $a_2 = f(a_1)$ , значит,  $a_2$  принадлежит множеству значений функции  $f$ . Оценим это множество сверху.

Если  $x < 2$ , то  $x - 2 < 0$  и  $\frac{2x+8}{x-2} = 2 + \frac{12}{x-2} < 2$ .

Если  $x \geq 2$ , то  $\sqrt[5]{\frac{x-5}{x-1}} = \sqrt[5]{1 - \frac{4}{x-1}} < 1$ , а

$\frac{8x-7}{2x+3} = 4 - \frac{19}{2x+3} \geq 4 - \frac{19}{7} > 0$ . Следовательно,  $\sqrt{\frac{8x-7}{2x+3}}$  определён и  $\sqrt{\frac{8x-7}{2x+3}} = \sqrt{4 - \frac{19}{2x+3}} < 2$ . Значит,  $\sqrt[5]{\frac{x-5}{x-1}} + \sqrt{\frac{8x-7}{2x+3}} < 3$  при  $x \geq 2$ . Поэтому  $f(x) < 3$  при всех  $x$ . Таким образом  $a_2 < 3$ .

2. Так как  $a_3 = f(a_2) = f(f(a_1))$ , то  $a_3$  принадлежит множеству значений функции  $f(f(x))$ . Оценим его сверху.

Если  $f(x) < 2$ , то  $f(f(x)) < 2$ .

Если  $2 \leq f(x) < 3$ , то

$$\sqrt{\frac{f(x)-5}{f(x)-1}} < 0, \text{ а } \sqrt{\frac{8f(x)-7}{2f(x)+3}} = \sqrt{4 - \frac{19}{2f(x)+3}} < 2. \text{ Значит,}$$

$f(f(x)) < 2$  для всех  $x$ . Поэтому  $a_3 < 2$ .

Получаем  $a_n < 2, n = 3, 4, \dots, 99$ .

3. Так как  $a_{99} = 0, a_{98} < 2$  и  $f(a_{98}) = a_{99}$ , то  $\frac{2a_{98}+8}{a_{98}-2} = 0; 2a_{98} = -8; a_{98} = -4$ .

Так как  $a_{98} = -4, a_{97} < 2$  и  $f(a_{97}) = a_{98}$ , то  $\frac{2a_{97}+8}{a_{97}-2} = -4;$   
 $2a_{97} + 8 = -4a_{97} + 8, a_{97} = 0$ .

Аналогично,  $a_{96} = -4, a_{95} = 0, a_{94} = -4, a_{93} = 0, \dots, a_{40} = -4, \dots, a_{33} = 0$ . Значит,  $a_{33} + a_{40} = -4$ .

Ответ:  $-4$ .

**982.** 1. По условию  $a_{n+1} = f(a_n), n = 1, 2, \dots, 25$ . Это значит, что  $a_n$  принадлежит множеству значений функции  $f(x)$  при  $1 < n \leq 25$ . Оценим это множество.

При  $x < 0, f(x) = 4 \cos \frac{\pi x}{12} - 2$ . Тогда  $-1 \leq \cos \frac{\pi x}{12} \leq 1;$   
 $-4 \leq 4 \cos \frac{\pi x}{12} \leq 4; -6 \leq 4 \cos \frac{\pi x}{12} - 2 \leq 2; -6 \leq f(x) \leq 2$ .

При  $x \geq 0, f(x) = \frac{32}{3x+16} - 6$ . Тогда, с одной стороны,  $3x \geq 0;$   
 $3x + 16 \geq 16; \frac{32}{3x+16} \leq 2; \frac{32}{3x+16} - 6 \leq -4; f(x) \leq -4$ . С другой стороны,  $\frac{32}{3x+16} > 0; \frac{32}{3x+16} - 6 > -6; f(x) > -6$ . Таким образом,  $-6 < f(x) \leq -4$ .

Итак,  $E(f) = [-6; 2]$ .

2. Так как  $a_{26} = 0$ , то  $f(a_{25}) = 0$ . Найдём  $a_{25}$  из уравнения  $f(x) = 0$ .

При  $x < 0$  уравнение имеет вид  $4 \cos \frac{\pi x}{12} - 2 = 0$ . Его корни  $x = \pm 4 + 24n, n \in \mathbb{Z}$ . Так как  $x < 0$  и  $x \in E(f)$ , то  $x = -4$ .

При  $x \geq 0$  уравнение имеет вид  $\frac{32}{3x+16} - 6 = 0$ . Его корень  $x = -\frac{32}{9}$  не удовлетворяет условию  $x \geq 0$ .

Итак,  $a_{25} = -4$ .

3. Так как  $a_{25} = -4$ , то  $f(a_{24}) = -4$ . Найдём  $a_{24}$  из уравнения  $f(x) = -4$ . При  $x < 0$  уравнение имеет вид  $4 \cos \frac{\pi x}{12} - 2 = -4$ . Его корни  $x = \pm 8 + 24n, n \in \mathbb{Z}$ . Так как  $x < 0$  и  $x \in E(f)$ , то этот случай невозможен.

При  $x \geq 0$  уравнение имеет вид  $\frac{32}{3x+16} - 6 = -4$ . Его корень  $x = 0$  удовлетворяет условию  $x \geq 0$  и принадлежит  $E(f)$ .

Таким образом,  $a_{24} = 0$ .

4. Аналогично доказывается, что  $a_{23} = -4, a_{22} = 0$  и т. д., то есть  $a_{2k+1} = -4, a_{2k} = 0, k = 1, 2, 3, \dots, 12$ . Значит,  $a_3 + a_4 + a_5 = -4 + 0 - 4 = -8$ .

Ответ:  $-8$ .

**983.** 1. Так как  $a_{30} = 2$ , то  $f(a_{29}) = 2$ . Найдём  $a_{29}$  из уравнения  $f(x) = 2$ .

При  $x < 3$  уравнение имеет вид  $4 - \frac{8}{x+2} = 2$ . Его корень  $x = 2$  удовлетворяет условию  $x < 3$ .

При  $x \geq 3$  уравнение имеет вид  $\frac{x^2}{x+1} + 1 = -\log_3 \frac{x}{2}$ . Его ОДЗ  $x > 0$ .

Рассмотрим функции  $f_1(x) = \frac{x^2}{x+1} + 1$  и  $f_2(x) = -\log_3 \frac{x}{2}$  при  $x \geq 3$ .

Так как  $f_1'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} > 0$  при  $x \geq 3$ , то  $f_1(x)$  возрастает при  $x \geq 3$ .

Так как  $f_2'(x) = -\frac{1}{x \ln 3} < 0$  при  $x \geq 3$ , то  $f_2(x)$  убывает при  $x \geq 3$ . Так

как  $f_1(3) = \frac{13}{4}$ , а  $f_2(3) = -\log_3 \frac{3}{2} = -1 + \log_3 2 < 0$ , то  $f_1(3) > f_2(3)$ .

Следовательно, уравнение  $f_1(x) = f_2(x)$  не имеет корней при  $x \geq 3$ .

Итак,  $a_{29} = 2$ .

2. Аналогично доказывается, что  $a_{28} = a_{27} = a_{26} = \dots = a_1 = 2$ .

Значит,  $7a_9 - 2a_{17} = 7 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 10$ .

Ответ: 10.

$$984. y = \left( x^{(2x+3) \log_x a} + (\sqrt[4]{x})^{12} \cdot a^8 - x^{3+2x \log_x a} - a(a^5)^{-\log_2(0,25)} \right)^{-0,5}.$$

Основание степени с показателем  $-0,5$  должно быть положительным:

$$x^{(2x+3) \log_x a} + (\sqrt[4]{x})^{12} \cdot a^8 - x^{3+2x \log_x a} - a(a^5)^{-\log_2(0,25)} > 0. \quad (1)$$

Начнём преобразование неравенства (1), заметив, что существование слагаемых в левой части возможно, если  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . В этом случае с использованием свойств степени и основного логарифмического тождества получим:

$$a^{2x+3} + x^3 \cdot a^8 - x^3 \cdot a^{2x} - a^{11} > 0; \quad a^{2x}(a^3 - x^3) + a^8(x^3 - a^3) > 0;$$

$(a^3 - x^3)(a^{2x} - a^8) > 0$ ;  $(a - x)(a^2 + ax + x^2)(a^{2x} - a^8) > 0$ . Так как второй множитель — неполный квадрат суммы — принимает только положительные значения при любых  $x$  и  $a$ , одновременно не равных 0, то последнее неравенство равносильно  $(a - x)(a^{2x} - a^8) > 0$ . (2)

Решим неравенство (2) методом интервалов. Одновременно можно провести отбор нужных значений параметра  $a$ . Нетрудно определить, что выражение в левой части (2) обращается в 0 при  $x = a$  и при  $x = 4$ . Далее удобно рассмотреть три случая:

1)  $0 < a < 1$ . Расставим значения на промежутках с учётом свойства монотонности показательной функции с основанием  $0 < a < 1$  (см. рис. 250). Напомним, что  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . Тогда решение неравенства (2) при  $0 < a < 1$



Рис. 250.

будет иметь вид:  $0 < x < a$ ;  $x > 4$ . Это решение содержит бесконечно много натуральных чисел. Следовательно, требования задачи не выполняются при  $0 < a < 1$ .

2)  $1 < a \leq 4$  (см. рис. 251).

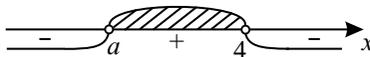


Рис. 251.

$a < x < 4$  — решение неравенства. Очевидно, в этом случае  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . Промежуток  $(a; 4)$  должен содержать ровно 2 натуральных числа.

Это могут быть числа 2 и 3, если  $a < 2$ . Таким образом, значения  $1 < a < 2$  удовлетворяют требованиям задачи.

3)  $a > 4$  (см. рис. 252). Для всех точек этого промежутка выполняются

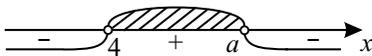


Рис. 252.

условия  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . В промежуток  $(4; a)$  могут войти натуральные числа 5 и 6, если  $6 < a \leq 7$ . Таким образом, требования задачи выполняются при  $1 < a < 2$  и при  $6 < a \leq 7$ .

Ответ:  $(1; 2) \cup (6; 7]$ .

$$985. y = \left( a^x \cdot x^{(x+3) \log_x a} + a^{8+3 \log_x a} - (\sqrt[3]{x})^{9+6x \log_x a} - \sqrt{a^{22}} \right)^{-0,5}.$$

Основание степени с показателем  $-0,5$  может принимать только положительные значения. Областью определения исходной функции служит множество решений неравенства:

$$a^x \cdot x^{(x+3) \log_x a} + a^{8+3 \log_x a} - (\sqrt[3]{x})^{9+6x \log_x a} - \sqrt{a^{22}} > 0.$$

Понятно, что  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ;  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Используя свойства степеней и основное логарифмическое тождество, получим

$$a^x \cdot x^{x+3} + a^8 \cdot x^3 - x^3 \cdot a^{2x} - a^{11} > 0; a^{2x}(a^3 - x^3) + a^8(x^3 - a^3) > 0, \\ (a^3 - x^3)(a^{2x} - a^8) > 0, (a - x)(a^2 + ax + x^2)(a^{2x} - a^8) > 0. \text{ Так как неполный квадрат } a^2 + ax + x^2 \text{ принимает только положительные значения при рассматриваемых значениях } x \text{ и } a, \text{ то последнее неравенство равносильно неравенству } (a - x)(a^{2x} - a^8) > 0. \quad (1)$$

Выражение в левой части (1) обращается в 0 при  $x = a$  и при  $x = 4$ . Для нахождения решения неравенства (2) методом интервалов, выбора нужных значений параметра рассмотрим 3 случая, расставляя знаки на промежутках в соответствии со свойством монотонности показательной функции.

1)  $0 < a < 1$  (см. рис. 253).  $x < a$ ;  $x > 4$ . Так как  $x > 0$ , то решение



Рис. 253.

неравенства (1) в данном случае имеет вид:  $0 < x < a$ ;  $x > 4$ . Это решение не удовлетворяет требованиям задачи — промежуток  $(4; \infty)$  содержит бесконечно много натуральных чисел.

2)  $1 < a \leq 4$  (см. рис. 254). Решением неравенства (1) являются числа

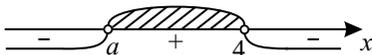


Рис. 254.

из промежутка  $(a; 4)$ . Условия  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  выполняются. Так как  $a > 1$ , то на промежутке  $(a; 4)$  может быть не более двух (2 и 3) натуральных чисел. Значит, при  $1 < a \leq 4$  требования задачи не выполнены.

3)  $a > 4$  (см. рис. 255). На промежутке  $(4; a)$  условия  $x > 0$ ,  $x \neq 1$

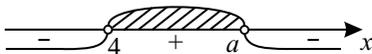


Рис. 255.

выполнены. Чтобы в этом промежутке содержались 3 натуральных числа (5, 6, 7) должно выполняться условие  $7 < a \leq 8$ .

Ответ:  $(7; 8]$ .

$$986. y = \left( a^{x+3} \cdot x^{x \log_x a} + a^8 \cdot x^3 - \left( \sqrt[3]{x} \right)^{9+6x \log_x a} - a(a^5)^{-\log_3 \frac{1}{9}} \right)^{-0,5}.$$

Условие существования исходной функции:

$$a^{x+3} \cdot x^{x \log_x a} + a^8 \cdot x^3 - \left( \sqrt[3]{x} \right)^{9+6x \log_x a} - a(a^5)^{-\log_3 \frac{1}{9}} > 0. \quad (1)$$

Очевидно, должны выполняться условия:  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ;  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . (2)

При  $a = 1$  левая часть неравенства обращается в ноль, что противоречит (1). С учётом ведущих операций преобразуем (2):

$$a^{x+3} \cdot a^x + a^8 \cdot x^3 - x^3 \cdot a^{2x} - a^{11} > 0; \quad a^{2x}(a^3 - x^3) + a^8(x^3 - a^3) > 0;$$

$$(a^3 - x^3)(a^{2x} - a^8) > 0; \quad (a - x)(a^2 + ax + x^2)(a^{2x} - a^8) > 0.$$

Это неравенство равносильно неравенству  $(a - x)(a^{2x} - a^8) > 0$ , (3)

так как при условиях (2)  $a^2 + ax + x^2 > 0$ . Левая часть (3) обращается в 0 при  $x = a$  и при  $x = 4$ . Решим неравенство (3) методом интервалов, учтём условия (2) и выберем нужные значения параметра  $a$ . Далее при определении знаков левой части (3) на промежутках используется свойство монотонности показательной функции с выбранным основанием. Полезно рассмотреть три случая:

1)  $0 < a < 1$ ,  $x < a$ ;  $x > 4$ . Решение неравенства (3) методом интервалов иллюстрируется на рис. 256. С учётом (2) получим  $0 < x < a$ ,



Рис. 256.

$x > 4$ . Очевидно, что множество решений неравенства (3) при  $0 < a < 1$  содержит бесконечно много целых чисел.

2)  $1 < a \leq 4$  (см. рис. 257). Очевидно, что на промежутке  $(a; 4)$  выполняются требования (2). В промежутке  $(a; 4)$  будет содержаться одно целое число (число 3), если  $2 \leq a < 3$ .

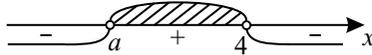


Рис. 257.

3)  $a > 4$  (см. рис. 258).  $4 < x < a$ . Решение неравенства (3) удовлетворяет условиям (2). В этом промежутке будет единственное целое число

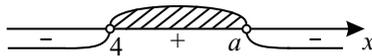


Рис. 258.

5, если  $5 < a \leq 6$ . Таким образом, требования задачи выполняются при  $a \in [2; 3]$  и  $a \in (5; 6]$

Ответ:  $[2; 3] \cup (5; 6]$ .

**987.** Найдём  $D(y)$ .  $a^{x^2+6} - a^{x^2+2a|x|-5} \geq 0$ ,  $a > 0$ .

$$a^{x^2+6}(1 - a^{2a|x|-11}) \geq 0; a^{x^2+6} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - a^{2a|x|-11} \geq 0; a^{2a|x|-11} \leq a^0.$$

1<sup>й</sup> случай.  $0 < a < 1$ . Тогда:  $2a|x| - 11 \geq 0$ ,  $a > 0$ ,

$$|x| \geq \frac{11}{2a}, \frac{11}{2a} > 0; x \geq \frac{11}{2a}, x \leq -\frac{11}{2a}, \text{ (см. рис. 259).}$$

$$D(y) = D_1(y) \cup D_2(y).$$

Понятно, что в  $D_1(y)$  при любом  $a$  не попадает ни одного натурального числа. В  $D_2(y)$  могут быть как однозначные натуральные так и трёхзначные натуральные числа. Но если в  $D_2(y)$  есть

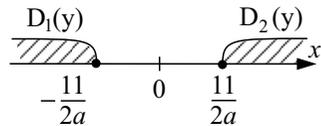


Рис. 259.

хотя бы одно однозначное натуральное число, то в  $D_2(y)$  попадут все трёхзначные натуральные числа, чего не должно быть по условию. Так что в рассматриваемом случае нам нужно найти все значения параметра  $a$ , при которых в  $D_2(y)$  попадает не более 9-и трёхзначных натуральных чисел. Это справедливо тогда и только тогда,

когда  $\frac{11}{2a} > 990$ . Решая это неравенство, получаем  $a < \frac{11}{2 \cdot 990}$ ;  $a < \frac{1}{180}$ .

Учитывая условия рассматриваемого случая получаем:  $a \in \left(0; \frac{1}{180}\right)$ .

*2<sup>й</sup> случай.*  $a = 1$ . В этом случае  $D(y) = R$ , так что  $a = 1$  не удовлетворяет условию задачи.

*3<sup>й</sup> случай.*  $a > 1$ . Тогда:  $2a|x| - 11 \leq 0$ ;  $a > 0$ ;

$$|x| \leq \frac{11}{2a}, \quad \frac{11}{2a} > 0, \quad -\frac{11}{2a} \leq x \leq \frac{11}{2a}, \quad (\text{см. рис. 260}).$$

Так как  $a > 1$ , то  $\frac{1}{a} < 1$ , потому  $\frac{11}{2} \cdot \frac{1}{a} < \frac{11}{2} \cdot 1$ , то есть  $\frac{11}{2a} < \frac{11}{2}$ .

Это означает, что трёхзначных натуральных чисел в  $D(y)$  в рассматриваемом случае нет. Однозначных же может оказаться более 2-х. Не более трёх однозначных натуральных чисел попадает в  $D(y)$  тогда и только тогда, когда  $\frac{11}{2a} < 4$ .

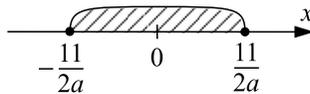


Рис. 260.

Решая полученное неравенство получаем  $a > \frac{11}{8}$ . Понятно, что если  $a > \frac{11}{8}$ , то  $a > 1$ , то есть найденные значения  $a$  удовлетворяют условию рассматриваемого случая. Так что  $a \in \left(\frac{11}{8}; \infty\right)$ .

Объединяя случаи 1 и 2 получаем

$$\text{Ответ: } \left(0; \frac{1}{180}\right) \cup \left(\frac{11}{8}; \infty\right).$$

**988.**  $y = \log_a \left( a^{\frac{1}{x-10}} - a^{\frac{ax}{12} + \frac{1}{x-10} - 2} \right)$ . Область определения функции является решением неравенства  $a^{\frac{1}{x-10}} - a^{\frac{ax}{12} + \frac{1}{x-10} - 2} > 0$ . (1)

Так как  $a$  — основание логарифма, то должно выполняться условие  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Область определения неравенства (1):  $x \neq 10$ . При этих ограни-

чениях неравенство (1) равносильно неравенству:  $a^{\frac{1}{x-10}} \left(1 - a^{\frac{ax}{12} - 2}\right) > 0$ .

Так как  $a^{\frac{1}{x-10}} > 0$ , то  $1 - a^{\frac{ax}{12} - 2} > 0$ ;  $a^{\frac{ax}{12} - 2} < a^0$ . (2)

Для решения неравенства (2) рассмотрим два случая:

1)  $0 < a < 1$ . Неравенство (2) равносильно неравенству:  $\frac{ax}{12} - 2 > 0$ ;  $\frac{ax}{12} > 2$ ;  $x > \frac{24}{a}$ . Для решения неравенства необходимо определить, не содержит ли промежуток  $\left(-\frac{24}{a}; \infty\right)$  число 10 (см. область определения неравенства) и исключить его из решения. Для решения же поставленной в условии задачи этого делать не нужно, так как очевидно, что ни промежуток  $\left(\frac{24}{a}; \infty\right)$ , ни множество точек, полученное удалением из этого промежутка одной точки, требованиям задачи не удовлетворяют.

2)  $a > 1$ . Неравенство (2) равносильно неравенству:  $\frac{ax}{12} - 2 < 0$ ,  $x < \frac{24}{a}$ . При наших значениях  $a$  промежуток  $\left(-\infty; \frac{24}{a}\right)$  содержит однозначное натуральное число и не более одного двузначного:  $1 < \frac{24}{a} \leq 12$ . Промежуток будет содержать двузначное число 11, так как число 10 не входит в область определения функции. Решая последнее неравенство, получим  $2 \leq a < 24$ .

*Ответ:* [2; 24).

**989.**  $y = \sqrt{k^{k^2x+12x} - k^{7kx+6}}$ . Область определения исходной функции — множество решений неравенства  $k^{k^2x+12x} - k^{7kx+6} \geq 0$ . Если числа 1 и 3 входят в область определения исходной функции, то значения  $k$  должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} k > 0, \\ k^{k^2x+12x} - k^{7kx+6} \geq 0, \\ k^{3k^2x+36x} - k^{21kx+6} \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0, \\ k^{k^2x+12x} \geq k^{7kx+6}, \\ k^{3k^2x+36x} \geq k^{21kx+6}. \end{cases}$$

1) Очевидно,  $k = 1$  удовлетворяет последней системе.

2) Пусть  $0 < k < 1$ , тогда 
$$\begin{cases} 0 < k < 1, \\ k^2 + 12 \leq 7k + 6, \\ 3k^2 + 36 \leq 21k + 6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < k < 1, \\ k^2 - 7k + 6 \leq 0, \\ k^2 - 7k + 10 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < k < 1, \\ 1 \leq k \leq 6, \\ 2 \leq k \leq 5. \end{cases} \text{ Система решений не имеет.}$$

$$3) \text{ Пусть } k > 1. \text{ В этом случае: } \begin{cases} k > 1, \\ k^2 + 12 \geq 7k + 6, \\ 3k^2 + 36 \geq 21k + 6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > 1, \\ k^2 - 7k + 6 \geq 0, \\ k^2 - 7k + 10 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 1, \\ k \leq 1, k \geq 6, \\ k \leq 2, k \geq 5. \end{cases} \text{ Решение системы: } [6; \infty).$$

С учётом результата п. 1), получим  $k = 1; k \in [6; \infty)$ .

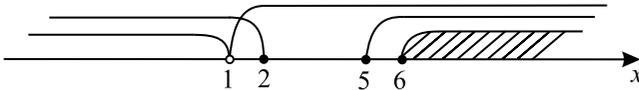


Рис. 261.

Ответ:  $\{1\} \cup [6; \infty)$ .

**990.**  $y = (b^{2+5bx} - b^{b^2x+6x})^{-\frac{5}{2}}$ . Область определения функции составляют значения  $x$ , для которых верно неравенство  $b^{2+5bx} - b^{b^2x+6x} > 0$ . По условию значение  $x = 1$  принадлежит области определения, тогда значения параметра  $b$  должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} b > 0, \\ b^{2+5b} - b^{b^2+6} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0, \\ b^{2+5b} > b^{b^2+6}. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим решения системы (1) при всех возможных значениях  $b$ .

1) При  $b = 1$  система имеет вид  $\begin{cases} 1 > 0, \\ 1 > 1. \end{cases}$  Решений система не имеет.

2) При  $b > 1$  система (1) равносильна системе:

$$\begin{cases} b > 1, \\ 2 + 5b > b^2 + 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 1, \\ b^2 - 5b + 4 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 1, \\ 1 < b < 4; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < b < 4.$$

3) При  $0 < b < 1$  система (1) равносильна системе  $\begin{cases} 0 < b < 1, \\ 2 + 5b < b^2 + 6; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < b < 1, \\ b^2 - 5b + 4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < b < 1, \\ b < 1, b > 4; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < b < 1. \text{ Окончательно, по результатам п. 2 и п. 3 получаем: } 0 < b < 1, 1 < b < 4.$$

Ответ:  $(0; 1) \cup (1; 4)$ .

**991.**  $y = \sqrt[n]{(12 - nx)^{3n+1} \cdot (x - 7)^{2n-1}}$ . Если  $n$  — нечётное натуральное число  $n > 1$ , то областью определения исходной функции будет все

множество действительных чисел, требования задачи будут невыполнимы. Поэтому рассматривать следует чётные значения  $n \geq 2$ . В таком случае область определения функции совпадает с множеством решения неравенства:

$$(12 - nx)^{3n+1} \cdot (x - 7)^{2n-1} \geq 0. \quad (1)$$

Так как  $n$  — чётное число и  $n \geq 2$ , то числа  $3n + 1$  и  $2n - 1$  — положительные нечётные. В этом случае неравенство (1) равносильно неравенству:  $(12 - nx)(x - 7) \geq 0$ . (2)

Решая неравенство (2) методом интервалов, получим:

1) Если  $\frac{12}{n} \leq 7$ , то есть  $n \geq \frac{12}{7}$ . Учитывая, что  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , получаем

$\frac{12}{n} \leq t \leq 7$ . Чтобы было соответствие с требованием задачи к длине про-

межутка  $\left[\frac{12}{n}; 7\right]$ , потребуем:  $7 - \frac{12}{n} = n$ ;  $n^2 - 7n + 12 = 0$ . Это уравнение имеет два корня  $n = 3$  и  $n = 4$ . Очевидно, требованию задачи удовлетворяют только  $n = 4$  ( $n$  — чётное число).

2) Если  $\frac{12}{n} > 7$ , то  $n < \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$ . В таком случае  $n$  не может принимать чётные значения.

*Ответ:* 4.

**992.**  $y = \sqrt[n]{(5n - 6 - x)^3 \cdot (2x - 32 + 3n)^{7n-5}}$ . Очевидно, решение поставленной задачи следует искать только для чётных значений  $n \geq 2$ . В этом случае область определения исходной функции есть множество решений неравенства:  $(5n - 6 - x)^3 \cdot (2x - 32 + 3n)^{7n-5} \geq 0$ . Так как показатели степеней — нечётные натуральные числа, то последнее неравенство равносильно неравенству  $(5n - 6 - x)(2x - 32 + 3n) \geq 0$ . (1)

Корни левой части:  $x_1 = 5n - 6$  и  $x_2 = \frac{32 - 3n}{2}$ . Выражение принимает

неположительные значения на одном из промежутков  $[x_1; x_2]$  или  $[x_2; x_1]$ . По условию задачи нужно найти такое чётное натуральное значение, чтобы расстояние между точками  $x_1$  и  $x_2$  равнялось  $n$ :

$$\left|5n - 6 - \frac{32 - 3n}{2}\right| = n; \quad |13n - 44| = 2n; \quad 13n - 44 = 2n; \quad 11n = 44; \quad n = 4.$$

*Ответ:* 4.

**993.**  $y = \log_{a^2+1}(x^2 + 2ax + 6b + 4ab + b^2)$ . Основание логарифма  $a^2 + 1$  должно быть положительным и не равно 1, значит  $a \neq 0$ . Данная функция определена для  $x \in R$ , если для  $x \in R$  выполняется неравенство

$$x^2 + 2ax + (6b + 4ab + b^2) > 0. \quad (1)$$

Последнее возможно тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трёхчлена в левой части (1) отрицателен.  $D = 4a^2 - 4(6b + 4ab - b^2) = 4(b^2 - (4a + 6)b + a^2)$ ;  $b^2 - (4a + 6)b + a^2 < 0$ . (2)

Чтобы нашлись  $b$ , являющиеся решением этого неравенства (квадратного относительно  $b$ ) необходимо и достаточно, чтобы дискриминант левой части был положителен.  $D_1 = (4a + 6)^2 - 4a^2 = 12(a^2 + 4a + 3)$ .  $a^2 + 4a + 3 > 0$ . Это неравенство верно при  $a < -3$ ,  $a > -1$ . Учтём условие  $a \neq 0$  и получим  $a < -3$ ;  $-1 < a < 0$ ;  $a > 0$ .

Ответ:  $(-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; \infty)$ .

994.  $y = \ln\left(\log_{a+11} \frac{2x+2-a}{3x-a}\right)$ . Область определения данной функции

составляют решения неравенства  $\log_{a+11} \frac{2x+2-a}{3x-a} > 0$ . (1)

1) При  $0 < a + 11 < 1$  неравенство (1) равносильно неравенству

$0 < \frac{2x+2-a}{3x-a} < 1$ . Другими словами, если  $-11 < a < -10$ , то

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2x+2-a}{3x-a} \geq 0, \\ \frac{2x+2-a}{3x-a} \leq 1; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x - \left(\frac{a}{2} - 1\right)}{x - \frac{a}{3}} \geq 0, \\ \frac{x-2}{x - \frac{a}{3}} > 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Учитывая, что  $-\frac{11}{3} < \frac{a}{3} < -\frac{10}{3}$  и  $-6,5 < \frac{a}{2} - 1 < -6$ , получим решения

первого неравенства:  $x < \frac{a}{2} - 1$ ,  $x > \frac{a}{3}$  и второго:  $x < \frac{a}{3}$ ,  $x > 2$ . Решение

всей системы (2):  $x < \frac{a}{2}$ ,  $x > 2$ . В промежутке  $\left(-\infty; \frac{a}{2} - 1\right)$  содержится отрезок длины 2, состоящий из отрицательных чисел. Таким образом, значения  $-11 < a < -10$  отвечают требованиям задачи.

2) При  $a + 11 > 1$ , то есть  $a > -10$ , неравенство (1) равносильно неравенству  $\frac{2x+2-a}{3x-a} > 1$  или  $\frac{x-2}{x-\frac{a}{3}} < 0$ . (3)

Если  $\frac{a}{3} > 2$ , то неравенство (3) будет иметь только положительные решения:  $2 < x < \frac{a}{3}$ . Если  $\frac{a}{3} = 2$ , то решений нет. Если  $\frac{a}{3} < 2$ , то  $\frac{a}{3} < x < 2$ . В этом промежутке будет содержаться отрезок длиной  $a$ , состоящий из отрицательных чисел, если  $\frac{a}{3} < -2$ , то есть  $a < -6$ . С учётом условия  $a > -10$ , получаем  $-10 < a < -6$ .

*Ответ:*  $(-11; -10) \cup (-10; -6)$ .

**995.**  $y = x^2 - (a + 6)|x| + 6a \leq 0$ . (1)

Обозначим  $|x| = t$ ,  $t \geq 0$ , тогда  $x^2 = |x|^2 = t^2$ . Запишем неравенство (1) в новой переменной  $t^2 - (a + 6)t + 6a \leq 0$ ,  $t \geq 0$ . (2)

Для решения квадратного неравенства методом интервалов найдём корни трёхчлена  $t^2 - (a + 6)t + 6a = 0$ .  $D = a^2 + 12a + 36 - 24a = (a - 6)^2$ ;  $t_{1,2} = \frac{a + 6 \pm (a - 6)}{2}$ ;  $t_1 = a$ ,  $t_2 = 6$ . Или по теореме, обратной теореме

Виета, корни:  $a$  и  $6$ . В зависимости от значения  $a$  решение неравенства (2) будет иметь вид либо  $a \leq t \leq 6$ , либо  $6 \leq t \leq a$ . Рассмотрим все возможные значения  $a$ , осуществим переход к переменной  $x$  и выберем значения параметра, отвечающие требованиям задачи.

1) Пусть  $a < 0$ , тогда с учётом условия  $t \geq 0$  получим  $0 \leq t \leq 6$ ,  $0 \leq |x| \leq 6$ ,  $-6 \leq x \leq 6$ . В этот промежуток можно поместить все члены данной последовательности  $a_n$ . Действительно, так как по условию знаменатель прогрессии  $b_n$  положителен, то  $0 < b_n < 7,5$ . Тогда  $-6 < -6 + b_n \leq 1,5$ , то есть  $-6 < a_n \leq 1,5$ . Таким образом, требования задачи удовлетворены при  $a < 0$ .

2) Пусть  $0 \leq a < 6$ , тогда решение неравенства (2) имеет вид  $a \leq t \leq 6$ . Следовательно,  $a \leq |x| \leq 6$  или  $-6 \leq x \leq -a$ ,  $a \leq x \leq 6$ .

Первый член последовательности  $a_1 = -6 + 7,5 = 1,5$  должен попасть в один из этих промежутков, очевидно во второй. Поэтому  $a \leq 1,5$ . Таким образом,  $0 \leq a \leq 1,5$ . В этом случае подбором значения знаменателя прогрессии  $q$  можно добиться, чтобы остальные члены последовательности содержались в промежутке  $[-6; -a]$ . Действительно, потребуем чтобы  $a_2$  принадлежало этому промежутку:  $-6 \leq -6 + 7,5q \leq -a$ , откуда  $0 < q \leq \frac{2(b - a)}{15}$ . Заметим, так как  $0 \leq a \leq 1,5$ , то  $\frac{3}{5} \leq \frac{2(6 - a)}{15} \leq \frac{4}{5}$ ,

что удовлетворяет требованию  $|q| < 1$ . Покажем, хотя это достаточно очевидно, что  $a_n$  при  $n > 2$  также будут содержаться в промежутке  $[-6; -a]$ .

Если  $-6 \leq a_n \leq -a$ , то  $0 \leq b_n \leq 6 - a$ . Умножим последнее неравенство на  $n - 2 > 0$ ,  $n > 2$ . Получим  $0 \leq b_n \leq (6 - a)q^{n-2}$  или  $-6 \leq -6 + b_n \leq (6 - a)q^{n-2} - 6$ . Число  $(6 - a)q^{n-2} - 6$  для любого  $n > 2$  меньше  $-a$ , так как их разность отрицательна,

$(6 - a)q^{n-2} - 6 - (-a) = (q^{n-2} - 1)(6 - a) < 0$ . Первый множитель отрицателен, а второй положителен ( $0 < q < 1$ ,  $0 \leq a \leq 1,5$ ). Таким образом, при  $0 \leq a \leq 1,5$  требования задачи могут быть удовлетворены.

3) Пусть  $a \geq 6$ . Решение неравенства (2) имеет вид  $6 \leq t \leq a$ . Тогда  $6 \leq |x| \leq a$ ,  $-a \leq x \leq -6$  или  $6 \leq x \leq a$ . Ни один из этих промежутков не содержит  $a_1 = 1,5$ .

Суммируя результаты п. 1 – 3 получаем, что  $a \leq 1,5$ .

*Ответ:*  $(-\infty; 1,5]$ .

**996.**  $(x - 2)^2 - (a + 2)|x - 2| + 2a \leq 0$ . (1)

Обозначим  $|x - 2| = t$ ,  $t > 0$ .  $(x - 2)^2 = |x - 2|^2 = t^2$ , тогда неравенство примет вид:

$$f(t) = t^2 - (a + 2)t + 2a \leq 0, t \geq 0. \quad (2)$$

Решения исходного неравенства (1) должны содержать все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 2,9 и положительным знаменателем. То есть должны содержать промежутки

$x \in (0; 2,9]$ . Так как мы обозначили  $|x - 2| = t$ , то  $t \in [0,9; 2)$ . Итак, задача свелась к следующей: надо отыскать все  $a$ , такие что решения неравенства (2) содержат и все значения  $t \in [0,9; 2)$ . Это возможно только когда:  $D > 0$ ;  $f(0,9) \leq 0$ ;  $f(2) \leq 0$ . То есть должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} D = (a + 2)^2 - 4 \cdot 2a = (a - 2)^2 > 0, \\ f(2) = 4 - 2(a + 2) + 2a \leq 0, \\ f(0,9) = 0,81 - 0,9(a - 2) + 2a \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2, \\ 0 \leq 0, \\ 1,1a \leq 0,99; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2, \\ a \leq 0,9. \end{cases}$$

Значит, при  $a \leq 0,9$  будут выполняться все условия задачи.

*Ответ:*  $(-\infty; 0,9]$ .

**997.**  $x(x - 10) \leq (a + 5)(|x - 5| - 5)$ . Преобразуем неравенство:

$$x^2 - 10x + 25 - (a + 5)|x - 5| + 5a \leq 0,$$

$$(x - 5)^2 - (a + 5)|x - 5| + 5a \leq 0. \quad (1)$$

Для решения неравенства (1) используем введение новой переменной:

$$|x - 5| = t; t \geq 0. \text{ Тогда получим } t^2(a + 5)t + 5a \leq 0. \quad (2)$$

Очевидно, корнями квадратного трёхчлена в левой части (2) будут числа  $a$  и 5. Тогда, в зависимости от величины  $a$ , решением неравенства (2) может

быть  $a \leq t \leq 5$  или  $5 \leq t \leq a$ . В первом случае необходимо помнить об ограничении  $t \geq 0$ . Используем полученные результаты для записи решения неравенства (1) и выберем значение параметра, отвечающие требованиям задачи. Возможны 3 случая.

1)  $a \leq 0$ , тогда  $a \leq t \leq 5$ . Но так как  $t \geq 0$ , то получаем  $0 \leq t \leq 5$ . Для переменной  $x$  получим:  $|x - 5| \leq 5$ ;  $0 \leq x \leq 10$ . Этот промежуток удовлетворяет требованиям задачи, так как содержит число 9,8 — первый член прогрессии и, очевидно, все остальные члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительным знаменателем.

2)  $0 < a < 5$ . В этом случае  $a \leq t \leq 5$ ;  $a \leq |x - 5| \leq 5$ . Для переменной  $x$  получим два непересекающихся промежутка:  $0 \leq x \leq 5 - a$  и  $a + 5 \leq x \leq 10$ . Второй промежуток содержит число 9,8 при условии  $a + 5 \leq 9,8$ , то есть  $a \leq 4,8$ . Подбором знаменателя прогрессии можно убедиться, что все остальные члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии будут содержаться в промежутке  $[0; 5 - a]$ . Для этого достаточно потребовать, чтобы  $a_2 = 9,8 \cdot q$  попало в этот промежуток.  $0 \leq 9,8q \leq 5 - a$ , то есть  $q \leq \frac{5-a}{9,8}$ . Очевидно, что  $\frac{5-a}{9,8} < 1$  при  $0 < a \leq 4,8$ . Все остальные члены прогрессии будут располагаться между 0 и  $a_2$ .

3)  $a \geq 5$ ;  $5 \leq t \leq a$ ;  $5 \leq |x - 5| \leq a$ . Получаем для переменной  $x$ :  $5 - a \leq x \leq 0$  и  $10 \leq x \leq x + 5$ . Ни в одном из этих промежутков не могут быть расположены члены прогрессии с заданными свойствами. В итоге нам приходится объединить результаты, полученные в п. 1) – 2):  $a \leq 4,8$ .

Ответ:  $(-\infty; 4,8]$ .

**998.**  $a|x + 2| - 4a + 1 \geq ax(x + 4) + |x + 2|$ . Преобразуем неравенство к виду  $a(x + 2)^2 - a(a - 1)|x + 2| - 1 \leq 0$ . (1)

Заметим вначале, что для удовлетворения требований задачи нам нужно найти такие значения  $a$ , при которых во множество решений войдут числа  $-4,8$  и 0 и некоторый промежуток слева от 0 (причём, не обязательно прилегающий к нулю), в котором можно будет поместить несколько точек, равномерно расположенных друг относительно друга (включая 0).

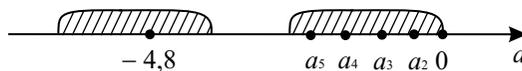


Рис. 262.



Рис. 263.

Например, рис. 262 или рис. 263. Здесь  $a_i$  — члены арифметической прогрессии,  $a_1 = 0$ . Ключевыми точками являются  $x = -4,8$  и  $x = 0$ . Они должны входить в решение. Рассмотрим различные значения параметра  $a$ .

1)  $a = 0$ . Неравенство (1) в этом случае превращается в неравенство  $|x + 2| \leq 1$ , решение которого  $-3 \leq x \leq -1$ . Ни 0, ни  $-4,8$  не входят в это решение.

2)  $a > 0$ . Сделаем замену в (1)  $|x + 2| = t$ ,  $t \geq 0$ , имея в виду, что  $(x + 2)^2 = |x + 2|^2$ :  $f(t) = at^2 - (a - 1)t - 1 \leq 0$ . (2)

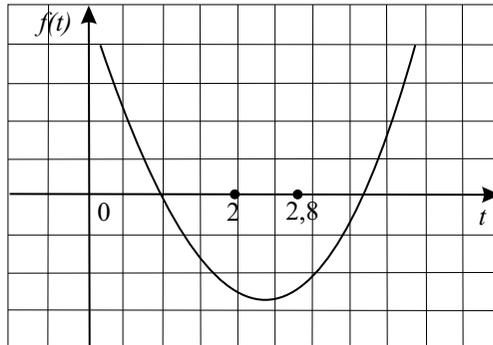


Рис. 264.

Когда  $x = 0$ ,  $t = 2$ . Когда  $x = -4,8$ ,  $t = 2,8$ . Это парабола, ветви которой направлены вверх (см. рис. 264).

То есть должны одновременно выполняться неравенства:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(2) < 0, \\ f(2,8) < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - 1)^2 + 4a > 0, \\ 4a - 2(a - 1)^2 - 1 \leq 0, \\ 7,84a - 2,8(a - 1) - 1 \leq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + 1)^2 > 0, \\ a \leq -\frac{1}{2}, \\ a \leq -\frac{5}{14}. \end{cases}$$

С учётом  $a > 0 \Rightarrow$  нет решений у задачи.

3)  $a < 0$ . В этом случае парабола  $y = f(t)$  имеет вид (см. рис. 265).

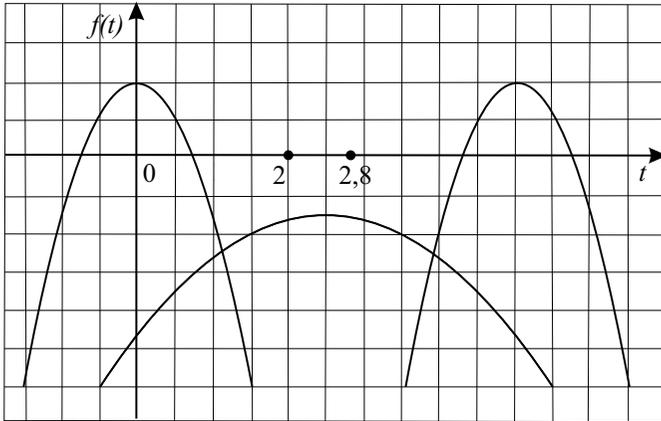


Рис. 265.

То есть,

$$\begin{cases} f(2) \leq 0, \\ f(2,8) \leq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -\frac{1}{2}, \\ a \leq -\frac{15}{14}; \end{cases} \Rightarrow a \leq -\frac{1}{2}. \text{ Это даёт, } a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right].$$

Объединяя решение случаев 1)–3), получим  $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ . Остаётся открытым вопрос, что делать со значением  $a = -1$ , где  $D = 0$ . Подставим  $a = -1$  в неравенство (2). Получим:  $t^2 - 2t + 1 \geq 0$ ;  $(t-1)^2 \geq 0$ . Это верно для всех решений  $t$ . Значит  $a = -1$  входит в решение.

Ответ:  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ .

$$999. |\log_2(|x-6|-a)| - a < 0; \log_a(|x-6|-a) < a. \quad (1)$$

Решение неравенства может существовать, если  $a > 0$ . Область определения неравенства задаётся условием  $|x-6| > a$ . (3)

Неравенство (1) равносильно неравенству  $-a < \log_2(|x-6|-a) < a$ ;  $\log_2 2^a$ . По свойству монотонности логарифма функции с основанием 2 получим

$$2^{-a} < |x-6|-a < 2^a; a+2^{-a} < |x-6| < a+2^a. \quad (4)$$

Очевидно, что условие (3) соблюдено.

Замечание. Для удовлетворения требований задачи нужно найти такие значения  $a$ , при которых во множестве решений неравенства (4) содер-

жится число  $9\frac{1}{8}$  и некоторый промежуток  $[0; \varepsilon]$ , в котором всегда можно будет расположить  $k$  членов арифметической прогрессии  $a_n$  ( $a_1 = 0$ ) с разностью  $\frac{\varepsilon}{k-1}$ . При  $x < 6$  неравенство (4) равносильно неравенству  $a + 2^{-a} < -x + 6 < a + 2^a$ ;  $6 - a - 2^a < x < 6 - a - 2^{a-1}$ . При  $x \geq 6$ :  $a + 2^{-a} < x - 6 < a + 2^a$ ;  $a + 6 + 2^{-a} < x < a + 6 + 2^a$ . Естественно потребовать, чтобы в промежутке  $(6 - a - 2^a; 6 - a - 2^{a-1})$  содержался некоторый отрезок  $[0; \varepsilon]$ , где  $\varepsilon > 0$ , а промежутку  $(a + 6 + 2^{-a}; a + 6 + 2^a)$  принадлежало число  $9\frac{1}{8}$ . Это достигается, если выполняются условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 - a - 2^a < 0, \\ 6 - a - 2^{-a} > 0, \\ a + 6 + 2^{-a} < 9\frac{1}{8}, \\ a + 6 + 2^a > 9\frac{1}{8}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2^{-a} < 6 - a < 2^a, \\ 2^{-a} < 3\frac{1}{8} < 2^a. \end{array} \right. \quad (5)$$

Решим графически систему (5). На координатной плоскости  $Oxy$  построим графики функций  $y = 2^a$ ,  $y = 2^{-a}$ ,  $y = 6 - a$ ,  $y = 3\frac{1}{8} - a$ . Напомним, что рассматриваются значения  $a > 0$  (см. рис. 266).

Все рассматриваемые функции, относятся к элементарным. Их свойства известны (в том числе свойства монотонности). В первой координатной четверти каждая из прямых по одному разу пересекает графики  $y = 2^a$  и  $y = 2^{-a}$ . При этом графики  $y = 2^a$  и  $y = 6 - a$  пересекаются в точке  $A(2; 4)$ . Её координаты легко определяются подбором. Графики функции  $y = 2^{-a}$  и  $y = 3\frac{1}{8} - a$  пересекаются в точке  $B(3; \frac{1}{8})$ , что также нетрудно установить. В соответствии с условиями системы (5) находятся значения отрезка обеих прямых, заключённых между графиками функций  $y = 2^a$  и  $y = 2^{-a}$ . Очевидно, что это  $x_a < a < x_b$ , то есть  $2 < a < 3$ .

Ответ: (2; 3).

$$1000. \log_{0,5} \left( \frac{|3x - 8a| - 2a|}{2a + 11} \right) \geq 0. \quad (1)$$

Существование рассматриваемого логарифма обеспечивается условием

$$\frac{|3x - 8a| - 2a|}{2a + 11} > 0. \text{ Отсюда следует, что:}$$

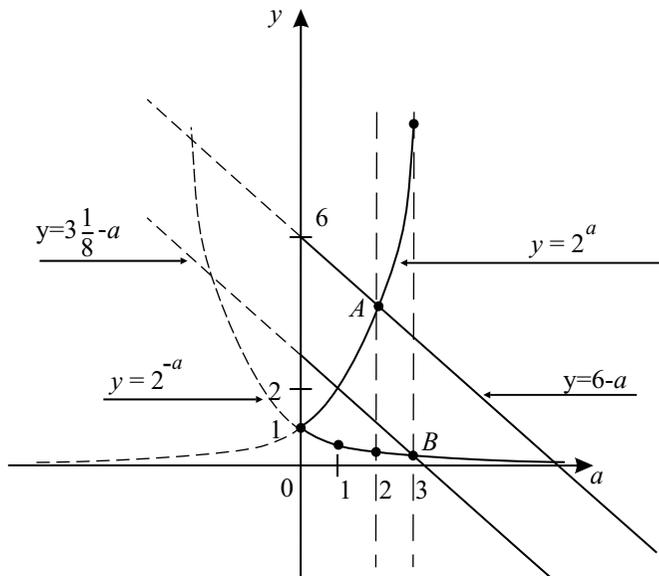


Рис. 266.

а)  $|3x - 8a| \neq 2a$ , то есть  $x \neq 3\frac{1}{3}a$ ,  $x \neq 2a$ . (2)

б)  $2a + 11 > 0$ ,  $a > -5,5$ . (3)

Неравенство (1) при условиях (2) и (3) равносильно неравенству

$$\frac{|3x - 8a| - 2a}{2a + 11} \leq 1. \text{ Так как } 2a + 11 > 0, \text{ то } |3x - 8a| - 2a \leq 2a + 11,$$

$-2a - 11 \leq |3x - 8a| - 2a \leq 2a + 11$ ,  $-11 \leq |3x - 8a| \leq 4a + 11$ . Модуль неотрицателен, поэтому последнее неравенство равносильно неравенству  $|3x - 8a| \leq 4a + 11$ . Это неравенство может иметь решение, если

$$4a + 11 \geq 0, \text{ то есть } a \geq -2\frac{3}{4}. \text{ В этом случае: } -4a - 11 \leq 3x - 8a \leq 4a + 11,$$

$$1\frac{1}{3}a - 3\frac{2}{3} \leq x \leq 4a + 3\frac{2}{3} \text{ при условии } x \neq 3\frac{1}{3}a \text{ и } x \neq 2a. \text{ Для выполнения}$$

требований задачи следует определить значения  $a$ , при которых число  $-3$

входит в промежуток  $\left[1\frac{1}{3}a - 3\frac{2}{3}; 4a + 3\frac{2}{3}\right]$  и при этом не совпадает с  $3\frac{1}{3}a$

и с  $2a$ . Кроме того, в этот промежуток должна входить некоторая окрестность  $[-\varepsilon; \varepsilon]$ , ( $\varepsilon > 0$ ) точки 0. С помощью выбора значения  $k$  в такую

окрестность всегда можно поместить заданную знакпеременную последовательность  $-\frac{1}{k}; \frac{1}{4k}; \dots$ , члены которой стремятся к нулю с увеличением номера  $k$ . Достаточно, например, взять  $k = \frac{2}{\varepsilon}$ . Выбор значения  $k$  поможет также избежать совпадения какого-либо члена последовательности со значениями  $x = 3\frac{1}{3}a$  и  $x = 2a$ . Потребуем для начала попадания числа  $-3$  и окрестности числа  $0$  в промежуток  $\left[1\frac{1}{2}a - 3\frac{2}{3}; 4a + 3\frac{2}{3}\right]$ :

$$\begin{cases} 1\frac{1}{3}a - 3\frac{2}{3} \leq -3, \\ 4a + 3\frac{2}{3} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq \frac{1}{2}, \\ a > \frac{11}{12}; \end{cases} \quad -\frac{11}{12} < a \leq \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Требования задачи, однако, не будут удовлетворены, если при каком-либо  $a$  из промежутка (4) число  $-3$  совпадёт с не входящими в область определения неравенства числами  $2a$  и  $3\frac{1}{3}a$ . То есть  $a$  должно принимать такие значения, чтобы  $-3 \neq 2a$  и  $-3 \neq 3\frac{1}{3}a$ . Или  $a \neq -\frac{3}{2}$  и  $a \neq -\frac{9}{10}$ . Первое значение  $a$  не входит в промежуток (4), а второе следует из него исключить, как не обеспечивающее выполнение требований задачи. Таким образом, получаем  $-\frac{11}{12} < a < -\frac{9}{10}$  и  $-\frac{9}{10} < a \leq \frac{1}{2}$ .

Ответ:  $\left(-\frac{11}{12}; -\frac{9}{10}\right) \cup \left(-\frac{9}{10}; \frac{1}{2}\right]$ .

**1001.**  $ax^2 + 3a > 4x; ax^2 - 4x + 3a > 0.$  (1)

Найдём значения  $a$ , при которых значения  $x = a$  не удовлетворяют неравенству (1). Другими словами, при которых значения  $x = a$  удовлетворяют неравенству противоположного смысла  $a \cdot a^2 - 4 \cdot a + 3a \leq 0; a(a^2 - 1) \leq 0; a(a - 1)(a + 1) \leq 0; a \leq -1; 0 \leq a \leq 1.$

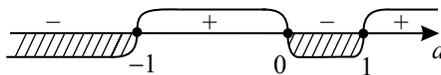


Рис. 267.

Ответ:  $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$ .

**1002.**  $\log_x(x - a) > 2$ . Если  $x = -a$  является решением неравенства, то  $\log_{-a}(-2a) > -2$ . (1)

Область определения неравенства:  $\begin{cases} -a > 0, \\ -a \neq 1, \\ -2a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ a \neq -1. \end{cases}$  (2)

На области определения неравенство (1) равносильно совокупности двух

$$\begin{aligned} \text{систем: } & \begin{cases} 0 < -a < 1, \\ -2a < (-a)^2, \\ -a > 1, \\ -2a > (-a)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 0, \\ a(a+2) > 0, \\ a < -1, \\ a(a+2) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 0, \\ a < -2, a > 0, \\ a < -1, \\ -2 < a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Первая система, очевидно, не имеет решений. Решение второй системы:  $(-2; -1)$ .

*Ответ:*  $(-2; -1)$ .

**1003.**  $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ . (1)

Убедимся в самом начале, что значение  $a = 0$  не удовлетворяет требованиям задачи. При  $a = 0$  неравенство имеет вид:  $x > 0$ . В этот промежуток не входит никакого числа, которое можно принять за первый член прогрессии — по условию он должен быть меньше  $a$ , то есть меньше 0. Решим неравенство (1) при  $a \neq 0$ . Неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x + 4a > 0, \\ ax \geq 0, \\ (x + 4a)^2 > 25ax; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4a, \\ ax \geq 0, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0; \end{cases} \quad (2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -4a, \\ ax \geq 0, \\ (x - a)(x - 16a) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим два случая.

1)  $a < 0$ , тогда система принимает вид  $\begin{cases} x > -4a, \\ x \leq 0, \\ x < 16a, x > a. \end{cases}$

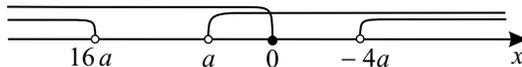


Рис. 268.

Система решений не имеет (см. рис. 268).

$$2) a > 0. \text{ В этом случае: } \begin{cases} x > -4a, \\ x \geq 0, \\ x < a, x > 16a. \end{cases}$$

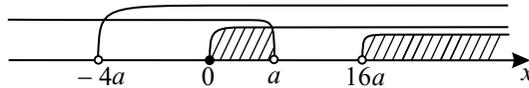


Рис. 269.

Итак, при  $a > 0$  решение неравенства:  $[0; a) \cup (16a; \infty)$ .

В промежутке  $[0; a)$  найдётся число  $a_1 < a$ , которое может быть первым членом прогрессии. Для попадания следующего члена прогрессии в промежуток  $(16a; \infty)$  нужно, чтобы расстояние между точками 0 и  $16a$  было меньше разности прогрессии, то есть  $16a - a < 225$ ;  $15a < 225$ ;  $a < 15$ .

Таким образом, условиям задачи удовлетворяют значения параметра  $0 < a < 15$ .

*Ответ:*  $(0; 15)$ .

**1004.**  $3 - |x - a| > x^2$ . Задача допускает довольно простое графическое решение. Перепишем неравенство в виде:  $3 - x^2 > |x - a|$ . (1) На одной координатной плоскости построим графики функций  $y = 3 - x^2$  и  $y = |x - a|$ . Решением являются отрицательные значения  $x$ , при которых график квадратичной функции проходит выше графика функции  $y = |x - a|$  (см. рис. 270).

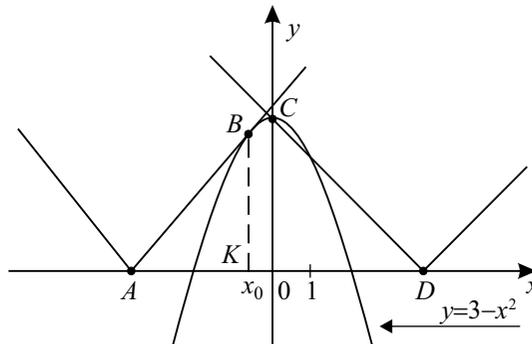


Рис. 270.

График функции  $y = |x - a|$  получается из графика  $y = |x|$  смещением по оси  $Ox$ . Его вершина находится в точке  $(a; 0)$ . На рис. 270 изображены два крайних (с точки зрения существования решений) положения графика  $y = |x - a|$ . Луч  $AB$  касается параболы в точке  $B$ . При смещении графика вправо появляется область отрицательных значений  $x$ , отвечающих решению неравенства (1). Для отрицательных значений  $x$  точки параболы будут лежать выше графика  $y = |x - a|$  вплоть до момента, когда луч  $DC$  пройдёт через вершину параболы. При увеличении  $a$ , то есть при смещении луча  $DC$  вправо. Неравенство (1) ещё может иметь решения, но среди них не будет отрицательных чисел. Таким образом, для получения необходимого результата  $a$  должно изменяться в промежутке  $(x_A; x_D)$ .  $B$  — точка графика функции  $y = 3 - x^2$  с абсциссой  $x_0$ . Касательная  $AB$  в этой точке наклонена к оси  $Ox$  под углом  $45^\circ$ , угловой коэффициент касательной равен 1. Найдём  $x_0$ :  $y = 3 - x^2$ ;  $y' = -2x$ ;  $-2x_0 = 1$ ;  $x_0 = -\frac{1}{2}$ .  $\triangle AKB$  — прямоугольный, равнобедренный.  $AK = KB = 3 - x_0^2 = 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$ .  $OA = AK + KO = 2\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{4}$ . Следовательно,  $x_A = -3\frac{1}{4}$ . Далее:  $\triangle OCD$  — равнобедренный и прямоугольный.  $C(0; 3)$  — вершина параболы. Значит  $x_D = 3$ . Таким образом,  $a \in \left(-3\frac{1}{4}; 3\right)$ .

Ответ:  $\left(-3\frac{1}{4}; 3\right)$ .

**1005.** Уравнения касательных в точках  $x_0, x_1$ :

$$y = (2x_0 + b)(x - x_0) + x_0^2 + bx_0 + c; \quad y = (-2x_1 + 3b)(x - x_1) - x_1^2 + 3bx_1 + 2c.$$

$$\text{Или } y = (2x_0 + b)x - x_0^2 + c; \quad y = (-2x_1 + 3b)x + x_1^2 + 2c;$$

$$\begin{cases} 2x_0 + b = -2x_1 + 3b, \\ -x_0^2 + c = x_1^2 + 2c. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + x_1 = b, \\ x_0^2 + x_1^2 = -c. \end{cases}$$

1)  $c > 0$  касательных нет,  $b = 0$  годится.  $b = 0, c > 0$ .

2)  $c = 0 \Rightarrow b = 0$ , одна касательная, не годится.

3)  $c < 0$   $x_1 = b - x_0$ ;  $x_0^2 + x_0^2 + b^2 - 2bx_0 + c = 0$ ;  $2x_0 - 2bx_0 + b^2 + c = 0$ ;  
 $D = b^2 - 2b^2 - 2c = -b^2 - 2c$ .

1)  $D < 0$ , 0 касательных  $\Rightarrow b = 0$ .  $-2c < 0$ ;  $c > 0$  — противоречие.

2)  $D = 0$ , 1 касательная  $\Rightarrow b = 1$ .  $-1 - 2c = 0$ ;  $2c = -1$ ;  $c = -\frac{1}{2}$ .

$$b = -1; c = -\frac{1}{2}.$$

3)  $D > 0$ , 2 касательных  $\Rightarrow b = 2$ .  $-4 - 2c > 0$ ;  $2c < -4$ ,  $c < -2$ .  $b = 2$ ;  $c < -2$ .

Ответ:  $b = 0$ ;  $c > 0$ .  $b = 1$ ;  $c = -\frac{1}{2}$ .  $b = 2$ ;  $c < -2$ .

**1006.** Обозначим  $f(x) = 9^{4x^2 - 4ax - 6a - 8} - 8$  и  $g(x) = \left| \frac{a+3}{2x-a} \right|$ .

1) Функция  $f(x)$  определена при всех  $x \in \mathbb{R}$ . Пусть  $t = 4x^2 - 4ax - 6a - 8$ ;  $x_0 = \frac{4a}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}a$ , график функции симметричен относительно прямой  $x = \frac{1}{2}a$ . Найдём  $f(-1,5) = 9^{9+6a-6a-8} - 8 = 1$ , значит при любом значении  $a$  график функции проходит через точку с координатами  $(-1,5; 1)$ .

2) Функция  $g(x)$  определена при всех значениях  $x$ , кроме  $x = \frac{1}{2}a$ , имеет вертикальную асимптоту  $x = \frac{1}{2}a$ , относительно которой симметричен её график

$$g(-1,5) = \left| \frac{a+3}{-3-a} \right| = 1, a \neq -3.$$

3) Графики функций имеют общую точку с координатами  $(-1,5; 1)$ .  $-1,5 \notin [-1; 1]$ , значит  $x = -1,5$  не является корнем данного уравнения на заданном отрезке.

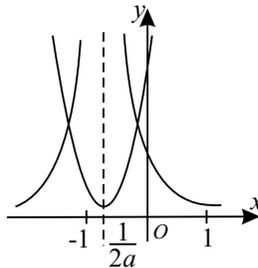


Рис. 271.

Так как графики функций симметричны относительно прямой  $x = \frac{1}{2}a$ , то абсциссу второй общей точки найдём, решив систему уравнений.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \Delta x = -1,5, \\ \frac{1}{2}a - \Delta x = x; \end{cases} \Leftrightarrow a = -1,5 + x; \quad x = a + 1,5; \quad \Delta x = -1,5 - 0,5a.$$

По условию корень уравнения принадлежит отрезку  $[-1; 1]$ , значит  $-1 \leq a + 1,5 \leq 1$ ;  $-2,5 \leq a \leq -0,5$ . (см. рис. 271).

4) Если  $a = -3$ , то данное уравнение не имеет корней в силу того что  $f(x)$  принимает только положительные значения, а  $g(x) = 0$  при всех значениях  $x$ , кроме  $x = -1,5$ , следовательно графики функций не имеют общих точек (см. рис. 272).

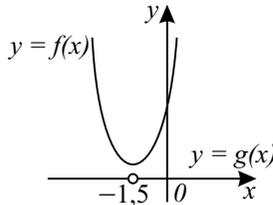


Рис. 272.

Ответ:  $[-2,5; -0,5]$ .

**1007.** 1) Так как по условию  $p \neq -2$ , то домножим обе части второго уравнения на  $(p + 2)$ , получим:  $(p + 2)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-300} = \sqrt{x+3}$ ;  $(p + 2)^2 > 0$ ;

слева в уравнении стоит убывающая функция, справа — возрастающая на  $[-3; +\infty)$  функция, поэтому число  $n$  корней второго уравнения  $n = 0$  либо  $n = 1$ . При  $x \rightarrow \infty$ , каким бы большим ни было  $p$ , левая часть стремится к нулю, а правая к бесконечности; с другой стороны, при  $x = -3$   $(p + 2)^2 \cdot 3^{303} > 0$ , а  $\sqrt{x+3} = 0$ . Значит, на луче  $[-3; +\infty)$  у этого уравнения существует корень, и он единственный:  $n = 1$ .

2) Так как  $x^2 + p \neq 0$  при всех  $x \neq \pm\sqrt{-p}$ , то можно преобразовать первое уравнение.  $x^4 - 2(3 + p)x + (2p^2 - 3p + 4) = x^4 - p^2 + 17x^2 + 17p$ ;  $17x^2 + 2(3 + p)x - (3p^2 - 20p + 4) = 0$ . Это квадратное уравнение. Число его корней  $k = 0$ ;  $k = 1$  или  $k = 2$ .

3) Итак,  $p + 1 + n = k$ , но зная  $n = 1$ , имеем  $p + 2 = k$ ;  $p = k - 2$ .

Возможны варианты:

а)  $p = -2$ , но этот случай невозможен по условию.

б)  $p = -1$ , первое уравнение примет вид:

$17x^2 + 4x - 27 = 0$ ,  $D = 4 + 17 \cdot 27 \neq 0$ . Это противоречит рассматриваемому случаю числа корней этого уравнения  $k = 1$ . Поэтому  $p = -1$  не удовлетворяет условиям задачи.

в)  $p = 0$ ,  $k = 2$ ;  $\frac{x^4 - 6x + 4}{x^2} = x^2 + 17$ ;  $x^4 - 6x + 4 = x^4 + 17x^2$ ;

$17x^2 + 6x - 4 = 0$ ,  $D = 9 + 68 > 0$ , число корней в самом деле равно 2, поэтому этот случай удовлетворяет условиям. Сумма корней по теореме, обратной теореме Виета:  $x_1 + x_2 = -\frac{6}{17}$ .

*Ответ:*  $p = 0$ ; сумма корней равна  $-\frac{6}{17}$ .

**1008.** Для того, чтобы графики функций  $y = x^{10} - px^2 + 4x + p$  и  $y = x^{10} - 4x^2 + px$ , имели ровно две точки пересечения, необходимо, чтобы уравнение  $x^{10} - px^2 + 4x + p = x^{10} - 4x^2 + px$ , имело два корня.

$$x^{10} - px^2 + 4x + p - px + p = 0; (4 - p)x^2 + (4 - p)x + p = 0.$$

Полученное уравнение имеет два корня если  $\begin{cases} 4 - p \neq 0, \\ D > 0; \end{cases}$

$$D = (4 - p)^2 - 4(4 - p) \cdot p = 16 - 8p + p^2 - 16p + 4p^2 = 5p^2 - 24p + 16;$$

$$5p^2 - 24p + 16 > 0; 5p^2 - 24p + 16 = 0; p_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{5};$$

$$p_1 = \frac{12 + 8}{5} = 4, p_2 = \frac{12 - 8}{5} = \frac{4}{5} = 0,8;$$

$$5(p - 4)(p - 0,8) > 0; p < 0,8, p > 4 \text{ (см. рис.273).}$$

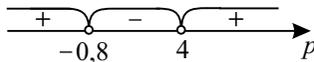


Рис. 273.

*Ответ:*  $(-\infty; 0,8) \cup (4; +\infty)$ .

**1009.** По условию график функции  $y = -px^4 + |p - 4|x^2$  и линия  $y = 0$  пересекаются в трёх точках, следовательно, уравнение

$-px^4 + |p - 4|x^2 = 0$  должно иметь три различных корня.

$x^2(-px^2 + |p - 4|) = 0$ ;  $x_1 = 0$ ,  $-px^2 + |p - 4| = 0$ . Последнее уравнение должно иметь два различных корня и ни один из них не равен 0.

$$\begin{cases} p \neq 0, \\ p < 7, \\ p \neq 4, \\ x^2 = \frac{|p-4|}{p}. \end{cases} \quad \text{Так как } |p-4| > 0, \text{ то } \frac{|p-4|}{p} > 0 \text{ при } p > 0,$$

то есть  $\begin{cases} 0 < p < 7, \\ p \neq 4. \end{cases}$  Тогда  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = \sqrt{\frac{|p-4|}{p}}$ ;  $x_3 = -\sqrt{\frac{|p-4|}{p}}$ .  
 $p = 1, 2, 3, 5, 6$ ;  $1 + 2 + 3 + 5 + 6 = 17$ .

Ответ: 17.

**1010.**  $\sqrt{4(p+1)x - 8p - 12} = 2x + p - 1$  и  $\left(2 + 2^{\frac{p+2}{p-1}}\right)^x = 21 - 6x$ ,  $p \neq 1$ .

1) Пусть  $a = 2 + 2^{\frac{p+2}{p-1}}$ , тогда  $a > 1$  и показательная функция  $y = a^x$  возрастает. Линейная функция  $y = 21 - 6x$  убывает, так как коэффициент  $-6 < 0$ . Поэтому число  $n$  корней второго уравнения  $n = 0$  или  $n = 1$ .

2) Если  $x < 0$ , то  $a^x < 1 < 21 - 6x$ , то есть график  $y = a^x$  лежит ниже прямой  $y = 21 - 6x$ . Если  $x > 3,5$ , то  $a^x > 0 > 21 - 6x$ , то есть график  $y = a^x$  расположен выше этой прямой. Таким образом, в интервале  $(0; 3,5)$  второе уравнение с необходимостью имеет корень, и он единственный:  $n = 1$ . 3) После возведения в квадрат первого уравнения получим квадратное уравнение, число корней первого уравнения  $k = 0$ ,  $k = 1$  или  $k = 2$ . По условию,  $0,5(p+2) = k \cdot n$ , зная, что  $n = 1$ , имеем  $0,5(p+2) = k$ , где  $k \in \{0, 1, 2\}$ , значит,  $p$  — чётное.

а) Если  $k = 0$ , то  $p = -2$ , при этом, очевидно, второе уравнение имеет смысл, а первое примет вид  $\sqrt{-4x+4} = 2x - 3$ . ОДЗ:  $\begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq 1,5; \end{cases}$  система несовместна, поэтому первое уравнение имеет смысл и число его корней действительно равно нулю.

б) Если  $k = 1$ , то  $p = 0$ . Второе уравнение имеет смысл, а первое примет вид:

$$\sqrt{4x-12} = 2x-1. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 3, \\ x \geq \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3. \quad 4x-12 = 4x^2-4x+1;$$

$4x^2 - 8x + 13 = 0$ ;  $D = 16 - 52 < 0$ . Нет действительных корней.  $p = 0$  не удовлетворяет условиям задачи. в) Если  $k = 2$ , то  $p = 2$ . Второе уравнение имеет смысл, а первое:  $\sqrt{12x-28} = 2x+1$ .

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 2\frac{1}{3}, \\ x \geq -\frac{1}{2}; \end{cases} \quad x \geq 2\frac{1}{3}; \quad 12x - 28 = 4x^2 + 4x + 1; \quad 4x^2 - 8x + 29 = 0;$$

$D = 16 - 4 \cdot 29 < 0$  — нет действительных корней. Итак, условиям задачи удовлетворяет  $p = -2$ , при этом второе уравнение  $3^x = 21 - 6x$  имеет корень, найденный методом «пристального взгляда»,  $x = 2$ ;  $9 = 21 - 12$ .

*Ответ:* 2.

**1011.** Пусть  $a_n$  —  $n$ -й член данной прогрессии,  $d$  — её разность.  $a_1, a_2 \notin (8; 10)$ , так как в противном случае  $a_5 \in (8; 10)$  (прогрессия возрастающая) и потому  $a_3, a_4 \in (8; 10)$ , что не так. Значит,  $a_1, a_2 \in (1; 3)$ . Заметим, что из условий  $a_2 < 3$  и  $a_6 > 10$  следует, в частности, что

$$a_6 - a_2 = (a_1 + 5d) - (a_1 + d) = 4d > 7, \text{ то есть } d > \frac{7}{4}, \text{ а из соотношений}$$

$$a_1 = a_2 - d, \quad a_2 < 3, \quad d > \frac{7}{4} \text{ следует, что } a_1 < 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}.$$

Таким образом, искомое множество возможных значений  $a_1$  содержится внутри интервала  $(1; \frac{5}{4})$ . Покажем, что на самом деле для любого

$a_1 \in (1; 2,5)$  существует такое значение  $d$ , что прогрессия  $a_n = a_1 + d(n - 1)$  удовлетворяет всем требуемым в задаче условиям.

Пусть  $a_1 = \frac{5}{4} - l$ , тогда  $l = \frac{5}{4} - a_1$ ,  $0 < l < \frac{1}{4}$ . Возьмём  $d = \frac{7}{4} + \frac{l}{2}$ , имеем:

$$a_2 = a_1 + d = \frac{5}{4} - l + \frac{7}{4} + \frac{l}{2} = 3 - \frac{l}{2},$$

$$a_3 = a_2 + d = 3 - \frac{l}{2} + \frac{7}{4} + \frac{l}{2} = \frac{19}{4},$$

$$a_4 = a_3 + d = \frac{19}{4} + \frac{7}{4} + \frac{l}{2} = \frac{26}{4} + \frac{l}{2} < \frac{26}{4} + \frac{1}{2} < 8,$$

$$a_5 = a_4 + d = \frac{26}{4} + \frac{l}{2} + \frac{7}{4} + \frac{l}{2} = \frac{33}{4} + l < \frac{33}{4} + \frac{1}{8} < 10,$$

$$a_6 = \frac{33}{4} + l + \frac{7}{4} + \frac{l}{2} = 10 + \frac{3}{2}l.$$

Легко видеть, что все требуемые условия задачи выполнены.

*Ответ:*  $(1; 2,5)$ .

**1012.** Пусть  $b = b_1$  — первый член, а  $x$  — знаменатель указанной прогрессии,  $0 < x < 1$ .  $b_1, b_2 \notin \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{7}\right)$ , так как в противном случае  $b_4 \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{7}\right)$  и поэтому  $b_3 \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{9}\right)$ , что не так. Так что  $b_1, b_2 \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ , то есть  $\frac{1}{3} < b < 1$ ,  $\frac{1}{3} < bx < 1$ . Если  $b_4 \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ , то и  $b_3 \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ , что не так  $\Rightarrow b_4 \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{7}\right)$ , то есть  $\frac{1}{9} < bx^3 < \frac{1}{7}$ . Тогда  $b_3 \in \left[\frac{1}{7}; \frac{1}{3}\right]$ , то есть  $\frac{1}{7} \leq bx^2 \leq \frac{1}{3}$ .  $b_5 \in \left(0; \frac{1}{9}\right]$ , то есть  $0 < bx^4 \leq \frac{1}{9}$ . Теперь переформулируем задачу в эквивалентную

ей: «Найдите все значения параметра  $b$ ,  $\frac{1}{3} < b < 1$ , при которых система неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{3} < bx < 1, \\ \frac{1}{7} \leq bx^2 \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{9} < bx^3 < \frac{1}{7}, \\ bx^4 \leq \frac{1}{9}; \end{cases} \text{ имеет решение на промежутке } (0; 1) \text{». Система равно-$$

$$\text{сильна такой: } \begin{cases} bx^2 \leq \frac{1}{3}, \\ bx^3 < \frac{1}{7}, \\ bx^4 \leq \frac{1}{9}, \\ bx > \frac{1}{3}, \\ bx^2 \geq \frac{1}{7}, \\ bx^3 > \frac{1}{9}. \end{cases}$$

$$\text{Решаем её.} \left\{ \begin{array}{l} x^2 \leq \frac{1}{3b}, \\ x^3 < \frac{1}{7b}, \\ x^4 \leq \frac{1}{9b}, \\ x > \frac{1}{3b}, \\ x^2 \geq \frac{1}{7b}, \\ x^3 > \frac{1}{9b}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{1}{\sqrt{3b}}, \\ x < \frac{1}{\sqrt[3]{7b}}, \\ x \leq \frac{1}{\sqrt[4]{9b}}, \\ x > \frac{1}{3b}, \\ x \geq \frac{1}{\sqrt{7b}}, \\ x > \frac{1}{\sqrt[3]{9b}}; \end{array} \right.$$

1. Найдём наименьшее из чисел:  $\frac{1}{\sqrt{3b}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt[3]{7b}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt[4]{9b}}$ , учитывая, что  $\frac{1}{3} < b < 1$ .

1.1) Решим неравенство  $\frac{1}{\sqrt[3]{7b}} < \frac{1}{\sqrt{3b}}$ .  $\sqrt[3]{7b} > \sqrt{3b}$ ,  $7^2 b^2 > 3^3 b^3$ ,  $b < \frac{49}{27} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{7b}} < \frac{1}{\sqrt{3b}}$  на промежутке  $(\frac{1}{3}; 1)$ .

1.2) Решим неравенство  $\frac{1}{\sqrt[3]{7b}} < \frac{1}{\sqrt[4]{9b}}$ .  $\sqrt[3]{7b} > \sqrt[4]{9b}$ ,  $7^4 b^4 > 9^3 b^3$ ,  $b > \frac{9^3}{7^4}$ . Так как  $\frac{9^3}{7^4} < \frac{1}{3}$ , то на промежутке  $(\frac{1}{3}; 1)$   $\frac{1}{\sqrt[3]{7b}} < \frac{1}{\sqrt[4]{9b}}$ . Таким образом подсистема, состоящая из трёх первых неравенств последней подсистемы, равносильна неравенству  $x < \frac{1}{\sqrt[3]{7b}}$ .

2. Найдём наибольшее из чисел  $\frac{1}{3b}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{7b}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt[3]{9b}}$  на промежутке  $(\frac{1}{3}; 1)$ .

2.1) Решим неравенство  $\frac{1}{\sqrt[3]{9b}} > \frac{1}{\sqrt{7b}}$ .  $\sqrt[3]{9b} < \sqrt{7b}$ ,  $81b^2 < 7^3 b^3$ ,  $b > \frac{81}{343}$ . Так как  $\frac{81}{343} < \frac{1}{3}$ , то  $\frac{1}{\sqrt[3]{9b}} > \frac{1}{\sqrt{7b}}$  на промежутке  $(\frac{1}{3}; 1)$ .

2.2) Решим неравенство  $\frac{1}{\sqrt[3]{9b}} \geq \frac{1}{3b}$ .  $\sqrt[3]{9b} \leq 3b$ ,  $9b \leq 27b^3$ ,  $b^2 \geq \frac{1}{3}$ ,  
 $b \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Так как  $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$ , то:

$\frac{1}{\sqrt[3]{9b}}$  — наибольшее число на промежутке  $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$ ;

$\frac{1}{3b}$  — наибольшее число на промежутке  $\left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ .

Т.е. подсистема, состоящая из трёх последних неравенств последней системы равносильна неравенству:  $x > \frac{1}{\sqrt[3]{9b}}$  на промежутке  $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$ ;

$x > \frac{1}{3b}$  на промежутке  $\left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ . Рассмотрим два случая.

I.  $b \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$ . Исходная система неравенств равносильна системе

$$\begin{cases} x < \frac{1}{\sqrt[3]{7b}}, \\ x > \frac{1}{\sqrt[3]{9b}}; \end{cases} \quad \text{которая имеет решения тогда и только тогда, когда}$$

$\frac{1}{\sqrt[3]{9b}} < \frac{1}{\sqrt[3]{7b}}$ . Решаем это неравенство.  $9b > 7b$ ,  $b > 0 \Rightarrow$  условию задачи

в этом случае удовлетворяют все  $b \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$ .

II.  $b \in \left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ . Исходная система неравенств равносильна системе

$$\begin{cases} x < \frac{1}{\sqrt[3]{7b}}, \\ x > \frac{1}{3b}; \end{cases} \quad \text{которая имеет решения тогда и только тогда, когда}$$

$\frac{1}{3b} < \frac{1}{\sqrt[3]{7b}}$ . Решаем это неравенство.  $3b > \sqrt[3]{7b}$ ,  $27b^3 > 7b$ ,  $b^2 > \frac{7}{27}$ ,

$b > \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$ ,  $b > \frac{\sqrt{21}}{9}$ . Так как  $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{21}}{9} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ , то в этом случае усло-

вию задачи удовлетворяют все  $b \in \left[ \frac{\sqrt{21}}{9}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ . Объединяя случаи I и II

получаем  $b \in \left( \frac{\sqrt{21}}{9}; 1 \right)$

Ответ:  $\left( \frac{\sqrt{21}}{9}; 1 \right)$ .

$$1013. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x - 3 > 0, x - 3 \neq 1, \\ 2x + 1 > 0, 2x + 1 \neq 1, \\ 3x + 1 > 0, 3x + 1 \neq 1, \\ x^2 > 0, \\ 6,2x - 8,4 > 0. \end{cases} \Rightarrow x > 3, x \neq 4.$$

Решим неравенство

$(\log_{x-3}(2x+1))(\log_{2x+1}x^2) \geq (\log_{x-3}(3x+1))(\log_{3x+1}(6,2x-8,4))$ . Для  $x \in \text{ОДЗ}$  данное неравенство равносильно неравенству  $\log_{x-3}x^2 \geq \log_{x-3}(6,2x-8,4)$ . Рассмотрим два случая.

1)  $x - 3 > 1$ . Тогда так как логарифм с основанием, большим единицы — возрастающая функция, то  $\begin{cases} \log_{x-3}x^2 \geq \log_{x-3}(6,2x-8,4), \\ x - 3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6,2x + 8,4 \geq 0, \\ x > 4. \end{cases}$   $x_{1,2} = 3,1 \pm \sqrt{9,61 - 8,4} = 3,1 \pm 1,1 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4,2$ . Поэтому  $\begin{cases} x^2 - 6,2x + 8,4 \geq 0, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4,2) \geq 0, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [4,2; +\infty), \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow x \in [4,2; +\infty) \subset \text{ОДЗ}$ .

2)  $0 < x - 3 < 1$ . Тогда так как логарифм с основанием, меньшим единицы — убывающая функция, то  $\begin{cases} \log_{x-3}x^2 \geq \log_{x-3}(6,2x-8,4), \\ 0 < x - 3 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6,2x + 8,4 \leq 0, \\ 3 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4,2) \leq 0, \\ 3 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2; 4,2], \\ 3 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow x \in (3; 4) \subset \text{ОДЗ}$ .

Объединяя решения в случаях 1) и 2), получаем, что данное в условии неравенство имеет решение  $x \in (3; 4) \cup [4,2; +\infty)$ . Пусть  $\{a_n\}$  — арифметическая прогрессия, удовлетворяющая требованиям задачи. Пусть  $a$  — её первый член, а  $d (> 0)$  — её разность. Если только первый и четвёртый член этой прогрессии не являются решениями исходного неравенства, то есть не входят во множество  $(3; 4) \cup [4,2; +\infty)$ , то это означает

$$\text{выполнение системы неравенств } \begin{cases} a_1 \leq 3, \\ 3 < a_2 < 4, \\ 3 < a_3 < 4, \\ 4 \leq a_4 < 4,2, \\ a_5 \geq 4,2, \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq 3, \\ 3 < a + d < 4, \\ 3 < a + 2d < 4, \\ 4 \leq a + 3d < 4,2, \\ a + 4d \geq 4,2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq 3, \\ 3 - a < d < 4 - a, \\ \frac{3 - a}{2} < d < \frac{4 - a}{2}, \\ \frac{4 - a}{3} \leq d < \frac{4,2 - a}{3}, \\ d \geq \frac{4,2 - a}{4}. \end{cases} \quad \text{Найдём те значения } a \leq 3, \text{ при которых систе-}$$

$$\text{ма неравенств } \begin{cases} 3 - a < d < 4 - a, \\ \frac{3 - a}{2} < d < \frac{4 - a}{2}, \\ \frac{4 - a}{3} \leq d < \frac{4,2 - a}{3}, \\ \frac{4,2 - a}{4} \leq d \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение от-}$$

носительно  $d$ , а это выполняется когда

$$\max \left\{ 3 - a, \frac{3 - a}{2}, \frac{4 - a}{3}, \frac{4,2 - a}{4} \right\} < \min \left\{ 4 - a, \frac{4 - a}{2}, \frac{4,2 - a}{3} \right\}. \text{ Так как}$$

$$4 - a > \frac{4 - a}{2} \text{ при } a \leq 3, 3 - a \geq \frac{3 - a}{2} \text{ при } a \leq 3, \frac{4 - a}{3} - \frac{4,2 - a}{4} =$$

$$= \frac{3,4 - a}{12} > 0 \text{ при } a \leq 3, \frac{4 - a}{2} - \frac{4,2 - a}{3} = \frac{3,6 - a}{6} > 0 \text{ при } a \leq 3,$$

$$\text{то } \max \left\{ 3 - a, \frac{3 - a}{2}, \frac{4 - a}{3}, \frac{4,2 - a}{4} \right\} < \min \left\{ 4 - a, \frac{4 - a}{2}, \frac{4,2 - a}{3} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\max \left\{ 3 - a, \frac{4 - a}{3} \right\} < \frac{4,2 - a}{3} \text{ при } a \leq 3. \text{ Последнее неравенство равно-}$$

$$\text{сильно системе } \begin{cases} \frac{4,2 - a}{3} > \frac{4 - a}{3}, \\ \frac{4,2 - a}{3} > 3 - a, \end{cases} \quad \begin{cases} 0,2 > 0, \\ 2a > 4,8, \end{cases} \quad a > 2,4.$$

Таким образом, множество возможных значений первого члена арифметической прогрессии —  $(2,4; 3]$ .

Ответ:  $(2,4; 3]$ .

**1014.** Преобразуем неравенство  $5a > 4x + 2a\sqrt{5a - 4x} + 3a^2$ .  
 $5a - 4x - 2a\sqrt{5a - 4x} - 3a^2 > 0$ ,  $(\sqrt{5a - 4x})^2 - 2a\sqrt{5a - 4x} - 3a^2 > 0$ .  
 Сделаем замену  $t = \sqrt{5a - 4x} \geq 0$ . Тогда неравенство примет вид  $t^2 - 2at - 3a^2 > 0$ .  $t_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 + 3a^2} = a \pm 2a \Rightarrow t_1 = -a$ ,  $t_2 = 3a$ .  
 Следовательно,  $t^2 - 2at - 3a^2 > 0 \Leftrightarrow (t + a)(t - 3a) > 0$ . Рассмотрим два случая  $a \geq 0$  и  $a < 0$ .

1)  $a \geq 0$ . Тогда  $3a \geq 0 \geq -a$ . Поэтому решением неравенства  $(t + a)(t - 3a) > 0$  является промежуток  $(-\infty; -a) \cup (3a; +\infty)$ . Учитывая, что  $t \geq 0$ , получаем, что  $t > 3a$ . Вернёмся к переменной  $x$ :  $\sqrt{5a - 4x} > 3a \Leftrightarrow 5a - 4x > 9a^2 \Rightarrow x < \frac{5a - 9a^2}{4}$ . Так как не менее одного члена, но не более девяти членов арифметической прогрессии с первым членом, равным  $-|a| - 4,5$ , и разностью прогрессии, равной  $0,5$ , являются решением исходного неравенства, то в силу вида решения при  $a > 0$ :  $(-\infty; \frac{5a - 9a^2}{4})$ , требование задачи равносильно одновременному выполнению двух условий: первый член прогрессии, равный

$-|a| - 4,5 = -a - 4,5$ , принадлежит промежутку  $(-\infty; \frac{5a - 9a^2}{4})$ , десятый член прогрессии, равный  $-|a| - 4,5 + 9 \cdot 0,5 = -a$  не принадлежит промежутку  $(-\infty; \frac{5a - 9a^2}{4})$ . Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} -a - 4,5 < \frac{5a - 9a^2}{4}, \\ \frac{5a - 9a^2}{4} \leq -a, \\ a \geq 0, \end{cases} \begin{cases} \frac{9a^2 - 9a - 18}{4} < 0, \\ \frac{9a^2 - 9a}{4} \geq 0, \\ a \geq 0, \end{cases} \begin{cases} a^2 - a - 2 < 0, \\ a^2 - a \geq 0, \\ a \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a - 2)(a + 1) < 0, \\ a(a - 1) \geq 0, \\ a \geq 0, \end{cases} \begin{cases} a \in (-1; 2), \\ a \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty), \\ a \geq 0, \end{cases} \Rightarrow a \in \{0\} \cup [1; 2).$$

2)  $a < 0$ . Тогда  $3a < 0 < -a$ . Поэтому решением неравенства  $(t + a)(t - 3a) > 0$  является промежуток  $(-\infty; 3a) \cup (-a; +\infty)$ . Учитывая, что  $t \geq 0$ , получаем, что  $t > -a$ . Вернёмся к переменной  $x$ :  $\sqrt{5a - 4x} > -a \Leftrightarrow 5a - 4x > a^2 \Rightarrow x < \frac{5a - a^2}{4}$ . Так как не менее одного члена, но не бо-

лее девяти членов арифметической прогрессии с первым членом, равным  $-|a| - 4,5$ , и разностью прогрессии, равной  $0,5$ , являются решением исходного неравенства, то в силу вида решения при  $a < 0$ :  $\left(-\infty; \frac{5a - a^2}{4}\right)$ , требование задачи равносильно одновременному выполнению двух условий: первый член прогрессии, равный

$-|a| - 4,5 = a - 4,5$ , принадлежит промежутку  $\left(-\infty; \frac{5a - a^2}{4}\right)$ , десятый член прогрессии, равный  $-|a| - 4,5 + 9 \cdot 0,5 = a$  не принадлежит промежутку  $\left(-\infty; \frac{5a - a^2}{4}\right)$ . Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} a - 4,5 < \frac{5a - a^2}{4}, \\ \frac{5a - a^2}{4} \leq a, \\ a < 0, \\ \frac{a^2 - a - 18}{4} < 0, & \begin{cases} a^2 - a - 18 < 0, \\ a^2 - a \geq 0, \\ a < 0, \end{cases} \\ \frac{a^2 - a}{4} \geq 0, \\ a < 0, \\ \left(a - \frac{1 - \sqrt{73}}{2}\right) \left(a - \frac{1 + \sqrt{73}}{2}\right) < 0, & \begin{cases} a \in \left(\frac{1 - \sqrt{73}}{2}; \frac{1 + \sqrt{73}}{2}\right), \\ a \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty), \\ a < 0 \end{cases} \\ a(a - 1) \geq 0, \\ a < 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \in \left(\frac{1 - \sqrt{73}}{2}; 0\right).$$

Объединяя случаи 1) и 2), приходим к окончательному ответу  $a \in \left(\frac{1 - \sqrt{73}}{2}; 0\right] \cup [1; 2)$ .

Ответ:  $\left(\frac{1 - \sqrt{73}}{2}; 0\right] \cup [1; 2)$ .

**1015.** 1) Так как подкоренное выражение арифметического квадратного корня должно принимать только неотрицательные значения, то  $x \geq -1$ . Числитель определён при  $x \geq -1$ . Разложим его на множители:  $(47x - 3x^2 + 68)\sqrt{x+1} = (17 - x)(3x + 4)\sqrt{x+1}$ . Знаменатель

$\log_2(x^2 - 24x + 144) - 6 = \log_2(x - 12)^2 - 6 = 2(\log_2|x - 12| - 3)$  не определён при  $x = 12$ , поскольку логарифм не определён в точке 0. Найдём нули знаменателя:  $\log_2|x - 12| - 3 = 0$ ,  $\log_2|x - 12| = 3$ ,  $|x - 12| = 8$ ,  $x = 4$  или  $x = 20$ .

2) Функция  $f(x) = \frac{(17-x)(3x+4)\sqrt{x+1}}{2(\log_2|x-12|-3)}$  определена при  $x \geq -1$ ,  $x \neq 4$ ,  $x \neq 20$ ,  $x \neq 12$  и непрерывна. Находим знаки функции:  $f(21) < 0$ ,  $f(19) > 0$ ,  $f(13) < 0$ ,  $f(11) < 0$ ,  $f(0) > 0$ , см. рис. 435

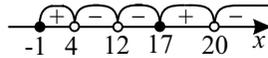


Рис. 274.

Значит,  $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 4) \cup [17; 20)$ .

3) Пусть  $x = 2^{3-b^2} - 1$ . Тогда  $2^{-b^2} = \frac{x+1}{8}$ ,  $2^{5-b^2} = 32 \cdot \frac{x+1}{8} = 4(x+1)$ ,  $4^{2-b^2} = 16 \cdot (2^{-b^2})^2 = 16 \cdot \frac{(x+1)^2}{64} = \frac{(x+1)^2}{4}$ ,  $2^{5-b^2} - 4^{2-b^2} + 9 = 4(x+1) - 2 \cdot \frac{(x+1)^2}{4} + 9 = \frac{1}{2}(8(x+1) - (x+1)^2 + 18) = \frac{1}{2}((-x+1)^2 + 8(x+1) - 16) + 34 = \frac{1}{2}(34 - (x+1-4)^2) = 17 - \frac{1}{2}(x-3)^2 = y \leq 17$ . По условию, и число  $x$  и число  $y$  являются решениями исходного неравенства, то есть принадлежат множеству  $[-1; 4) \cup [17; 20)$ .

4) Так как  $3 - b^2 \leq 3$ , то  $0 < 2^{3-b^2} \leq 8$ , откуда  $-1 < 2^{3-b^2} - 1 \leq 7$ , то есть  $-1 < x \leq 7$ . Значит, случай  $x \in [17; 20)$  невозможен. Следовательно,  $x \in [-1; 4)$ . Далее, функция  $y = 17 - \frac{1}{2}(x-3)^2$  не имеет ни одной точки минимума, поскольку её графиком является парабола, ветви которой направлены вниз. На отрезке такая функция может принимать наименьшее значение лишь на его концах:  $y(-1) = 9$ ,  $y(4) = 16,5$ , и, значит,  $y \geq 9$ . Таким образом, случай  $y \in [-1; 4)$  невозможен, поэтому,  $y \in [17; 20)$ .

5) Поскольку точка  $(3; 17)$  является вершиной параболы  $y = 17 - \frac{1}{2}(x-3)^2$ , то  $x = 3$  — единственная точка максимума названной

функции, а  $y_{\text{наиб}} = 17$ . В промежутке  $[17; 20)$  попадает только одно значение функции  $y(x) — y_{\text{наиб}} = 17$ ; при этом  $x = 3$ . Отсюда,  $2^{3-b^2} - 1 = 3$ ,  $2^{3-b^2} = 2^2$ ,  $3 - b^2 = 2$ ,  $b = \pm 1$ .

Ответ:  $\pm 1$ .

**1016. План решения:**

- 1) Найдём ОДЗ.
- 2) Решим исходное неравенство.
- 3) Выпишем условия на  $d$  и  $a$ , где  $a$  — первый член прогрессии.
- 4) Получим ограничения на  $d$  и приведём примеры арифметических прогрессий с такими разностями.

Решение. 1) ОДЗ: 
$$\begin{cases} 6 - x \geq 0, \\ \log_3 x - 2 \neq 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 6, \\ x \neq 9, \\ x > 0; \end{cases} \quad 0 < x \leq 6.$$

2) 
$$\frac{(2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4)(\log_2 x - 2)}{\log_3 x - 2} \leq 0; \quad \frac{(2^x - 1)(2^x - 4)(\log_2 x - 2)}{\log_3 x - 2} \leq 0.$$

Решаем методом интервалов (см. рис. 275). Учитывая ОДЗ, получаем  $(0; 2] \cup [4; 6]$ .

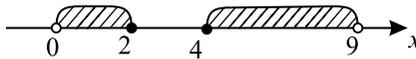


Рис. 275.

3) Обозначим первый член арифметической прогрессии через  $a$ . Тогда условия на прогрессию эквивалентны следующим неравенствам на  $a$  и  $d$ :  $d > 0$ ;  $a > 0$ ;  $a + d \leq 2$ ;  $a + 2d > 2$ ;  $a + 3d < 4$ ;  $a + 4d \geq 4$ ;  $a + 5d \leq 6$ ;  $a + 6d > 6$ .

4)  $\begin{cases} a > 0, \\ a + 5d \leq 6; \end{cases}$  откуда  $d < \frac{6}{5}$ .  $\begin{cases} a + d \leq 2, \\ a + 6d > 6; \end{cases}$  откуда  $d > \frac{4}{5}$ . Теперь покажем, что эти ограничения на  $d$  являются достаточными.

При  $1 < d < \frac{6}{5}$  положим  $a = 0$ . Легко видеть, что прогрессия  $a, a + d, \dots, a + kd, \dots$  удовлетворяет неравенствам из пункта 3).

При  $\frac{4}{5} < d \leq 1$  положим  $a = 2 - d$ . Легко видеть, что прогрессия  $a, a + d, \dots, a + kd, \dots$  также удовлетворяет неравенствам из пункта 3).

**Примечание.** При оформлении решения для нахождения множества возможных значений  $d$  мы не выписывали все неравенства, которым

должны удовлетворять члены данной прогрессии (из соображений большей прозрачности решения), а сразу выбрали те из них, которые дают самые «сильные» ограничения на значения параметра  $d$ .

$$\text{Ответ: } \frac{4}{5} < d < \frac{6}{5}.$$

**1017.** Найдём сначала область определения функции. Функция определена, когда подкоренное выражение определено и неотрицательно, то есть

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ \frac{(17x - 66 - x^2) \cdot 4 \log_{625} 5^{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{(x-5)^2 - 8}} \geq 0; \\ \begin{cases} x \geq 3, \\ \frac{-(x-11)(x-6) \cdot \sqrt{x-3}}{|x-5| - 8} \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Определим промежутки знакопостоянства числителя и знаменателя дроби в левой части 2 — ого неравенства:

$$\begin{aligned} -(x-11)(x-6) \geq 0, \quad 6 \leq x \leq 11. \quad & -(x-11)(x-6) < 0, \quad \begin{cases} x < 6, \\ x > 11. \end{cases} \\ |x-5| > 8, \quad \begin{cases} x-5 > 8, \\ 5-x > 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 13, \\ x < -3. \end{cases} \quad & |x-5| < 8, \quad -8 < x-5 < 8, \\ & -3 < x < 13. \end{aligned}$$

Дробь положительна, когда числитель и знаменатель одного знака. Таким

$$\text{образом, } \begin{cases} x \geq 3, \\ \frac{-(x-11)(x-6) \cdot \sqrt{x-3}}{|x-5| - 8} \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 6, \\ 11 \leq x < 13. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \log_5^2 a - \frac{12}{\log_{5a} 125} + 10 &= \log_5^2 a - \frac{4}{\log_{5a} 5} + 10 = \log_5^2 a - 4 \log_5 5a + 10 = \\ &= \log_5^2 a - 4 \log_5 a + 6. \end{aligned}$$

Пусть  $\log_5 a = t$ , тогда первое число равно  $(t+2)$ , а второе —  $(t^2 - 4t + 6)$ .

Найдём, при каких значениях  $t$  первое число принадлежит области определения данной функции:

$$\begin{cases} 3 \leq t+2 \leq 6, \\ 11 \leq t+2 < 13; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq t \leq 4, \\ 9 \leq t < 11. \end{cases}$$

Найдём, при каких значениях  $t$  второе число принадлежит области определения данной функции:

$$\begin{cases} 3 \leq t^2 - 4t + 6 \leq 6, & (1) \\ 11 \leq t^2 - 4t + 6 < 13; & (2). \end{cases}$$

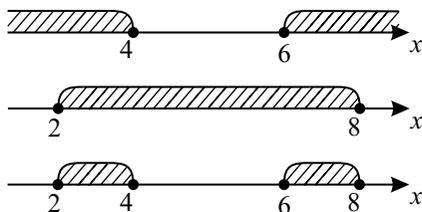


Рис. 276.

$$(1): \begin{cases} t^2 - 4t + 6 \geq 3, \\ t^2 - 4t + 6 \leq 6; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 4t + 3 \geq 0, \\ t^2 - 4t \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (t-1)(t-3) \geq 0, \\ t(t-4) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} t \leq 1, \\ t \geq 3, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq t \leq 1, \\ 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} t^2 - 4t + 6 \geq 11, \\ t^2 - 4t + 6 < 13; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 4t - 5 \geq 0, \\ t^2 - 4t - 7 < 0; \end{cases}$$

решая оба неравенства этой системы методом интервалов, получаем:

$$\begin{cases} \begin{cases} t \leq -1, \\ t \geq 5, \end{cases} \\ 2 - \sqrt{11} < t < 2 + \sqrt{11}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 - \sqrt{11} < t \leq -1, \\ 5 \leq t < 2 + \sqrt{11}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \leq t^2 - 4t + 6 \leq 6, \\ 11 \leq t^2 - 4t + 6 < 13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1, \\ 3 \leq t \leq 4, \\ 2 - \sqrt{11} < t \leq -1, \\ 5 \leq t < 2 + \sqrt{11}. \end{cases}$$

Значения  $t$ , при которых оба числа принадлежат области определения

$$\text{данной функции: } \begin{cases} \begin{cases} 0 \leq t \leq 1, \\ 3 \leq t \leq 4, \\ 2 - \sqrt{11} < t \leq -1, \\ 5 \leq t < 2 + \sqrt{11}, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leq t \leq 4, \\ 9 \leq t < 11; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1, \\ 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Вернёмся к замене:  $t = 1, a = 5. 3 \leq t \leq 4, 3 \leq \log_5 a \leq 4, 5^3 \leq a \leq 5^4, 125 \leq a \leq 625.$

Ответ:  $\{5\} \cup [125; 625].$

**1018.** План решения:

1) Выпишем ОДЗ.

2) Упростим и решим неравенство.

3) Рассмотрим случаи расположения  $a$  относительно решений неравенства и найдём те значения  $a$ , при которых  $a$  и  $8 - 2^a$  удовлетворяют требованиям задачи.

$$1) \text{ Выпишем ОДЗ. } \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 10x + 24 \geq 0, \\ 3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x + \cos x \neq 0; \end{cases}$$

так как  $3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x + \cos x = 2 + \sin^2 x + \cos x > 0$  при всех  $x$ , то эта система равносильна системе  $\begin{cases} (x-4)(x-6) \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 6, \\ 0 < x \leq 4. \end{cases}$

$$2) \frac{\sqrt{(x-4)(x-6)}(8^{x-2} - 3 \cdot 4^{x-2} + 3 \cdot 2^{x-2} - 1)(\log_2 x - 3)}{3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x + \cos x} \leq 0;$$

$\sqrt{(x-4)(x-6)}(8^{x-2} - 3 \cdot 4^{x-2} + 3 \cdot 2^{x-2} - 1)(\log_2 x - 3) \leq 0$ ; (знаменатель, как мы показали, положителен) по формуле куба разности упрощаем выражение во второй скобке:

$(2^{x-2} - 1)^3(\log_2 x - 3) \leq 0$ . Решаем методом интервалов, учитывая ОДЗ (см. рис. 276). Решения неравенства:  $[2; 4] \cup [6; 8]$ .

3) Так как  $8 - 2^a$  не должно являться решением неравенства, но  $8 - 2^a < 8$ , то должно выполняться неравенство:  $8 - 2^a < 6$ ;  $2^a > 2$ ;  $a > 1$ . Численной подстановкой убеждаемся, что  $a = 2, 3, 4$  не удовлетворяют условию задачи.  $a = 5$  — удовлетворяет всем требуемым условиям. (проверьте это самостоятельно) Следовательно, минимальное целое  $a$  равно 5.

Ответ: 5.

$$1019. 1) \text{ Выпишем ОДЗ. } \begin{cases} x^2 - 7x + 13 > 0, \\ \log_7(x^2 - 7x + 13) \geq 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 13 > 0, \\ x^2 - 7x + 13 \geq 1, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$x^2 - 7x + 12 \geq 0; (x-3)(x-4) \geq 0; \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

2)  $x = 3$  и  $x = 4$  являются решениями, а при остальных  $x$   $\sqrt{\log_7(x^2 - 7x + 13)} > 0$ , поэтому можно упростить исходное неравенство, поделив обе части его на положительное число.

$12^x \log_{12} x + 12 - 12 \log_{12} x - 12^x \leq 0$ ;  $12^x(\log_{12} x - 1) - 12(\log_{12} x - 1) \leq 0$ ;  $12(12^{x-1} - 1)(\log_{12} x - 1) \leq 0$ ; Решаем методом интервалов, учитывая ОДЗ (см. рис. 277). Решения неравенства  $[1; 3] \cup [4; 12]$ .

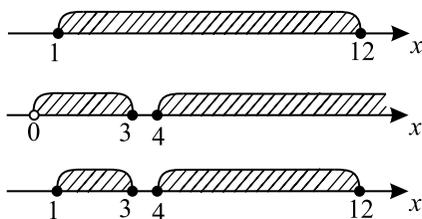


Рис. 277.

3) Так как число  $a$  не должно являться решением неравенства, то  $a < 1$  или  $a > 12$ . Но при  $a > 12$  имеем:  $3^{a-2} > 3 + 3^{10}$  и между числами  $a$  и  $3 + 3^{a-2}$  решений неравенства нет. Поэтому значения  $a > 12$  не удовлетворяют условиям задачи и  $a < 1$ . Легко видеть, что  $a = 0$  удовлетворяет всем условиям, то есть является искомым значением.

Ответ: 0.

**1020.** Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{3^x - 6a + 3}{a - 2} + \frac{12}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq \frac{10a + 2}{3 - a - 3^x},$$

$$\frac{(3^x - 6a + 3)(3^x + a - 3) + (a - 2)(10a + 2) + 12}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq 0,$$

$$\frac{(3^x)^2 - 3^x \cdot 5a + 4a^2 + 3a - 1}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq 0. \text{ Сделав замену } t = 3^x > 0, \text{ полу-}$$

чим неравенство  $\frac{t^2 - t \cdot 5a + 4a^2 + 3a - 1}{(a - 2)(t - 3 + a)} \leq 0$ . Найдём корни трёхчлена

$$t^2 - t \cdot 5a + 4a^2 + 3a - 1: t_{1,2} = \frac{5a \pm \sqrt{25a^2 - 4 \cdot (4a^2 + 3a - 1)}}{2},$$

$$t_{1,2} = \frac{5a \pm \sqrt{9a^2 - 12a + 4}}{2}, t_{1,2} = \frac{5a \pm \sqrt{(3a - 2)^2}}{2},$$

$$t_{1,2} = \frac{5a \pm (3a - 2)}{2} \Rightarrow t_1 = a + 1, t_2 = 4a - 1. \text{ Таким образом, приходим к}$$

неравенству  $\frac{(t - (a + 1))(t - (4a - 1))}{(a - 2)(t - (3 - a))} \leq 0$ . Воспользуемся методом интервалов для его решения. Знак левой части неравенства будет зависеть от знака выражения  $(a - 2)$ , поэтому рассмотрим два случая:

1)  $a < 2$ , тогда  $a - 2 < 0$ . В этом случае решение неравенства относительно  $t$  всегда будет содержать промежуток  $[t_0; +\infty)$ , где  $t_0 > 0$ , но тогда решение неравенства относительно  $x$  будет содержать промежуток

$[\log_3 t_0; +\infty)$  и множество решений исходного неравенства не будет являться отрезком.

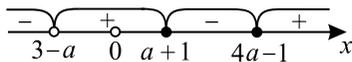


Рис. 278.

2)  $a > 2$ , то есть  $a - 2 > 0$ . Тогда  $(4a - 1) - (a + 1) = 3a - 2 > 0$ ,  $(a + 1) - (3 - a) = 2a - 2 > 0$ , а значит,  $3 - a < a + 1 < 4a - 1$ . Тогда по методу интервалов (см. рисунок 278) решением неравенства относительно  $t$  будет множество  $(-\infty; 3 - a) \cup [a + 1; 4a - 1]$ , но  $t > 0$ , поэтому если  $0 \in (-\infty; 3 - a) \cup [a + 1; 4a - 1]$ , то среди решений неравенства относительно  $t$  будет содержаться промежуток  $(0; t_0]$ . Следовательно, множество решений исходного неравенства будет содержать промежуток  $(-\infty; \log_3 t_0]$  и множество решений исходного неравенства не будет являться отрезком. Таким образом, чтобы множество решений исходного неравенства было отрезком, необходимо и достаточно выполнения условия  $0 \in [3 - a; a + 1) \Rightarrow \begin{cases} 3 - a \leq 0, \\ a + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 3$ . При этом решением неравенства относительно  $t$  будет отрезок  $[a + 1; 4a - 1]$ , а относительно  $x$  — отрезок  $[\log_3(a + 1); \log_3(4a - 1)]$ . Его длина равна  $\log_3(4a - 1) - \log_3(a + 1) = \log_3 \frac{4a - 1}{a + 1}$ , по условию она меньше 1.

Таким образом, значения  $a$  находим из неравенства  $\log_3 \frac{4a - 1}{a + 1} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{4a - 1}{a + 1} < 3$ . При  $a \geq 3$  имеем  $0 < \frac{4a - 1}{a + 1} < 3 \Leftrightarrow \frac{a - 4}{a + 1} < 0 \Leftrightarrow a \in [3; 4)$  при  $a \geq 3$ .

Ответ:  $[3; 4)$ .

**1021.** Если  $\frac{36}{x} - 1 > 1$ , то исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_{0,1} |0,1x - 1,1| < 1, \\ \log_{0,1} |0,1x - 1,1| > 0, \\ \frac{36}{x} - 1 > 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |0,1x - 1,1| > 0,1, \\ |0,1x - 1,1| < 1, \\ \frac{36 - 2x}{x} > 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решением неравенства  $\frac{36 - 2x}{x} > 0$  являются значения  $x \in (0; 18)$ .

Раскрывая модуль:  $|0,1x - 1,1| = \begin{cases} 0,1x - 1,1, & \text{при } x > 11, \\ 1,1 - 0,1x, & \text{при } x < 11. \end{cases}$

Заметим, что  $x \neq 11$  по О.Д.З.

При  $x > 11$  имеем

$$\begin{cases} 0,1x - 1,1 > 0,1, \\ 0,1x - 1,1 < 1, \\ x > 11, \\ x < 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 12, \\ x < 21, \\ x > 11, \\ x < 18. \end{cases} \Rightarrow x \in (12; 18).$$

При  $x < 11$  имеем

$$\begin{cases} 1,1 - 0,1x > 0,1, \\ 1,1 - 0,1x < 1, \\ x < 11, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 10, \\ x > 1, \\ x < 11, \\ x > 0. \end{cases} \Rightarrow x \in (1; 10).$$

Таким образом  $x \in (1; 10) \cup (12; 18)$ .

Если  $0 < \frac{36}{x} - 1 < 1$ , то исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_{0,1} |0,1x - 1,1| > 1, \\ \log_{0,1} |0,1x - 1,1| > 0, \\ 0 < \frac{36}{x} - 1 < 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |0,1x - 1,1| < 0,1, \\ |0,1x - 1,1| \neq 0 \\ 1 < \frac{36}{x} < 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решением неравенства  $1 < \frac{36}{x} < 2$  является интервал  $x \in (18; 36)$ . Значит, при раскрытии модуля рассматриваем только случай  $x > 11$ .

$$\begin{cases} 0,1x - 1,1 < 0,1, \\ x > 18, \\ x < 36; \end{cases} \begin{cases} x < 12, \\ x > 18, \\ x < 36. \end{cases} \text{ Решений нет.}$$

Итак, решением логарифмического неравенства являются значения  $x \in (1; 10) \cup (12; 18)$ .

Теперь найдём  $a$ , при которых числа  $\frac{a-3}{a+5}$  и  $2\sqrt{\frac{a+5}{a-3}}$  принадлежат множеству  $(1; 10) \cup (12; 18)$ . После замены  $t = \frac{a-3}{a+5}$  необходимо выяснить, когда числа  $t$  и  $\frac{2}{\sqrt{t}}$  принадлежат множеству  $(1; 10) \cup (12; 18)$ . Так как  $t > 1$ , то  $0 < \frac{2}{\sqrt{t}} < 2$ . Следовательно, получим совокупность систем неравенств:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1 < t < 10, \\ 0 < \frac{2}{\sqrt{t}} < 2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 12 < t < 18, \\ 0 < \frac{2}{\sqrt{t}} < 2. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Решением первой системы является интервал  $t \in (1; 4)$ . Вторая система решений не имеет.

С учётом замены получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a-3}{a+5} > 1 \\ \frac{a-3}{a+5} < 4; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{-8}{a+5} > 0 \\ \frac{-3a-23}{a+5} < 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a < -5, \\ a < -7\frac{2}{3}. \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left( -\infty; -7\frac{2}{3} \right).$$

**1022.** Если  $3 - \sqrt{x} > 1$ , то исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_{0,5}(0,5|x-5| - 1,5) < 1, \\ \log_{0,5}(0,5|x-5| - 1,5) > 0, \\ 3 - \sqrt{x} > 1, \\ x \geq 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0,5|x-5| - 1,5 > 0,5, \\ 0,5|x-5| - 1,5 < 1, \\ \sqrt{x} < 2, \\ x \geq 0; \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x-5| > 4, \\ |x-5| < 5, \\ x < 4, \\ x \geq 0. \end{array} \right.$$

По определению модуля функции:  $|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{при } x \geq 5, \\ 5-x, & \text{при } x < 5. \end{cases}$  Так как  $x < 4$ , то рассматриваем лишь тот случай, когда  $x < 5$ . Получим систему

$$\left\{ \begin{array}{l} 5-x > 4, \\ 5-x < 5, \\ x < 4, \\ x \geq 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 1, \\ x > 0, \\ x < 4, \\ x \geq 0. \end{array} \right. \Rightarrow x \in (0; 1).$$

Если  $0 < 3 - \sqrt{x} < 1$ , то исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_{0,5}(0,5|x-5| - 1,5) > 1, \\ \log_{0,5}(0,5|x-5| - 1,5) > 0, \\ 0 < 3 - \sqrt{x} < 1, \\ x > 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0,5|x-5| - 1,5 < 0,5, \\ 0,5|x-5| - 1,5 > 0, \\ \sqrt{x} > 2, \\ \sqrt{x} < 3; \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x - 5| < 4, \\ |x - 5| > 3, \\ x > 4, \\ x < 9. \end{cases}$$

Для  $x \geq 5$  получим систему

$$\begin{cases} x - 5 < 4, \\ x - 5 > 3, \\ x > 4, \\ x < 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 9, \\ x > 8, \\ x > 4, \\ x < 9. \end{cases} \Rightarrow x \in (8; 9).$$

Для  $x < 5$  получим систему

$$\begin{cases} 5 - x < 4, \\ 5 - x > 3, \\ x > 4, \\ x < 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x < 2, \\ x > 4, \\ x < 9. \end{cases} \text{ Решений нет.}$$

Таким образом, решением логарифмического неравенства являются значения  $x \in (0; 1) \cup (8; 9)$ .

Преобразуем выражение:

$$\frac{a+1}{a-1} + 2 \frac{a+1}{(a-1)^2} = \frac{a+1}{a-1} \left( 1 + \frac{2}{a-1} \right) = \left( \frac{1+a}{1-a} \right)^2.$$

Чтобы найти  $a$ , нужно решить следующие системы:

$$\begin{cases} 0 < \frac{1+a}{1-a} < 1, \\ 0 < \left( \frac{1+a}{1-a} \right)^2 < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 8 < \frac{1+a}{1-a} < 9, \\ 8 < \left( \frac{1+a}{1-a} \right)^2 < 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < \frac{1+a}{1-a} < 1, \\ 8 < \left( \frac{1+a}{1-a} \right)^2 < 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 < \frac{1+a}{1-a} < 9, \\ 0 < \left( \frac{1+a}{1-a} \right)^2 < 1. \end{cases} \quad \text{Последние три системы решений не имеют.}$$

В результате получим:

$$\begin{cases} 0 < \frac{1+a}{1-a} < 1, \\ 0 < \left( \frac{1+a}{1-a} \right)^2 < 1; \end{cases} \quad \text{Сделаем замену: } t = \frac{1+a}{1-a}. \text{ Тогда } \begin{cases} 0 < t < 1, \\ 0 < t^2 < 1; \end{cases}$$

Эта система, очевидно, имеет решение  $t \in (0; 1)$ . Вторая система решений не имеет. С учётом замены получаем

$$\begin{cases} \frac{1+a}{1-a} > 0 \\ \frac{1+a}{1-a} < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1, \\ a < 0. \end{cases}$$

Ответ:  $(-1; 0)$ .

**1023.** Так как боковые грани  $SBA$  и  $SBC$  перпендикулярны плоскости  $ABC$ , то ребро  $SB$  перпендикулярно плоскости основания  $ABC$ . По условию  $SM : MA = 1 : 2$ . Обозначим  $SM = x$ , тогда  $MA = 2x$ . Так как секущая плоскость параллельна прямым  $AC$  и  $SB$  и  $SB \perp ABC$ , то  $MNFP$  — прямоугольник (см. рис. 279). Найдём  $x$ . Из прямоугольного  $\triangle BAS$ :  $SA^2 = 36 \cdot 3 + 64 = 172 = 4 \cdot 43$ ;  $SA = 2\sqrt{43}$ .  $SA = x + 2x = 3x$ .  $x = \frac{2\sqrt{43}}{3}$ . Найдём  $AC$  из  $\triangle ABC$  по теореме косинусов:

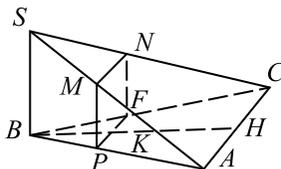


Рис. 279.

$AC^2 = 100 + 64 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 84 = 4 \cdot 21$ ,  $AC = 2\sqrt{21}$ . Найдём  $MN$ .

Так как  $MN \parallel AC$ , то  $\triangle SMN \sim \triangle SAC$ . Отсюда:  $\frac{MN}{AC} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$ .

$MN = \frac{AC}{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ . Найдём  $MP$ . Так как  $MP \parallel SB$ , то

$$\begin{aligned} \triangle APM \sim \triangle ABS, \quad \frac{MP}{6\sqrt{3}} &= \frac{2}{3}; \quad MP = 4\sqrt{3}. \quad S_{MNFP} = MN \cdot MP = \\ &= \frac{2\sqrt{21}}{3} \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Искомый объём  $V_{APMNF} = \frac{1}{3} \cdot H \cdot S = \frac{8\sqrt{7}}{3} \cdot H$ , где  $H$  — высота пирамиды, опущенная из вершины  $A$  на грань  $MNFP$ . Так как  $AC \parallel MPF$ , то в качестве высоты  $H$  можно взять расстояние между параллельными прямыми  $PF$  и  $AC$ . Проведём  $BH \perp AC$ , тогда  $HK$  — высота пирамиды.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 20\sqrt{3}. S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{BH \cdot AC}{2} = \frac{BH \cdot 2\sqrt{21}}{2}.$$

$$\text{Поэтому: } 20\sqrt{3} = BH \cdot \sqrt{21}; BH = \frac{20}{\sqrt{7}}. HK = \frac{2}{3}BH = \frac{40}{3\sqrt{7}}.$$

$$\text{Найдём } V_{APMNF} = \frac{8\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{40}{3\sqrt{7}} = \frac{320}{9}.$$

Ответ:  $\frac{320}{9}$ .

**1024. Решение.** Сделаем чертёж (см. рис. 280).

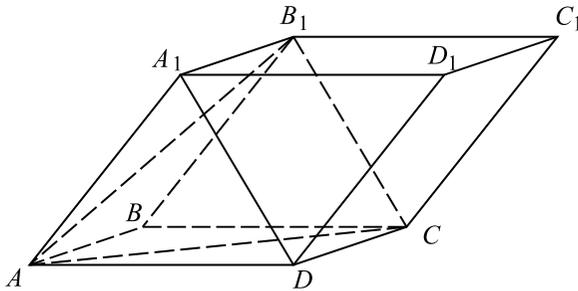


Рис. 280.

Пусть  $a$  — длина ребра призмы. Проведём высоту  $A_1M$  треугольника  $AA_1D$ . Так как  $\angle A_1AD = 60^\circ$ , то  $AM = \frac{a}{2}$ . Аналогично,  $N$  — середина  $AB$ . Пусть  $A_1P$  — высота призмы. По теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, получаем  $PM \perp AD$ ,  $PN \perp AB$ .  $\triangle AA_1M = \triangle AA_1N \Rightarrow \triangle A_1MP = \triangle A_1NP \Rightarrow \triangle AMP = \triangle ANP$  (по признакам равенства прямоугольных треугольников). А это значит, что точка  $P$  лежит на диагонали  $AC$  квадрата  $ABCD$ , причём, так как  $AM = MD$ ,  $MP \parallel DC$ , то  $P$  — середина диагонали  $AC$ , то есть центр квадрата  $ABCD$ . Тогда  $AP \perp BD$  (по свойству диагоналей квадрата),  $AP \perp A_1P$  (так как  $A_1P$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ ). Следовательно,  $AP$  перпендикулярна плоскости  $A_1BD$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), а значит,  $AP \perp A_1D$ , так как  $A_1D \in A_1BD$ . Прямая  $AC$  перпендикулярна плоскости  $A_1BD$ , содержащей  $A_1D$ . Значит, угол между прямыми  $AC$  и  $A_1D$  равен  $90^\circ$ .

Ответ:  $90^\circ$ .

**1025.** Продолжим  $PQ$  до пересечения с прямой  $CC_1$  (см. рис. 281). И пусть  $S$  — точка их пересечения. Пусть  $K$  — точка пересечения  $AS$  и плоскости  $A_1B_1C_1D_1$ .

План решения:

1. Находим площадь треугольника  $CPQ$ .
2. Находим  $SC_1, C_1K$ .
3. Доказываем, что  $C_1K$  — биссектриса угла  $B_1C_1D_1$ . Доказываем, что угол  $C_1KQ$  прямой.
4. Убеждаемся, что  $R$  — точка пересечения  $QK$  с  $B_1C_1$ . В треугольнике  $C_1QR$  высота  $C_1K$  также биссектриса. Значит он равнобедренный. Находим  $C_1R$ .
5.  $C_1R$  перпендикулярно плоскости  $CPQ$ . Вычисляем объём  $CPQR$ , используя площадь  $CPQ$  и длину  $C_1R$ .

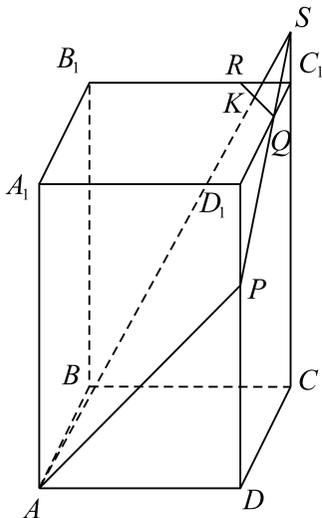


Рис. 281.

*Решение.* 1.  $S_{CPQ} = S_{CDD_1C_1} - S_{PQD_1} - S_{QC_1C} - S_{CPD}$ ,  
 $S_{CPQ} = 17 \cdot 10 - \frac{1}{2}(7 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 17) = 70$ .

2. Из подобия треугольников  $SC_1Q$  и  $PD_1Q$  имеем  $SC_1 : PD_1 = C_1Q : D_1Q$ . Из условий задачи находим  $PD_1 = 7, D_1Q = 7$ . Таким образом  $SC_1 = 3$ . Из подобия треугольников  $SC_1K$  и  $SCA$  имеем  $C_1K : C_1S = CA : CS$ . Находим  $C_1K = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

3. Из параллельности  $C_1Q$  и  $CD, C_1K$  и  $CA$  следует, что угол  $\angle QC_1K = 45^\circ$ . То есть для угла  $D_1C_1B_1$  луч  $C_1K$  является биссектрисой. Пусть  $QK' \perp CK$ . Тогда треугольник  $QK'C_1$  — прямоугольный равнобедренный. Находим  $QK' = \frac{3\sqrt{2}}{2} = QK$ . Значит точка  $K'$  совпадает с точкой  $K$ . Итак,  $QK \perp C_1K$ .

4. Точки  $Q$  и  $K$  лежат в плоскости  $APQ$ , следовательно и вся прямая  $QK$  лежит в этой плоскости. Значит точка пересечения её с прямой  $B_1C_1$  — это точка  $R$ . В треугольнике  $C_1QR$  высота  $C_1K$  также биссектриса, значит, он равнобедренный.  $C_1R = C_1Q = 3$ .

5.  $C_1R$  перпендикулярен к плоскости  $CPQ$ , поэтому  $V_{CPQR} = \frac{1}{3}S_{CPQ} \cdot C_1R = 70$ .

Ответ: 70.

**1026.** Дано: в прямую призму  $ABCD A' B' C' D'$  вписан цилиндр с осью  $OO'$ ,  $ABCD$  — ромб,  $\angle BAD = 30^\circ$ ,  $S_{\text{бок. цил.}} = \pi$ ,  $V_{\text{пр.}} = 28$ .  
Найти:  $d(OO', CD')$ .

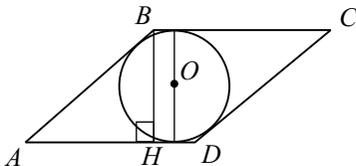


Рис. 282.

*Решение.* Сделаем чертёж (см. рис. 282).

Поскольку  $OO' \parallel CDD'C'$ , то  $d(OO', CD') = d(OO', CDD'C') = r$ , где  $r$  — радиус основания цилиндра. Рассмотрим ромб  $ABCD$ . Высота  $BH$  равна  $2r$ . Так как  $\angle BAD = 30^\circ$ , то  $AB = 2BH = 4r$ .

$S_{\text{бок. цил.}} = 2\pi r h = \pi \Rightarrow 2rh = 1$ .

$V_{\text{пр.}} = AB^2 \sin 30^\circ \cdot h = 2r^2 h = 4r = 28 \Rightarrow r = 7$ .

Ответ: 7.

**1027.** Дано: боковые грани пирамиды  $SABCD$  составляют равные углы с плоскостью основания,  $ABCD$  — ромб,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $O$  — центр; в

$SABCD$  вписан конус с осью  $OO'$ ,  $SO' : O'O = 3 : 5$ ,

$$V_{\text{пир.}} = \frac{4096}{\pi\sqrt{3}}.$$

Найти:  $V_{\text{кон.}}$ .

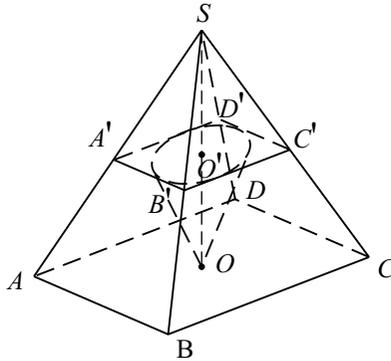


Рис. 283.

*Решение.* Сделаем чертёж (см. рис. 283).

Пусть  $A'B'C'D'$  — ромб, высекаемый на пирамиде плоскостью основания конуса. Положим  $SO' = 3h$ ,  $A'B' = 3x$ , тогда  $OO' = 5h$ ,  $AB = 8x$ . Рассмотрим ромб  $A'B'C'D'$  (см. рис. 284).

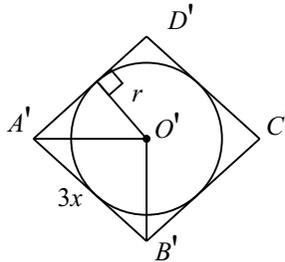


Рис. 284.

$$\begin{aligned} \text{Так как } \angle O'A'B' &= \frac{1}{2}\angle O'A'D' = 30^\circ, \text{ то } A'O' = A'B' \cos 30^\circ = \\ &= \frac{3\sqrt{3}x}{2}, r = \frac{A'O'}{2} = \frac{3\sqrt{3}x}{4}. V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 5h = \frac{45}{16}\pi x^2 h. \end{aligned}$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}AB^2 \sin 60^\circ \cdot SO = \frac{1}{3}64x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8h = \frac{256x^2 h}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Таким образом, } \frac{V_{\text{кон.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{45\sqrt{3}\pi}{4096} \Rightarrow V_{\text{кон.}} = \frac{45\sqrt{3}\pi}{4096} \cdot \frac{4096}{\pi\sqrt{3}} = 45.$$

Ответ: 45.

**1028.** Дано:  $SABC$  — правильная пирамида,  $O$  — центр  $ABC$ ,  $A'B'C' \parallel ABC$ ,  $P$  — центр  $A'B'C'$ ,  $SP : PO = 3 : 4$ ,  $V_{SABC} = 343$ .

Найти:  $V_{OA'B'C'}$ .

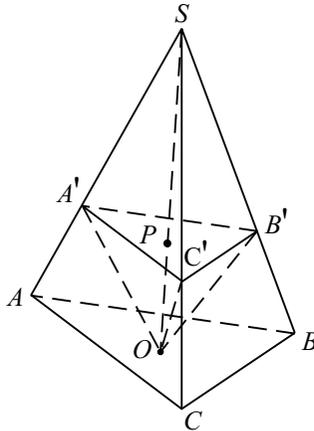


Рис. 285.

*Решение.* Сделаем чертёж (см. рис. 285).

Пусть  $SP = 3h$ , тогда  $OS = 7h$ .  $\triangle A'B'C'$  и  $ABC$  подобны с коэффици-

ентом подобия  $\frac{3}{7}$ . Таким образом,  $\frac{V_{OA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 4h}{\frac{1}{3} \cdot 7h} \cdot \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} =$

$$= \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{36}{343} \Rightarrow$$

$$V_{OA'B'C'} = \frac{36}{343} V_{SABC} = 36.$$

Ответ: 36.

**1029.** Дано: в правильную усечённую пирамиду  $ABCD A'B'C'D'$  с двугранным углом при основании в  $60^\circ$  вписан шар с центром  $M$ ,  $O$  — центр  $ABCD$ ,  $O'$  — центр  $A'B'C'D'$ ,  $V_{\text{ш.}} = 3\pi$ .

Найти:  $V_{\text{пир.}}$ .

*Решение.* Сделаем чертёж (см. рис. 286).

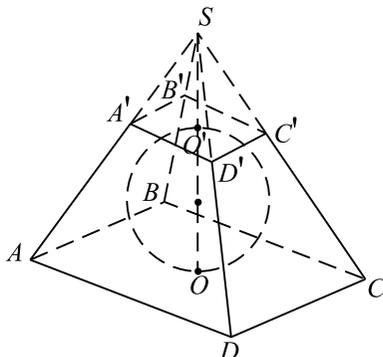


Рис. 286.

Пусть  $S$  — вершина неусеченной пирамиды;  $K, K', N, N'$  — середины сторон  $AB, A'B', CD, C'D'$ . Рассмотрим трапецию  $KK'N'N$  (см. рис. 287).

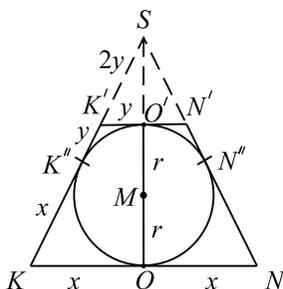


Рис. 287.

Треугольники  $SKN$  и  $SK'N'$ , очевидно, правильные, поскольку  $\angle SKN = 60^\circ$ . Пусть  $K''$  и  $N''$  — точки касания шара к  $KK'$  и  $NN'$ . Обозначим  $KK'' = x, K''K' = y$ , тогда  $KN = 2x, K'S = K'N' = 2y, KS = x + 3y$ , но  $KS = KN \Rightarrow x + 3y = 2x \Rightarrow x = 3y \Rightarrow KN = 3K'N'$ .

$$\text{Далее, } \triangle SK'O' \sim \triangle SKO \Rightarrow \frac{SO'}{SO} = \frac{K'O'}{KO} \Rightarrow \frac{SO'}{SO' + 2r} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$3SO' = SO' + 2r \Rightarrow SO' = r, SO = 3r. \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{KO}{SO} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{3r} \Rightarrow$$

$$x = r\sqrt{3}, y = \frac{r\sqrt{3}}{3}. V_{\text{ш.}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 3\pi \Rightarrow 4r^3 = 9.$$

Таким образом,  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO - \frac{1}{3}S_{A'B'C'D'} \cdot SO' = \frac{1}{3} \cdot 4x^2 \cdot 3r - \frac{1}{3} \cdot 4y^2 \cdot r = \frac{26}{9} \cdot 4r^3 = \frac{26}{9} \cdot 9 = 26$ .

Ответ: 26.

**1030.** Дано: четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность основания конуса с вершиной  $S$ ,  $AD = CD = BC = \frac{1}{2}AB$ ,  $P$  лежит на образующей  $SQ$ ,  $SP = PQ$ ,  $V_{\text{кон.}} = 8\pi\sqrt{3}$ .

Найти:  $V_{PABCD}$ .

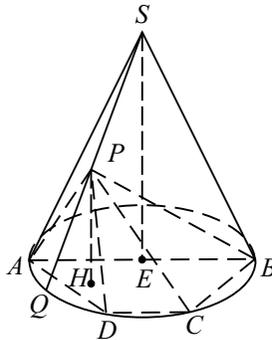


Рис. 288.

*Решение.* Сделаем чертёж (см. рис. 288). Рассмотрим основание конуса (см. рис. 289).

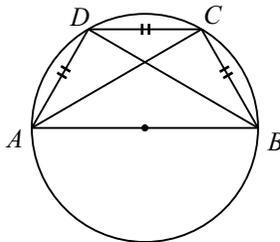


Рис. 289.

Так как  $AD = CD = BC$ , то  $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{BCD} \Rightarrow \angle ABC = \angle BAD \Rightarrow \triangle ABC = \triangle ABD \Rightarrow$  точки  $C, D$  равноудалены от прямой  $AB \Rightarrow CD \parallel AB$ .

Рассмотрим рисунок 290.

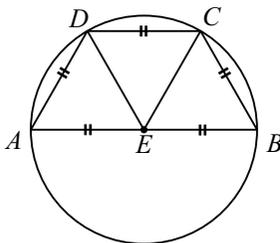


Рис. 290.

Пусть  $E$  — середина  $AB$ , тогда  $AE = CE$ , кроме того,  $AE \parallel CD$  и  $AE = AD$ , значит,  $ADCE$  — ромб. Аналогично доказывается, что  $BCDE$  — ромб. Таким образом,  $AE = BE = CE = DE = AD = BC = CD$ . Тем самым, точка  $E$  — центр описанной вокруг  $ABCD$  окружности, то есть основания конуса. Обозначим  $r$  — радиус окружности, тогда  $S_{ABCD} =$

$= 3S_{ADE} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$ . Поскольку вершина  $P$  лежит на середине образующей  $SQ$ , то высота  $PH$  пирамиды равна половине высоты конуса  $SE$ .

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot SE, V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}r^2}{4} \cdot \frac{1}{2}SE = \frac{\sqrt{3}}{8}r^2 \cdot SE. \frac{V_{\text{пир.}}}{V_{\text{кон.}}} = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \Rightarrow$$

$$V_{PABCD} = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \cdot 8\pi\sqrt{3} = 9.$$

Ответ: 9.

**1031.** Дано:  $SABCDEF$  — правильная пирамида,  $SO$  — высота,  $SO = AB$ .

Найти:  $\angle ABSC$ .

Решение. Сделаем чертёж (см. рис. 291).

Примем за  $a$  длину стороны основания. Так как  $\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ , то  $\triangle AOB$  — правильный и  $OB = a$ , кроме того,  $SO = a$ , значит,  $SB = a\sqrt{2}$ . Опустим высоты  $AH$  и  $CH$  на ребро  $BS$  и высоту  $SM$  на сторону  $AB$ .  $SM^2 = SB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{7}}{2}a$ .

$$S_{ABS} = \frac{1}{2}SM \cdot AB = \frac{1}{2}AH \cdot SB \Rightarrow AH = \frac{SM \cdot AB}{SB} = \frac{\sqrt{7}a}{2\sqrt{2}}.$$

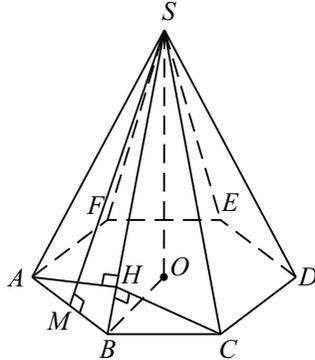


Рис. 291.

Так как  $\angle ABC = \frac{180^\circ \cdot 4}{6} = 120^\circ$ , то  $AC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ = 3a^2$ .

Тогда из  $\triangle ACH$ :  $AC^2 = 2AH^2(1 - \cos \angle AHC) \Rightarrow 1 - \cos \angle AHC = \frac{AC^2}{2AH^2} = \frac{3a^2}{2 \cdot \frac{7}{8}a^2} = \frac{12}{7} \Rightarrow \cos \angle AHC = -\frac{5}{7}$ .

Но  $\angle AHC = \angle ABSC \Rightarrow \angle ABSC = \arccos\left(-\frac{5}{7}\right)$ .

Ответ:  $\arccos\left(-\frac{5}{7}\right)$ .

**1032.** Дано:  $SABCD$  — правильная пирамида,  $SO$  — высота,  $SO = AB$ .

Найти:  $\angle H$ .

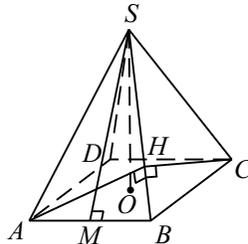


Рис. 292.

Решение. Сделаем чертёж (см. рис. 292).

Положим  $AB = SO = a$ , тогда  $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $BS^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow$

$BS = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a$ . Опустим высоты  $AH$  и  $CH$  на ребро  $BS$  и высоту  $SM$  на

сторону  $AB$ .  $SM^2 = SB^2 - BM^2 = \frac{3a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ .

$$S_{ABS} = \frac{1}{2}SM \cdot AB = \frac{1}{2}AH \cdot SB \Rightarrow AH = \frac{SM \cdot AB}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot a}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a} =$$

$= \frac{\sqrt{10}a}{2\sqrt{3}}$ . Тогда из  $\triangle ACH$ :  $AC^2 = 2AH^2(1 - \cos \angle AHC) \Rightarrow$

$$1 - \cos \angle AHC = \frac{AC^2}{2AH^2} = \frac{2a^2}{2 \cdot \frac{10}{12}a^2} = \frac{6}{5} \Rightarrow \cos \angle AHC = -\frac{1}{5}.$$

Поэтому  $\angle AHC = \angle ABSC \Rightarrow \angle ABSC = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$ .

Ответ:  $\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$ .

**1033.** Дано:  $SABC$  — правильная пирамида,  $SO$  — высота,  $SO = AB$ .

Найти:  $\angle ABSC$ .

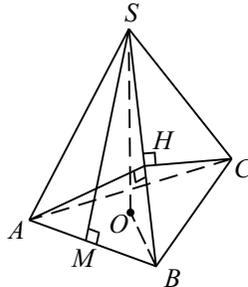


Рис. 293.

Решение. Сделаем чертёж (см. рис. 293).

Положим  $AB = SO = a$ , тогда  $OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$$BS^2 = a^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow BS = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Опустим высоты  $AH$  и  $CH$  на ребро  $BS$  и высоту  $SM$  на сторону  $AB$ .

$$SM^2 = SB^2 - BM^2 = \frac{4a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{13}{12}a^2 \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}a.$$

$$S_{ABS} = \frac{1}{2}SM \cdot AB = \frac{1}{2}AH \cdot SB \Rightarrow AH = \frac{SM \cdot AB}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}a \cdot a}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{4}a. \text{ Тогда из } \triangle ACH: AC^2 = 2AH^2(1 - \cos \angle AHC) \Rightarrow$$

$$1 - \cos \angle AHC = \frac{AC^2}{2AH^2} = \frac{a^2}{\frac{13}{8}a^2} = \frac{8}{13} \Rightarrow \cos \angle AHC = \frac{5}{13}.$$

Но  $\angle AHC = \angle ABSC \Rightarrow \angle ABSC = \arccos\left(\frac{5}{13}\right)$ .

Ответ:  $\arccos\left(\frac{5}{13}\right)$ .

**1034.** Сделаем чертёж (см. рис. 294, 295).

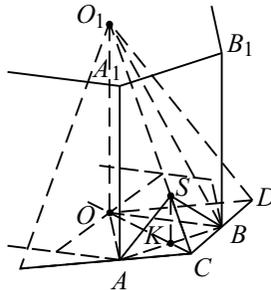


Рис. 294.

Определим, как располагаются стороны основания пирамиды по отношению к сторонам основания призмы. Сторона основания пирамиды

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , пирамида правильная, тогда высота  $\triangle COD = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$ . То-

гда так как стороны пирамиды параллельны серединам противоположных сторон основания призмы, то стороны основания призмы являются высотами треугольников, составляющих основание пирамиды. Объём части

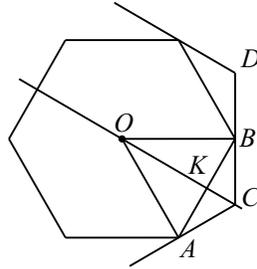


Рис. 295.

пирамиды, находящейся вне призмы, состоит из объёмов шести равных пирамид  $SABC$ . Найдём площадь основания  $S_{ABC}$ .  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot KC$ ,

$$KC = OC - OK = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}. S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

В плоскости  $OO_1C$  проведём  $SK \parallel AA_1$ .  $AA_1 \perp (AOB)$ , значит,  $SK \perp (AOB)$ , следовательно  $SK$  — высота пирамиды  $SABC$ .  $\triangle OCO_1 \sim \triangle SKC$  ( $\angle C$  — общий,  $\angle O_1OC = \angle SKC = 90^\circ$ ).  $\frac{SK}{OO_1} = \frac{KC}{OC}$ ,  $SK = \frac{OO_1 \cdot KC}{OC} = \frac{1 \cdot \sqrt{3} \cdot 3}{6 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$ .  $V = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{24}$ .

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{24}$ .

**1035.** Дано: конус и пять одинаковых шаров внутри конуса. Четыре из них касаются основания конуса и его боковой поверхности. Каждый из этих 4-х шаров касается двух соседних. Пятый шар касается первых четырёх и боковой поверхности конуса.  $r = 4$ , где  $r$  — радиус каждого из шаров (см. рис. 296).

Найти:  $V$ .

*Решение.* Соединив отрезками центры всех пяти шаров, получим правильную четырёхугольную пирамиду  $OO_1O_2O_3O_4$  с одинаковыми рёбрами, равными по  $2r$ . При этом высота пирамиды является отрезком высоты конуса. Нижнее основание пирамиды параллельно основанию конуса и находится от него на расстоянии  $r$ . Проведём диагональное сечение пирамиды до пересечения с поверхностью конуса (см. рис. 296). Тогда в  $\triangle OO_1O_3$  боковые стороны равны по  $2r$ , а  $O_1O_3$  —

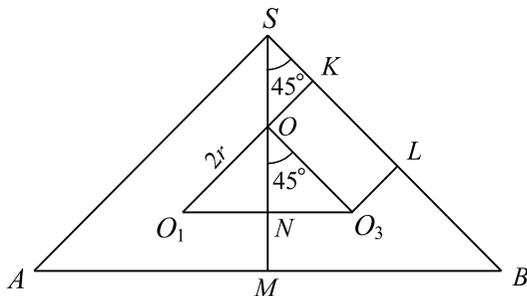


Рис. 296.

диагональ квадрата со стороной  $2r$ .  $O_1O_3 = \sqrt{(2r)^2 + (2r)^2} = 2r\sqrt{2}$ ,  $NO_3 = r\sqrt{2}$ .

$ON = \sqrt{(2r)^2 - (r\sqrt{2})^2} = r\sqrt{2}$ . Следовательно, угол  $NOO_3 = 45^\circ$ . Так как  $OO_3 \parallel SB$  ( $OK = O_3L = r$ ,  $K$  и  $L$  — точки касания соответствующих шаров с боковой поверхностью конуса), то  $\angle MSB = \angle KOS = 45^\circ$ . Это означает, что  $h = R = MB$ , где  $h$  — высота конуса,  $R$  — радиус основания конуса. Из  $\triangle SOK$  находим  $OS = r\sqrt{2}$ . Тогда

$$R = h = MN + NO + OS = r + r\sqrt{2} + r\sqrt{2} = r(1 + 2\sqrt{2}).$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 h = \frac{1}{3} \pi h^3 = \frac{1}{3} \pi r^3 (1 + 2\sqrt{2})^3 = \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot 4^3 (1 + 2\sqrt{2})^3 = \frac{64\pi(1 + 2\sqrt{2})^3}{3}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{64\pi(1 + 2\sqrt{2})^3}{3}$ .

**1036.** Дано:  $ABCD$  — осевое сечение данного усечённого конуса.  $BCO$  — осевое сечение вписанного конуса.  $MN$  — сечение осевого сечения данной плоскостью.  $\frac{AO}{BH} = 3$ ;  $\frac{OF}{FH} = 2$ .  $V_1$  — объём усечённого конуса с осевым сечением  $BCQP$ .  $V_2$  — объём усечённого конуса с осевым сечением  $AMND$ .

Найти  $\frac{V_1}{V_2}$ .

*Решение.* Пусть:  $S$  — площадь круга с радиусом  $FQ$ ;  $S_1$  — площадь круга с радиусом  $HC$ ;  $S_2$  — площадь круга с радиусом  $FN$ ;  $S_3$  — площадь круга с радиусом  $OD$ ; Тогда:  $V_1 = \frac{1}{3} \cdot HF(S + \sqrt{SS_1} + S_1)$ ;

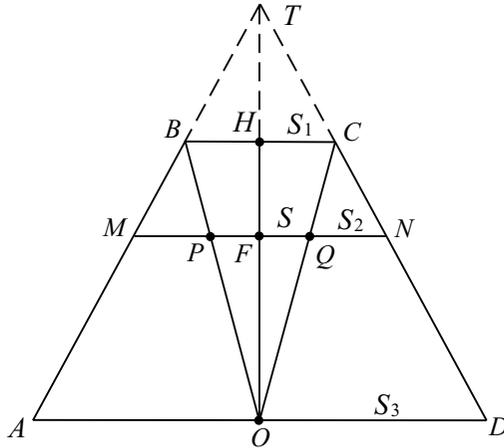


Рис. 297.

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot OF(S_2 + \sqrt{S_2 S_3} + S_3); \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{HF}{OF} \cdot \frac{S + \sqrt{SS_1} + S_1}{S_2 + \sqrt{S_2 S_3} + S_3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{S + \sqrt{SS_1} + S_1}{S_2 + \sqrt{S_2 S_3} + S_3}.$$

Выразим  $S_1, S_2, S_3$  через  $S$ . При этом будем пользоваться теоремой: “Площади параллельных сечений конуса относятся как квадраты их расстояний до вершины”.

$$\frac{S_1}{S} = \frac{3^2}{2^2} \Rightarrow S_1 = \frac{3^2}{2^2} \cdot S.$$

Обозначим  $HF = k$ . Тогда  $OF = 2k, OH = 3k$ . Из подобия треугольников  $AOT$  и  $BHT$  получаем:  $\frac{OT}{HT} = \frac{OA}{HB} = 3 \Rightarrow$

$$HT = \frac{1}{3} \cdot OT = \frac{1}{3}(3k + HT). \quad 3 \cdot HT = 3k + HT, \quad 2 \cdot HT = 3k, \quad HT = \frac{3}{2}k.$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\left(\frac{3}{2}k + k\right)^2}{\left(\frac{3}{2}k\right)^2} = \left(\frac{1 + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} \Rightarrow$$

$$S_2 = \frac{5^2}{3^2} \cdot S_1 = \frac{5^2}{3^2} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot S = \frac{5^2}{2^2} S.$$

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{\left(\frac{3}{2}k + 3k\right)^2}{\left(\frac{3}{2}k\right)^2} = \frac{9^2}{3^2} = 3^2 \Rightarrow S_3 = 9S_1 = 9 \cdot \frac{9}{4}S = \frac{81}{4}S.$$

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{S + \sqrt{S \cdot \frac{9}{4}S + \frac{9}{4}S}}{\frac{25}{4}S + \sqrt{\frac{25}{4}S \cdot \frac{81}{4}S + \frac{81}{4}S}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4}}{\frac{25}{4} + \frac{45}{4} + \frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{151} = \frac{19}{302}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{19}{302}$ .

1037. Пусть  $r$  — радиус верхнего основания конуса, тогда  $3r$  — радиус нижнего основания конуса (см. рис. 298).

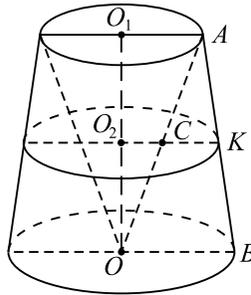


Рис. 298.

$\triangle O_1OA \sim \triangle O_2OC$  по первому признаку подобия.  $\frac{O_1A}{O_2C} = \frac{OO_1}{OO_2} = \frac{3}{2}$ ,

$$O_2C = \frac{O_1A \cdot 2}{3} = \frac{2r}{3}. V_1 = \frac{1}{3}\pi O_2C^2 \cdot 2 \cdot OO_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4r^2}{9} \cdot 2 \cdot O_1O_2.$$

$\triangle OAB \sim \triangle CAK$  по первому признаку подобия.

$$\frac{OB}{CK} = \frac{3}{1}, CK = \frac{OB}{3} = r. O_2K = O_2C + CK = \frac{2r}{3} + r = \frac{5r}{3}.$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot O_2O_1 \left( \left( \frac{5r}{3} \right)^2 + \frac{5r}{3} \cdot r + r^2 \right) = \frac{1}{3}\pi \cdot O_2O_1 \cdot \frac{49a^2}{9}.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot 2O_1O_2 \cdot \frac{4r^2}{9}}{\frac{1}{3}\pi \cdot O_2O_1 \cdot \frac{49a^2}{9}} = \frac{8}{49}.$$

Ответ:  $\frac{8}{49}$ .

1038. Рассмотрим осевое сечение конусов (см. рис. 299).

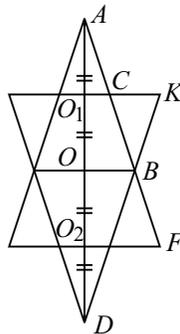


Рис. 299.

Обозначим через  $r$  радиус основания конусов:  $O_2F = O_1K = r$ .

$\triangle O_2AF \sim \triangle O_1AC$  с коэффициентом подобия  $k = \frac{1}{3}$ , тогда  $O_1C = \frac{1}{3}r$ .

$\triangle O_2AF \sim \triangle OAB$  с коэффициентом подобия  $k = \frac{2}{3}$ , тогда  $OB = \frac{2}{3}r$ .

По условию  $AO_1 = O_1O = OO_2 = O_2D = h$ .  $V_1$  — объём общей части.

$$\frac{1}{2}V_1 = \frac{1}{3}\pi h \left( \left( \frac{1}{3}r \right)^2 + \frac{1}{3}r \cdot \frac{2}{3}r + \left( \frac{2}{3}r \right)^2 \right) = \frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{7r^2}{9}.$$

$V_2$  — сумма объёмов тех частей, которые не являются общими.

$$\frac{1}{2}V_2 = \frac{1}{3}\pi h \left( \left( \frac{2}{3}r \right)^2 + \frac{2}{3}r \cdot r + r^2 - \frac{7r^2}{9} + \left( \frac{1}{3}r \right)^2 \right) = \frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{13r^2}{9}.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{2}V_1}{\frac{1}{2}V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{7r^2}{9}}{\frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{13r^2}{9}} = \frac{7}{13}.$$

Ответ:  $\frac{7}{13}$ .

1039. Рассмотрим осевое сечение конусов (см. рис. 300). Обозначим че-

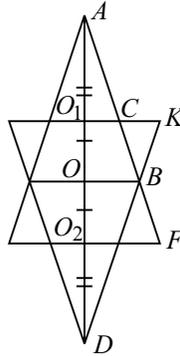


Рис. 300.

рез  $r$  радиус основания конусов:  $O_2F = O_1K = r$ , а через  $h$  — высоту усечённого конуса:  $OO_1 = OO_2 = h$ . Тогда  $AO_1 = DO_2 =$

$= 2h$ . В  $\triangle O_2AF$   $O_1C$  — средняя линия,  $O_1C = \frac{1}{2}O_2F = \frac{1}{2}r$ . В трапеции

$O_2O_1KF$   $OB$  — средняя линия,  $OB = \frac{O_1C + O_2F}{2} = \frac{\frac{r}{2} + r}{2} = \frac{3}{4}r$ .

$$\frac{1}{2}V_1 = \frac{1}{3}\pi h \left( \frac{r^2}{4} + r \cdot \frac{3r}{4} + \frac{9r^2}{16} \right) = \frac{1}{3}\pi h \frac{19r^2}{16}.$$

$$\frac{1}{2}V_2 = \frac{1}{3}\pi h \left( r^2 + r \cdot \frac{3r}{4} + \frac{9r^2}{16} - \frac{19r^2}{16} \right) + \frac{1}{3}\pi \cdot 2h \cdot \frac{r^2}{4} = \frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{26r^2}{16}.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}\pi h \frac{19r^2}{16}}{2 \cdot \frac{1}{3}\pi h \frac{26r^2}{16}} = \frac{19}{26}.$$

Ответ:  $\frac{19}{26}$ .

**1040.** Дано: сфера с центром  $O$  касается плоскости  $\alpha$  в точке  $M$ ,  $OM = 3$ ; конус с вершиной  $S \in \alpha$  касается сферы в точке  $L$ ,  $MS = 4$ , центр  $H$  основания конуса лежит на прямой  $OL$ ,  $SH \perp \alpha$ .

Найти:  $SH$ .

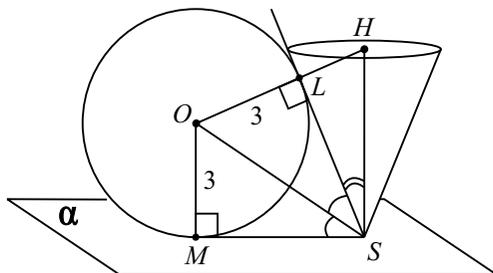


Рис. 301.

*Решение.* Сделаем чертёж (см. рис. 301).

Введём обозначения:  $\angle MSO = \angle LSO = \alpha$ ,  $HL = x$ .

$$\sin(\angle LSH) = \frac{x}{SH} \Rightarrow SH = \frac{x}{\sin(\angle LSH)}.$$

$$\sin(\angle LSH) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

$$\text{Так как } SO = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \text{ то } \cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin(\angle LSH) =$$

$$= 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25} \Rightarrow$$

$SH = \frac{25}{7}x$ . С другой стороны  $SH^2 = SL^2 + x^2$ , а  $SL = SM = 4$ , то есть

$$\frac{25^2}{7^2}x^2 = x^2 + 16, \text{ откуда } x = \frac{7}{6}, SH = \frac{25}{7} \cdot \frac{7}{6} = \frac{25}{6}.$$

Ответ:  $\frac{25}{6}$ .

**1041.** Дано: сфера с центром  $O$  касается плоскости  $\alpha$  в точке  $M$ ,  $OM = 6$ ; конус с вершиной  $S \in \alpha$  касается сферы в точке  $L$ ;  $K$  — проекция точки  $L$  на плоскость  $\alpha$ ,  $MK = \frac{144}{25}$ , центр основания конуса  $H$  лежит на прямой  $ML$ ,  $SH \perp \alpha$ . Найти:  $SH$ . *Решение.* Сделаем чертёж (см. рис. 302).

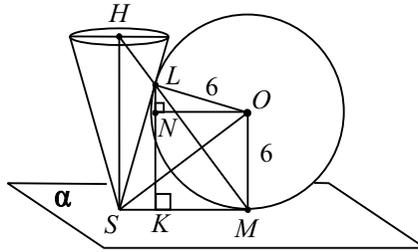


Рис. 302.

Пусть  $ON \perp LK$ , тогда  $LN = \sqrt{6^2 - \frac{144^2}{25^2}} = \frac{42}{25}$ ,  $LK = \frac{42}{25} + 6 = \frac{192}{25}$ .

$\triangle LKS \sim \triangle ONL$  ( $\angle LKS = \angle LNO = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle SLK = \frac{\pi}{2} - \angle NLO =$

$$= \angle LON) \Rightarrow \frac{SK}{LN} = \frac{LK}{OL} \Rightarrow SK = \frac{\frac{42}{25} \cdot \frac{192}{25}}{\frac{144}{25}} = \frac{56}{25} \Rightarrow$$

$$SM = \frac{56}{25} + \frac{144}{25} = 8. SH \parallel LK \Rightarrow \triangle SHM \sim \triangle KLM \Rightarrow$$

$$\frac{SH}{LK} = \frac{SM}{KM} \Rightarrow SH = \frac{LK \cdot SM}{KM} = \frac{\frac{192}{25} \cdot 8}{\frac{144}{25}} = \frac{32}{3}.$$

Ответ:  $\frac{32}{3}$ .

**1042.** Дано: шар радиусом  $OM$  вписан в пирамиду  $SABC$ ;  
 $SBA \perp ABC$ ,  $SBC \perp ABC$ ,  $\angle(SAC, ABC) = 60^\circ$ ,  
 $\angle(SBA, SBC) = 60^\circ$ ,  $AB = BC = 2$ .

Найти:  $OM$ .

*Решение.* Сделаем чертёж (см. рис. 303).

Очевидно  $\angle ABC = \angle(SBA, SBC) = 60^\circ$  и  $AC = 2$ . Пусть  $N$  — середина  $AC$ , тогда  $BN = \sqrt{3}$ ,  $\angle SNB = 60^\circ$ . Рассмотрим сечение фигур плоскостью  $SNB$  (см. рис. 304).

$$\text{Обозначим } OM = r. \text{ Так как } \angle ONM = \frac{1}{2} \angle SNB = 30^\circ, \text{ то } NM = \\ = r\sqrt{3}, BM = \sqrt{3} - r\sqrt{3}.$$

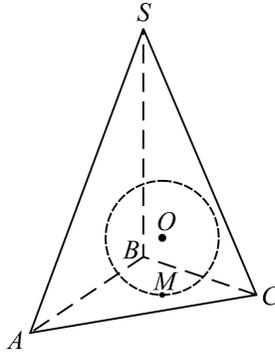


Рис. 303.

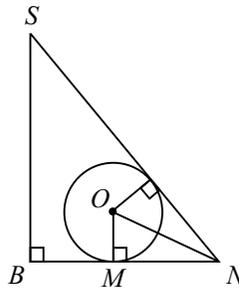


Рис. 304.

Рассмотрим сечение фигур плоскостью  $A'B'C'$ , проходящей через центр  $O$  параллельно  $ABC$  (см. рис. 305).

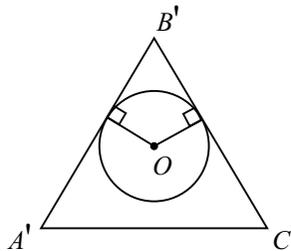


Рис. 305.

Так как  $\angle A'B'O = \frac{1}{2}\angle A'B'C' = 30^\circ$ , то  $OB' = 2r$ . С другой стороны  $OB' = BM$ .

Таким образом,  $2r = \sqrt{3} - r\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 2\sqrt{3} - 3$ .

Ответ:  $2\sqrt{3} - 3$ .

**1043.** Дано: шар с центром  $O$  вписан в конус,  $S_{\text{ш.}} = \frac{4}{9}S_{\text{кон.}}$ ; окружность, касающаяся шара и конуса, является окружностью основания цилиндра, вписанного в шар.

Найти:  $\frac{V_{\text{цил.}}}{V_{\text{кон.}}}$ .

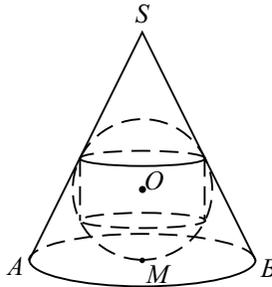


Рис. 306.

*Решение.* Сделаем чертёж (см. рис. 306).

Введём обозначения:  $R$  — радиус основания конуса,  $r$  — радиус шара,  $\ell$  — образующая конуса.  $S_{\text{кон.}} = \pi\ell(R + \ell)$ ,  $S_{\text{сф.}} = 4\pi r^2$ ,  $S_{\text{сф.}} = \frac{4}{9}S_{\text{кон.}} \Rightarrow$

$9r^2 = R(R + \ell)$ . С другой стороны,  $r = \frac{S}{p}$ , где  $S = S_{ABS}$ ,  $p = \frac{P_{ABS}}{2} = R + \ell$ . По формуле Герона  $S^2 = (R + \ell)R^2(\ell - R) = R^2(\ell^2 - R^2)$ . Таким образом,  $r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{R^2(\ell^2 - R^2)}{(\ell + R)^2} = \frac{R^2(\ell - R)}{\ell + R}$ .

Отсюда  $R(R + \ell) = 9\frac{R^2(\ell - R)}{\ell + R}$ ,  $(\ell + R)^2 = 9R(\ell - R)$ ,  $\ell^2 - 7R\ell + 10R^2 = 0$ ,

$$\ell_{1,2} = \frac{7R \pm \sqrt{49R^2 - 40R^2}}{2} = \frac{7R \pm 3R}{2}, \ell_1 = 5R, \ell_2 = 2R.$$

$$1) \ell = 2R.$$

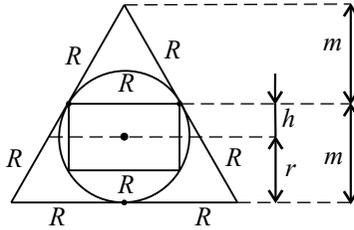


Рис. 307.

В этом случае (см. рис. 307)  $9r^2 = R(R + \ell) = 3R^2 \Rightarrow R = r\sqrt{3}$ .

$$m = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3r}{2}, n = m - r = \frac{r}{2}.$$

$$V_{\text{цил.}} = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot 2n = \frac{1}{4}\pi R^2 r, V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2m = \pi R^2 r \Rightarrow \frac{V_{\text{цил.}}}{V_{\text{кон.}}} = \frac{1}{4}.$$

$$2) \ell = 5R.$$

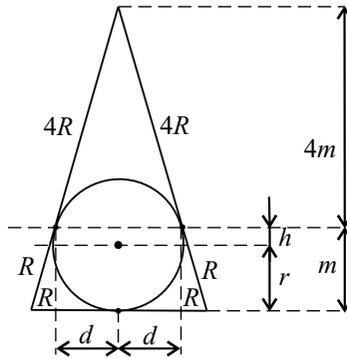


Рис. 308.

В этом случае (см. рис. 308)  $9r^2 = R(R + \ell) = 6R^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{6}}{2}r$ .

$$(5m)^2 = (5R)^2 - R^2 = 24R^2, 5m = 2\sqrt{6}R = 6r, m = \frac{6r}{5}, n = m - r = \frac{r}{5},$$

$$d^2 = r^2 - n^2 = r^2 - \frac{r^2}{25} = \frac{24r^2}{25}. V_{\text{цил.}} = \pi d^2 \cdot 2n = \pi \cdot \frac{24r^2}{25} \cdot \frac{2r}{5} = \frac{48}{125}\pi r^3,$$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 5m = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3r^2}{2} \cdot 6r = 3\pi r^3 \Rightarrow \frac{V_{\text{цил.}}}{V_{\text{кон.}}} = \frac{16}{125}.$$

Ответ:  $\frac{1}{4}; \frac{16}{125}$ .

**1044.** Для решения задачи достаточно рассмотреть осевое сечение конуса (см. рис. 309).  $AC$  — диаметр основания;  $BO$  — высота;  $AB, BC$  — образующие;  $M$  — центр вписанного шара;  $MK$  — радиус сечения ( $\rho$ );  $r$  — радиус шара;  $R$  — радиус основания конуса;  $\alpha$  — искомый угол.

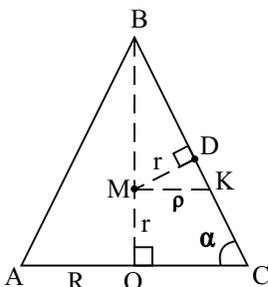


Рис. 309.

1) Из прямоугольных треугольников  $OBC$  и  $MDK$  получим:

$$BO = R \operatorname{tg} \alpha; r = MK \sin \alpha = \rho \sin \alpha. \triangle BOC \sim \triangle BMK, \text{ значит}$$

$$\frac{BO}{R} = \frac{BO - \rho \sin \alpha}{\rho} \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = \frac{R \operatorname{tg} \alpha - \rho \sin \alpha}{\rho} = \frac{R}{\rho} \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha. \text{ То-}$$

гда  $\frac{R}{\rho} = 1 + \cos \alpha$ .

2) Так как объём меньшего конуса равен половине объёма исходного, то

$$\frac{1}{3}\pi \rho^2 (R \operatorname{tg} \alpha - \rho \sin \alpha) = \frac{1}{6}\pi R^2 \cdot R \operatorname{tg} \alpha, 2 \left( \frac{R}{\rho} \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \right) = \left( \frac{R}{\rho} \right)^3 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$2 \operatorname{tg} \alpha = (1 + \cos \alpha)^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

$\alpha$  — острый угол,  $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ , значит  $(1 + \cos \alpha)^3 = 2, 1 + \cos \alpha = \sqrt[3]{2},$   
 $\cos \alpha = \sqrt[3]{2} - 1, \alpha = \arccos(\sqrt[3]{2} - 1)$

Ответ:  $\arccos(\sqrt[3]{2} - 1)$ .

**1045.**

Дано:  $KBCDK_1B_1C_1D_1$  — призма (см. рис. 310),  $KK_1 \perp \text{пл. } KBC,$   
 $KBCD$  — ромб,  $KB = 4, \angle DKB = 60^\circ, E$  — середина ребра  $KD, F$  —  
середина ребра  $KB, O = B_1E \cap D_1F, \angle B_1OD_1 = 90^\circ$ .

Найти:  $V_{EFK_1C_1}$ .

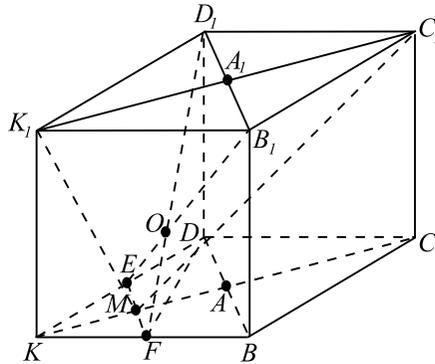


Рис. 310.

*Решение.* Так  $\triangle KBD$  — равнобедренный с углом  $60^\circ$  при вершине, то  $\triangle KBD$  — равносторонний  $\Rightarrow BD = KB = 4$ .  $\angle KBC = 180^\circ - \angle BKD = 120^\circ \Rightarrow$  по теореме косинусов

$$KC = \sqrt{KB^2 + BC^2 - 2KB \cdot BC \cdot \cos \angle KBC} =$$

$$= \sqrt{32 - 32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 4\sqrt{3}. \text{ Пусть } M \text{ — середина отрезка } EF,$$

$A = BD \cap KC$  и  $A_1 = B_1D_1 \cap K_1C_1$ .  $EF$  — средняя линия треугольника  $KBD \Rightarrow EF = \frac{1}{2}BD = 2$  и  $EF \parallel BD$ . Тогда так как  $A$  — середина  $BD$  и  $BD \perp KC$ , то  $M \in KC$  и  $EF \perp KC$ .  $EF \subset \text{пл. } KBC$  и  $KK_1 \perp \text{пл. } KBC \Rightarrow EF \perp KK_1 \Rightarrow EF \perp \text{пл. } KCC_1K_1 \Rightarrow V_{EFK_1C_1} = 2V_{FMK_1C_1}$ , так как  $EM = MF$ .  $V_{FMK_1C_1} = \frac{1}{3}MF \cdot S_{MK_1C_1}$ ,  $S_{MK_1C_1} = \frac{1}{2}K_1C_1 \cdot AA_1$ .

Найдём  $AA_1$ . Треугольники  $EOF$  и  $D_1OB_1$  — равнобедренные (в силу симметричности призмы относительно плоскости  $KCC_1K_1$  и в силу того, что  $O \in \text{пл. } KCC_1K_1$ ) и прямоугольные (см. рисунок 311),

поэтому их углы при основании равны по  $45^\circ$ . Значит,  $OF = EF \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ ,  $OD_1 = B_1D_1 \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$  и  $FD_1 = OF + OD_1 = 3\sqrt{2}$ .  $DF$  — медиана равностороннего треугольника  $KBD \Rightarrow DF = \frac{\sqrt{3}}{2}BD = 2\sqrt{3}$ .

Тогда из прямоугольного  $\triangle FDD_1 \Rightarrow DD_1 = \sqrt{FD_1^2 - DF^2} = \sqrt{6}$ . Но  $AA_1 = DD_1 = \sqrt{6}$ . Следовательно,  $S_{MK_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{2}$ , а

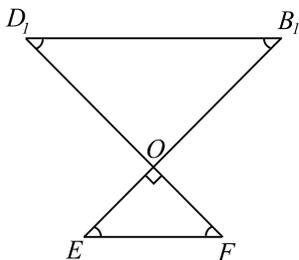


Рис. 311.

$$V_{FMK_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ и тогда } V_{EFK_1C_1} = 4\sqrt{2}.$$

Ответ:  $4\sqrt{2}$ .

1046.

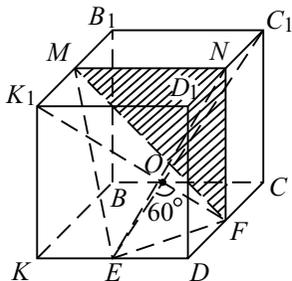


Рис. 312.

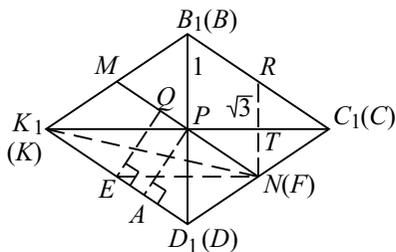


Рис. 313.

Сделаем чертёж (см. рис. 312, 313). Учитывая данные задачи, свойства рассматриваемых геометрических тел и плоских фигур, легко получить утверждения, а также значения величин, нужных для решения задачи.

1)  $BC = 2$ ;  $BP = 1$ ;  $PC = \sqrt{3}$ ;  $KC = 2\sqrt{3}$ ;  $MN = 2$ .

2) Треугольники  $EOF$  и  $K_1C_1O$  — равносторонние, причём  $EF = \frac{1}{2}KC = \sqrt{3}$ .

3) Так как коэффициент подобия треугольников  $K_1C_1O$  и  $EFO$  равен 2 ( $K_1C : EF = 2$ ), то  $K_1F = 3EF = 3\sqrt{3}$ .

4)  $TN = \frac{1}{2}PD = \frac{1}{2}$ ,  $K_1T = \frac{3}{4}KC = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,  $K_1N = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{7}$ . То-

гда из  $\triangle K_1NF$  найдём высоту призмы  $NF$ :  $NF = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ .

5) Пусть  $MNF$  — основание пирамиды  $EMNF$ .

Тогда  $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ . Высота пирамиды  $EQ$  — перпендикуляр, опущенный из точки  $E$  к плоскости  $MNF$ . Но так как  $EQ = AP = \frac{1}{2}K_1P$ , то  $EQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot V_{\text{приз.}} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ .

Ответ:  $\frac{\sqrt{15}}{3}$ .

1047. На рисунке 314 изображена первая, исходная, призма.

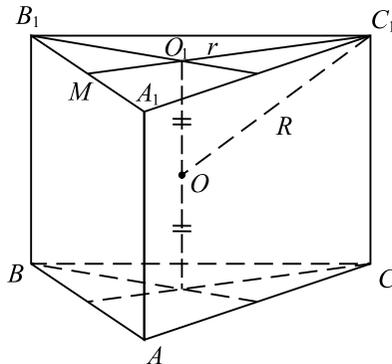


Рис. 314.

На рисунке 315 — вторая, основание  $DPK$  которой находится в плоскости  $ABB_1$ , вершины  $D_1, K_1, P_1$  лежат на сфере.  $O$  — центр сферы — середина отрезка, соединяющего центры оснований первой призмы.

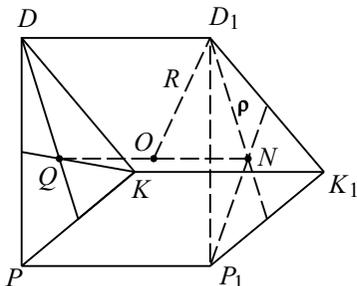


Рис. 315.

Обозначим:  $a$  — ребро первой призмы,  $b$  — ребро второй призмы,  $R$  — радиус сферы,  $r$  — радиус сечения сферы плоскостью, проходящей через вершины основания первой призмы,  $\rho$  — радиус сечения сферы, проходящего через вершины основания  $D_1K_1P_1$  второй призмы.

Тогда запишем несколько легко получаемых отношений:

$$r = \frac{a}{\sqrt{3}}; \rho = \frac{b}{\sqrt{3}}; R = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}.$$

$$ON = \sqrt{R^2 - \rho^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{12} - \frac{b^2}{3}}. NQ = NO + OQ = NO + MO_1 =$$

$$= NO + \frac{r}{2} = \sqrt{\frac{7a^2}{12} - \frac{b^2}{3}} + \frac{a}{2\sqrt{3}}. \text{ Но } NQ = b, \text{ следовательно,}$$

$$\sqrt{\frac{7a^2}{12} - \frac{b^2}{3}} + \frac{a}{2\sqrt{3}} = b. \quad (1) \text{ По условию призмы подобны. } k = \frac{a}{b} \text{ — ко-}$$

эффициент подобия. Разделим равенство (1) на  $b$ :  $\sqrt{\frac{7k^2}{12} - \frac{1}{3}} + \frac{k}{2\sqrt{3}} = 1$ ,

$$\sqrt{7k^2 - 4} + k = 2\sqrt{3}, \sqrt{7k^2 - 4} = 2\sqrt{3} - k, \text{ откуда } 3k^2 + 2\sqrt{3}k - 8 = 0, \\ k_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 6\sqrt{3}}{6}. \text{ Очевидно } k > 0, \text{ поэтому } k = \frac{2}{\sqrt{3}}. \text{ Объём второй}$$

пирамиды  $V_2$  равен  $\frac{3}{4}$ , поэтому объём первой:  $V_1 = k^3 \cdot V_2 = \frac{8 \cdot 3}{3\sqrt{3} \cdot 4} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

1048. Сделаем чертёж (см. рис. 316).

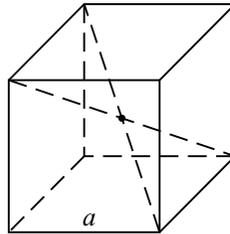


Рис. 316.

Легко показать, что около каждой правильной четырёхугольной призмы можно описать сферу. Её центр будет находиться в точке пересечения диагоналей (например, доказать с использованием свойств диагоналей или признаков равенства треугольников).

Диаметр  $D$  описанной сферы равен диагонали призмы, а радиус  $R$  — половине диагонали. Каждая грань призмы касается вписанной сферы, а значит, расстояния между противоположными гранями должны быть равны — диаметру вписанной сферы. Очевидно, что призма в этом случае является кубом. Если  $a$  — ребро куба, то  $D = a\sqrt{3}$ ,  $d = a$  — диаметры, соответственно, описанной и вписанной сферы.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;  $r = \frac{a}{2}$  — радиусы. Отношение радиусов вписанной и описанной сфер (в такой последовательности сферы названы в условии):

$$\frac{r}{R} = \frac{a \cdot 2}{2 \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

1049. Сделаем чертёж (см. рис. 317). Рассмотрим основание призмы (см. рис. 318). Используя свойства треугольников и прямоугольников, легко показать, что около любой правильной 6-угольной призмы можно описать сферу, центр  $O$  которой — середина отрезка  $PP_1$ , соединяющего центры оснований. Радиус — расстояние от  $O$  до любой вершины призмы.

Вписанная сфера касается всех граней призмы, а следовательно, расстояния между противоположными боковыми гранями должны быть равны расстоянию между основаниями, то есть высоте призмы.

Для последующих вычислений заметим, что диагонали оснований, соединяющие противоположные вершины, равны удвоенному ребру основания

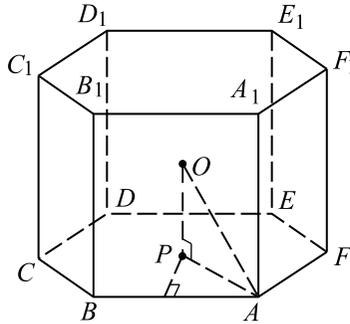


Рис. 317.

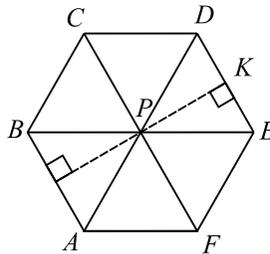


Рис. 318.

и разбивают 6-угольник на 6 равных правильных треугольников. Обозначим:  $a$  — ребро основания,  $h$  — высота призмы,  $r$  — радиус вписанной сферы,  $R$  — радиус описанной сферы.

Тогда  $PK = r = \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;  $R = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + (2a)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ .

$$\frac{r}{R} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot a\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Ответ:  $\sqrt{\frac{3}{7}}$ .

**1050.** Дано:  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  — куб,  $AD = 2$ ;  $O$  — центр вписанного в куб шара, см. рис. 319.

Найти:  $V_{\text{кон}}$ .

Решение. Легко понять, что  $O$  — середина диагонали куба  $\Rightarrow$

$$OA = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \text{ Пусть } O_1O = R, \text{ где } R -$$

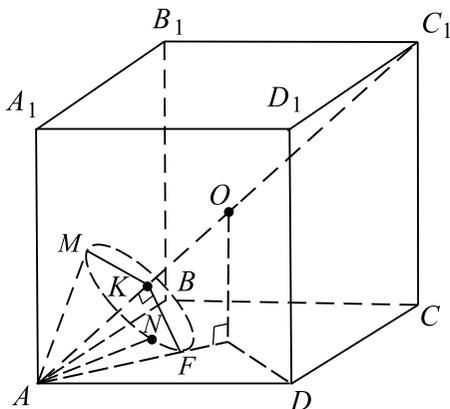


Рис. 319.

радиус шара. Тогда  $O_1O = \frac{AD}{2} = \frac{2}{2} = 1$ .  $AO_1 = AO - OO_1 = \sqrt{3} - 1$ .

$KO_1 \perp AC_1$ ,  $KO_1 = r$  — радиус основания конуса. Из соображений симметрии  $K \in AB_1$  и  $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AO_1K \Rightarrow \frac{B_1C_1}{KO_1} = \frac{AB_1}{AO_1}$ ,

$$\frac{2}{r} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{\sqrt{3} - 1}, \quad r = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}. \quad V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot AO_1 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi(\sqrt{3} - 1)^3}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1), \quad V_{\text{кон}} = \frac{\pi(\sqrt{3} - 1)^3}{6}.$$

Ответ:  $\frac{\pi(\sqrt{3} - 1)^3}{6}$ .

**1051.** На рисунке 320 изображена вершина  $A$  куба, которая одновременно является вершиной конуса. На продолжении  $AP$  находится точка  $O$  — центр куба — точка пересечения его диагоналей. Если  $a$  — ребро куба, то радиус вписанной сферы  $R = \frac{a}{2}$ . Вписанная сфера в точке  $P$  пересекает диагональ куба.  $OP = R$ , а так как  $OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , то

$$AP = AO - R = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

Основание конуса находится в плоскости, касательной к сфере, значит, плоскость  $KMN$  перпендикулярна радиусу  $OP$ , то есть  $AO \perp KMN$ . Отрезок  $AO$  образует равные углы с рёбрами, выходящими из вершины  $A$ .

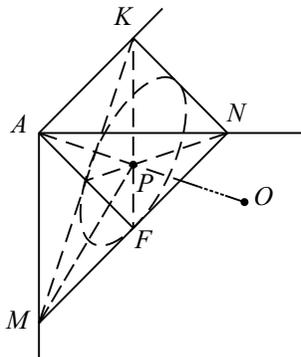


Рис. 320.

Из равенства прямоугольных треугольников  $ANP$ ,  $AKP$  и  $AMP$  следует, что равны прямоугольные треугольники  $AMN$ ,  $ANK$ ,  $AMK$ . Таким образом, основание тетраэдра  $AMNK$  — равносторонний треугольник, его боковые рёбра равны и взаимно перпендикулярны. Основанием конуса является окружность, вписанная в  $\triangle MNK$ ,  $AP$  — его высота,  $AF$  — образующая. Обозначим боковое ребро тетраэдра  $x$ , тогда  $x\sqrt{2}$  — ребро основания,  $\frac{x\sqrt{2}}{2}$  — апофема  $AF$  (образующая конуса),  $\frac{x}{\sqrt{6}}$  — радиус вписанной в основание окружности (радиус конуса),  $\frac{x}{\sqrt{3}}$  — высота пирамиды (конуса)  $AP$ .

Выше было показано, что  $AP = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$ , значит,  $\frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ , то

$$\text{есть } x = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{3}). \quad AF = \sqrt{AP^2 + PF^2} = \sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{6}} = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{\text{бок.}} = \pi \cdot PF \cdot AF = \pi \frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi a^2 (12 - 6\sqrt{3})}{2\sqrt{3} \cdot 4} = \frac{\pi (\sqrt{3})^2 \cdot 6(2 - \sqrt{3})}{2\sqrt{3} \cdot 4} = \frac{3\pi(2 - \sqrt{3})}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\pi(2 - \sqrt{3})}{4}.$$

**1052.** Сделаем чертёж (см. рис. 321).

Изобразим часть сечения  $AA_1C_1C$  куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  (см. рис. 322).

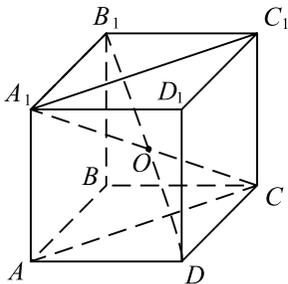


Рис. 321.

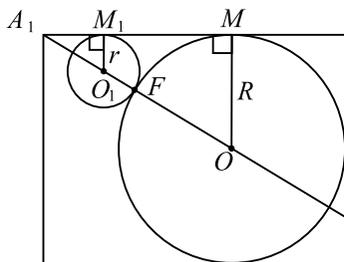


Рис. 322.

$O$  — центр куба (точка пересечения его диагоналей) и центр вписанного шара радиуса  $R$ ,  $M$  — точка касания большого шара с гранью  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $M_1$  — точка касания малого шара радиуса  $r$  с гранью  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $F$  — точка касания шаров. Пусть  $a$  — ребро куба. Так как  $A_1C = a\sqrt{3}$ , то  $A_1O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $OM = R = \frac{a}{2}$ ,  $O_1O = r + R = r + \frac{a}{2}$ . Из

подобия треугольников  $A_1M_1O_1$  и  $A_1MO$  получаем:  $\frac{M_1O_1}{MO} = \frac{A_1O_1}{A_1O}$  или

$$\frac{r \cdot 2}{a} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - r - \frac{a}{2}\right) \cdot 2}{a\sqrt{3}}, r\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - r - \frac{a}{2}, r(\sqrt{3} + 1) = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

$$\begin{aligned} \text{По условию } a &= (\sqrt{3} + 1)^2, \text{ значит, } r = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2(\sqrt{3} - 1)}{2(\sqrt{3} + 1)} = \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}{2} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, объём малого шара:  $V = \frac{4\pi \cdot 1^2}{3} = \frac{4\pi}{3}$ .

Ответ:  $\frac{4\pi}{3}$ .

**1053.** Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед.  
 $a = AD = 2$ ,  $b = DC = 1$ ,  $h = DD_1 = 2$ , см. рис. 323.

Найти  $d$  — расстояние между  $_1D$  и  $AC$ .

*Решение.* Решим задачу в общем виде. Пусть  $V$  — объём данного параллелепипеда.  $D_1 D_2$  — продолжение рёбра  $DD_1$ , причём  $DD_2 = \frac{h}{2}$ . Точки  $A_2, B_2, C_2$  — середины соответствующих рёбер. Легко понять, что

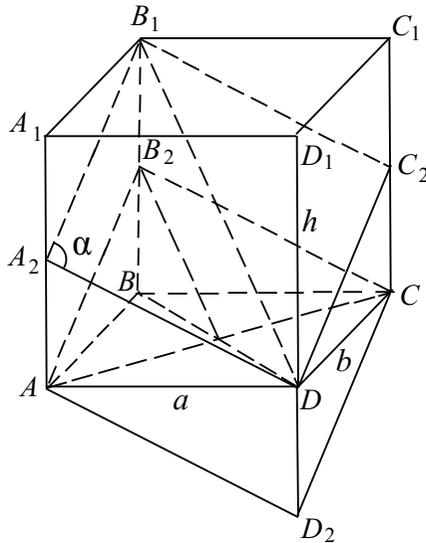


Рис. 323.

$V_{B_2 ABC} = V_{D_2 ACD}$ . Плоскость  $A_2 B_1 C_2 D$  делит данный параллелепипед на две симметричные относительно центра параллелепипеда фигуры. Учитывая, что  $V_{B_2 ABC} = V_{D_2 ACD}$ , заключаем, что  $V_1 = V_{AB_2 C D_2 A_2 B_1 C_2 D} = \frac{V}{2}$ , то есть  $V = 2V_1$ . Легко понять, что высота призмы

$A_2 B_1 C_2 D A B_2 C D_2$  равна  $d$ . Пусть  $S = S_{AB_2 C D_2}$ . Тогда  $V_1 = Sd$ ,

$$V = 2V_1 = 2Sd \Rightarrow d = \frac{V}{2S}. S = 2S_{A_2 B_1 D}.$$

Пусть  $\angle B_1A_2D = \alpha$ . Дальнейший план таков: по теореме косинусов находим  $\cos \alpha$ , затем  $\sin \alpha$  и, наконец,  $S_{A_2B_1D}$ .

$$DA_2 = \sqrt{\frac{h^2}{4} + a^2}, \quad A_2B_1 = \sqrt{\frac{h^2}{4} + b^2}, \quad DB_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2},$$

$$DB_1^2 = DA_2^2 + A_2B_1^2 - 2DA_2 \cdot A_2B_1 \cdot \cos \alpha.$$

$$a^2 + b^2 + h^2 = \frac{h^2}{4} + a^2 + \frac{h^2}{4} + b^2 - 2 \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{h^2}{4}\right) \left(b^2 + \frac{h^2}{4}\right)} \cdot \cos \alpha.$$

$$\frac{h^2}{2} = -2 \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{h^2}{4}\right) \left(b^2 + \frac{h^2}{4}\right)} \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = -\frac{h^2}{4 \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{h^2}{4}\right) \left(b^2 + \frac{h^2}{4}\right)}},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{h^4}{16 \left(a^2 + \frac{h^2}{4}\right) \left(b^2 + \frac{h^2}{4}\right)}}.$$

$$S = 2 \cdot S_{A_2B_1D} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot A_2B_1 \cdot A_2D \cdot \sin \alpha, \quad S = A_2B_1 \cdot A_2D \cdot \sin \alpha,$$

$$S = \sqrt{b^2 + \frac{h^2}{4}} \cdot \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4}} \cdot \sqrt{1 - \frac{h^4}{16 \left(a^2 + \frac{h^2}{4}\right) \left(b^2 + \frac{h^2}{4}\right)}},$$

$$S = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{16 \left(a^2 + \frac{h^2}{4}\right) \left(b^2 + \frac{h^2}{4}\right) - h^4},$$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{\left(a^2b^2 + (a^2 + b^2)\frac{h^2}{4}\right) \cdot 16},$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2b^2 + h^2(a^2 + b^2)}.$$

$$d = \frac{V}{2S} = \frac{abh}{\sqrt{4a^2b^2 + h^2(a^2 + b^2)}}.$$

Подставим теперь вместо  $a, b, h$  их значения.

$$d = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{\sqrt{4 \cdot 4 \cdot 1 + 4(4+1)}} = \frac{4}{\sqrt{16+20}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Ответ:  $\frac{2}{3}$ .

**1054.** Дано:  $SABCD$  — четырёхугольная пирамида с вершиной  $S$  (см. рис. 324),  $SA = SB = SC = SD$ ,  $ABCD$  — прямоугольник,  $AB = 4$ ,  $BC = 2$ ,  $M$  — середина  $AS$ ,  $P \in SD$ ,  $BM \parallel \text{пл. } PAC$ ,  $V_{PACD} = \frac{16}{9}$ .

Найти: расстояние от точки  $S$  до плоскости  $PAC$ .

*Решение.* Так как  $SA = SB = SC = SD$ , то вершина  $S$  проектируется на основание в точку  $O$ , равноудалённую от вершин основания, то есть точка  $O$  — центр описанной окружности прямоугольника  $ABCD$ . Значит,  $O = AC \cap BD$ . Пусть  $N$  — середина ребра  $SC$ , тогда  $MN$  — средняя линия в  $\triangle ASC \Rightarrow MN \parallel AC$ . Так как  $MN \parallel AC$  и  $BM \parallel \text{пл. } PAC$ , то  $\text{пл. } BMN \parallel \text{пл. } PAC$ . Введём точку  $K = MN \cap SO$ . Так как  $MN$  — средняя линия в  $\triangle ASC$ , то  $OK = KS$ . Так как прямая  $KB = \text{пл. } BMN \cap \text{пл. } BSD$ , прямая  $PO = \text{пл. } PAC \cap \text{пл. } BSD$  и  $\text{пл. } BMN \parallel \text{пл. } PAC$ , то  $BK \parallel PO$ .

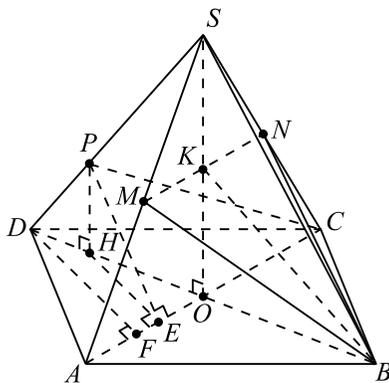


Рис. 324.

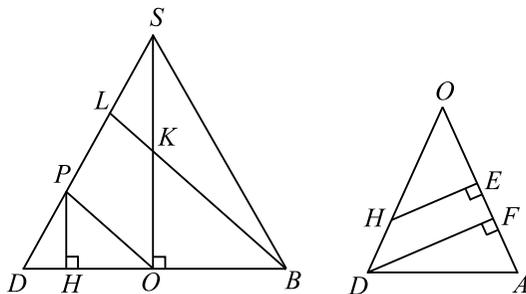


Рис. 325.

Рассмотрим  $\triangle BSD$  (см. рисунок 325). Пусть  $L = BK \cap SD$ . Так как  $BL \parallel OP$  и  $OD = OB$ , то  $OP$  — средняя линия в  $\triangle BLD \Rightarrow DP = PL$ . Так как  $KL \parallel OP$  и  $OK = SK$ , то  $LK$  — средняя линия в  $\triangle SPO \Rightarrow SL = PL$ . Таким образом, получили, что  $DP = PL = LS$  или, что то же самое,  $DP = \frac{1}{3}DS$ . Опустим из точки  $P$  перпендикуляр  $PH$  на прямую  $DB$ , то-

гда  $PH \parallel SO$  и треугольники  $PHD$  и  $SOD$  подобны  
 $\Rightarrow \frac{DP}{DS} = \frac{PH}{SO} = \frac{DH}{DO} \Rightarrow PH = \frac{1}{3}SO$  и  $DH = \frac{1}{3}DO$ . Так как  $PH \parallel SO$ , то  $PH \perp$ пл.  $ABC$ , а следовательно,  $PH$  — высота пирамиды  $PACD$ . Поэтому  $V_{PACD} = \frac{1}{3}PH \cdot S_{ACD} = \frac{16}{9}, \frac{1}{3}PH \cdot \frac{1}{2}AD \cdot DC = \frac{16}{9}$ ,

$$\frac{1}{3}PH \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{16}{9} \Rightarrow PH = \frac{4}{3} \Rightarrow SO = 3PH = 4.$$

Опустим из  $H$  перпендикуляр  $HE$  на  $AC$ . Так как  $SO \perp HE$  и  $AC \perp HE$ , то  $HE \perp$ пл.  $SAC$ . А так как  $PH \parallel$ пл.  $SAC$ , то длина  $HE$  равна высоте пирамиды  $SPAC$ , опущенной из  $P$  на плоскость  $SAC$ . Следовательно,  $V_{SPAC} = \frac{1}{3}HE \cdot S_{SAC}$ .

Пусть  $h$  — искомое расстояние от  $S$  до плоскости  $PAC$ . Тогда

$$V_{SPAC} = \frac{1}{3}h \cdot S_{PAC}. \text{ Таким образом, } \frac{1}{3}HE \cdot S_{SAC} = \frac{1}{3}h \cdot S_{PAC} \Rightarrow$$

$$h = \frac{HE \cdot S_{SAC}}{S_{PAC}}. \text{ Так как } HE \perp AC \text{ и } PH \perp AC, \text{ то } AC \perp \text{пл. } PHE \Rightarrow AC \perp PE. \text{ Значит, } PE \text{ — высота треугольника } PAC. \text{ Тогда}$$

$$S_{PAC} = \frac{1}{2}PE \cdot AC, \text{ а } S_{SAC} = \frac{1}{2}SO \cdot AC. \text{ Поэтому}$$

$$h = \frac{HE \cdot \frac{1}{2}SO \cdot AC}{\frac{1}{2}PE \cdot AC} = \frac{HE \cdot SO}{PE}.$$

Найдём  $HE$ . Для этого рассмотрим  $\triangle OAD$  (см. рис. 325), в котором  $OA = OD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}$ . Проведём в  $\triangle OAD$  высоту  $DF$ , тогда треугольники  $OHE$  и  $ODF$  подобны. Следовательно,  $\frac{HE}{DF} = \frac{OH}{OD} = \frac{2}{3} \Rightarrow HE = \frac{2}{3}DF$ .  $S_{ODA} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = 2$ .

$$S_{ODA} = \frac{1}{2}OA \cdot DF \Rightarrow DF = \frac{2 \cdot S_{ODA}}{OA} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

$$HE = \frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{15}. PE = \sqrt{PH^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{320}{225}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Тогда } h = \frac{\frac{8\sqrt{5}}{15} \cdot 4}{\frac{4\sqrt{5}}{5}} = \frac{8}{3}.$$

Ответ:  $\frac{8}{3}$ .

1055. Сделаем чертёж (см. рис. 326).

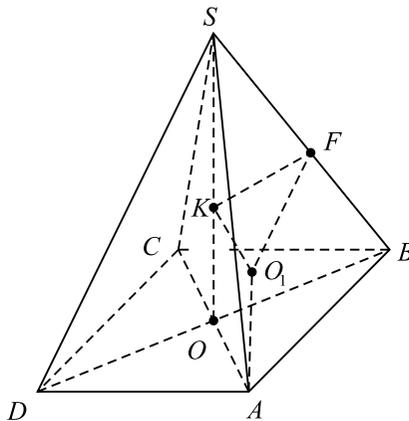


Рис. 326.

$SABCD$  — правильная пирамида,  $SO$  — высота пирамиды. Пусть  $O_1$  — центр шара, касающегося плоскости основания  $ABCD$  в точке  $A$  и прямой  $BS$ . Тогда  $O_1A \perp (ABC)$  как радиус, проведённый в точку касания сферы и плоскости,  $SO \perp (ABC)$ , значит,  $O_1A \parallel SO$ .  $AO \perp BD$ ,  $AO \perp SO$ , поэтому  $AO \perp (BSD)$ . Проведём  $O_1K \parallel AO$ , тогда  $O_1K \perp (BSD)$ ,  $O_1F$  — наклонная к плоскости  $BSD$ ,  $KF$  — проекция наклонной  $O_1F$  на плоскость  $BSD$ .  $O_1F \perp SB$ , так как шар касается  $BS$ , значит,  $KF \perp SB$  по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах.



2) Найти угол между пл.  $TML$  и пл.  $TMK$ . Т. к.  $EF \perp MP$  (диагонали квадрата), то  $KT \perp MT$  (по теореме о 3-х перпендикулярах), аналогично  $LT \perp MT$ . Значит, искомый угол  $LTK$ :  $\angle LTK = 2\angle LTO$  (т. к.  $\triangle KTL$  — равнобедренный),  $KL = \frac{3}{4}EF$ . Из  $\triangle EOT$  имеем:  $ET = \sqrt{EO^2 - OT^2}$ ,  $ET = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$ ,  $EF = 4\sqrt{3}$ ,  $KL = \frac{3}{4} \cdot 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ .  $OL = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,  $OT = \frac{1}{4}AT$ ;  $OT = 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ . Из  $\triangle LTO$  имеем:  $\operatorname{tg} \angle LTO = \frac{LO}{OT} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 3}$ ,  $\angle LTO = 60^\circ$ ,  $\angle LTK = 120^\circ$ ,  $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

1057. Сделаем чертёж (см. рис. 328).

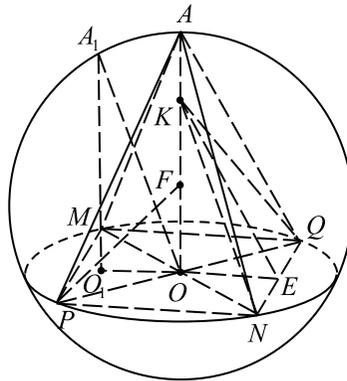


Рис. 328.

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H$ . Объём пирамиды наибольший, если площадь основания и высота принимают наибольшие значения.

1) Пусть  $R$  — радиус сферы, описанной около пирамиды. Так как четырёхугольник  $MPNQ$  вписан в окружность сечения радиуса  $r$ , то его диагонали  $MN$  и  $PQ$  — хорды этой окружности, и поэтому  $MN \leq 2r$  и

$PQ \leq 2r$ . Отсюда для площади  $S$  четырёхугольника  $MPNQ$  имеем неравенство

$S = \frac{1}{2}MN \cdot PQ \cdot \sin \alpha \leq \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r \cdot \sin \angle NOQ$ . При этом  $S = 2r^2$  только если  $\sin \angle NOQ = 1$ ,  $\angle NOQ = 90^\circ$ ,  $MN \perp PQ$ , то есть из всех четырёхугольников, вписанных в данное сечение сферы, наибольшую площадь имеет квадрат  $MPNQ$ .

2) Пусть  $H$  — высота пирамиды  $AMPNQ$ , равная расстоянию от точки  $A$  до плоскости  $MPQ$ . Допустим точка  $A$  находится в положении  $A_1$ , то есть  $A_1O_1 \perp (MPO)$ , тогда  $A_1O_1 = A_1O \cdot \sin \angle AA_1OO_1$ . Значение  $A_1O_1$  — наибольшее, если  $\sin \angle AA_1OO_1 = 1$ , то есть  $\angle AA_1OO_1 = 90^\circ$ . Тогда  $H = AO$ . Таким образом, пирамида  $AMPNQ$  при указанных условиях имеет наибольший объём, если её основание  $MPNQ$  — квадрат, вписанный в окружность сечения радиуса  $r$ , а вершина  $A$  проектируется в центр квадрата, то есть  $AO \perp MPQ$ . Отсюда следует, что пирамида  $AMPNQ$  — правильная.

3)  $F$  — центр сферы, описанной около правильной пирамиды  $AMPNQ$ .  $FA = FP = R = 5$ .  $O$  — центр окружности сечения,  $OP = OM = OQ = ON = r$ .  $\triangle AOP$ :  $OP^2 = \sqrt{PF^2 - OF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ , тогда диагональ квадрата  $MPNQ$   $PQ = 8$ , а сторона квадрата равна  $4\sqrt{2}$ ,  $PN = 4\sqrt{2}$ .

4) Найдём линейный угол между плоскостями  $KQN$  и  $MPQ$ . В  $\triangle NKQ$  проведём высоту  $KE$ , тогда  $OE \perp NQ$  по теореме обратной теореме о трёх перпендикулярах, значит  $\angle KEO$  — искомый.

5)  $\triangle KOE$ :  $\operatorname{tg} \angle KEO = \frac{OK}{OE}$ ,  $OK = \frac{5}{8}AO = \frac{5}{8}(AF + OF) = \frac{5}{8}(5 + 3) = 5$ ,  $OE = \frac{1}{2}PN = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ .  $\operatorname{tg} \angle KEO = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ . Обозначим  $\angle KEO = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1$ ,  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{25}{8} + 1 = \frac{33}{8}$ ,  $\cos^2 \alpha = \frac{8}{33}$ ,  $\sin^2 \alpha = \frac{25}{33}$ , угол  $\alpha$  — острый, значит  $\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{33}}$ .

Ответ:  $\frac{5}{\sqrt{33}}$ .

**1058.** Рассмотрим рисунок 329.  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h$ . Поскольку  $S_{\text{осн.}} = S_{ABCD}$ , то пирамида будет иметь наибольший объём, при наибольшем возможном значении  $h$ . Это условие выполняется при  $h = R_{\text{сф.}}$ . Цен-

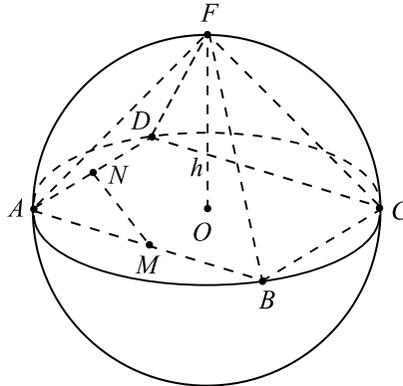


Рис. 329.

тральное сечение сферы — окружность  $R = R_{\text{сф.}}$ . В неё по условию вписан прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Тогда диагональ прямоугольника есть диаметр сферы. Например,  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ;  $BD = 10$ .

Значит,  $h_{\text{пир.}} = R_{\text{сф.}} = 5$  см. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед с основанием  $ANOM$  и высотой  $OF$ . Тогда  $AF$  — его диагональ,  $NM$  — диагональ основания.

$a = AM = AB : 2 = 3$  (см);  $b = AN = AD : 2 = 4$  (см);

$h = FO = 5$  (см) — его измерения. Учитывая, что  $NM$  — средняя линия  $\triangle ABD$ ,  $NM = BD : 2 = 5$  (см). Тогда по формуле расстояния между диагональю прямоугольного параллелепипеда и скрещивающейся с ней диагональю основания найдём расстояние  $d$  между  $AF$  и

$$NM: d = \frac{abh}{\sqrt{4a^2b^2 + h^2(a^2 + b^2)}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 16 + 25(16 + 9)}} =$$

$$= \frac{60}{\sqrt{576 + 625}} = \frac{60}{\sqrt{1201}}.$$

Ответ:  $\frac{60}{\sqrt{1201}}$ .

**1059.** Сделаем чертёж (см. рис. 330).  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$ .  $V_{\text{пир.}}$  наибольший, если  $S_{\text{осн.}}$  и  $h$  принимают наибольшие значения. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, так как один из его углов опирается на диаметр окружности.

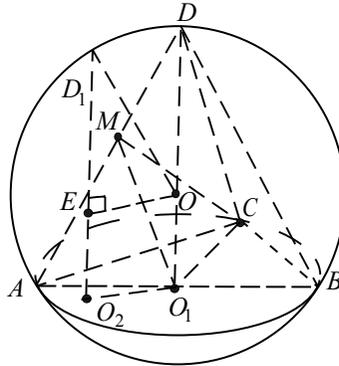


Рис. 330.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2}2r \cdot 2r \cos \angle B \sin \angle B = r^2 \sin 2\angle B$ , где  $r$  — радиус сечения. Площадь наибольшая при  $\sin 2\angle B = 1$ ,  $2\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ , то есть при условии, что  $\triangle ABC$  — равнобедренный. Рассмотрим возможные размеры высоты пирамиды.

Пусть точка  $D$  находится в положении  $D_1$ , а сечение сферы плоскостью расположено ниже центра сферы,  $D_1O_2 \perp ABC$ ; проведём отрезок  $OE \perp D_1O_2$ , тогда  $OEO_2O_1$  — прямоугольник и  $O_2E = OO_1$ ;  $D_1O_2 = OO_1 + D_1E$ ;  $D_1O_2 = OO_1 + D_1O \cdot \sin \angle EOD_1 = OO_1 + R \cdot \sin \angle EOD_1$ , где  $R$  — радиус сферы.  $D_1O_2$  принимает наибольшее значение, если  $\sin \angle EOD_1 = 1$ .  $\angle EOD_1 = 90^\circ$ , то есть при условии, что точка  $D$  лежит на диаметре сферы, проходящем через точку  $O_1$  так, что центр сферы (точка  $O$ ) — между  $D$  и  $O_1$ .  $DO_1 = 20 + 10 = 30$ . Чтобы найти угол между  $CM$  и плоскостью  $ADB$ , необходимо найти проекцию  $CM$  на плоскость  $ADB$ .  $DO_1 \perp ABC$ , значит,  $DO_1 \perp CO_1$ ,  $CO_1 \perp AB$ , то  $CO_1 \perp (ABD)$ , значит  $MO_1$  — проекция  $MC$  на плоскость  $ADB$ , тогда  $\angle CMO_1$  — угол между прямой  $CM$  и плоскостью  $ADB$ . Из  $\triangle OO_1B$ :  $r = O_1B = \sqrt{OB^2 - OO_1^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$ .  $O_1C = 10\sqrt{3}$ . В  $\triangle ADB$   $MO_1$  — средняя линия.  $MO_1 = \frac{1}{2}BD$ .

Из  $\triangle DO_1B$ :  $BD = \sqrt{DO_1^2 + O_1B^2} = \sqrt{30^2 + (10\sqrt{3})^2} = 20\sqrt{3}$ .

$MO_1 = \frac{1}{2} \cdot 20\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ . Таким образом,  $\triangle MO_1C$  — прямоугольный, равнобедренный.  $\operatorname{tg} \angle CMO_1 = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ .

Ответ: 1.

**1060.** Сделаем чертёж (см. рис. 331).

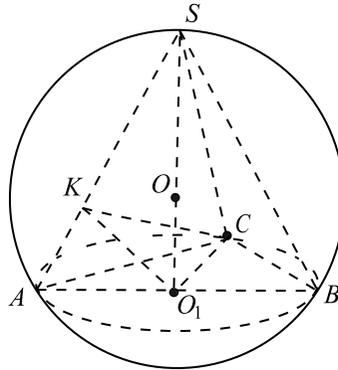


Рис. 331.

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$ . Поэтому  $V_{\text{пир.}}$  наибольший, если  $S_{\text{осн.}}$  и  $h$  принимают максимально возможные значения. Обоснования положений точек  $S$  и  $C$  аналогичны варианту №23. Построим линейный угол двугранного угла  $CASB$ . 1)  $SO \perp (ABC)$ , значит,  $SO_1 \perp O_1C$ ;  $O_1C \perp AB$ , так как  $O_1C$  — медиана к основанию равнобедренного треугольника  $ABC$ . Тогда  $O_1C \perp (ABS)$ . Проведём  $O_1K \perp AS$ , тогда  $CK \perp AS$  по теореме о трёх перпендикулярах и  $\angle O_1KC$  — искомый.  $O_1A = O_1B = O_1C = R_{\text{сечения}} = 48 : 2 = 24$ . Найдём  $R_{\text{сферы}}$  из  $\triangle OO_1B$ .  $R_{\text{сф.}} = OB = \sqrt{OO_1^2 + O_1B^2} = \sqrt{49 + 576} = 25$ ;  $SO_1 = 7 + 25 = 32$ . В  $\triangle ASO_1$  боковое ребро пирамиды  $AS = \sqrt{32^2 + 24^2} = 8\sqrt{4^2 + 3^2} = 40$ . Тогда  $O_1K = \frac{AO_1 \cdot O_1S}{AS} = \frac{24 \cdot 32}{40} = \frac{96}{5}$ . Из  $\triangle KO_1C$ :  $\operatorname{tg} \angle O_1KC = \frac{O_1C}{O_1K} = \frac{24 \cdot 5}{24 \cdot 4} = \frac{5}{4} = 1,25$ .

Ответ: 1,25.

**1061.** Будем обозначать радиус оснований цилиндра и конусов через  $R$ , их высоту через  $H$  и радиус шара через  $r$ . Пусть точки  $M$  и  $N$  — центры

нижнего и верхнего оснований цилиндра соответственно, а точки  $A$  и  $B$  — вершины конусов, точка  $C$  — центр основания конуса с вершиной  $A$ , точка  $F$  — точка касания окружностей оснований конусов, точка  $P$  — центр шара, точка  $O$  — точка касания шара и плоскости нижнего основания цилиндра, а точка  $E$  — точка касания шара и боковой поверхности конуса с вершиной  $A$ . Разберём подробно касание шара и конуса с вершиной  $A$ . Для этого рассмотрим сечение плоскостью  $PAC$  (см. рис. 332).

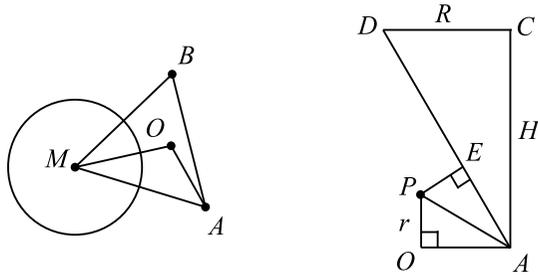


Рис. 332.

Пусть  $D$  — точка пересечения этой плоскости с окружностью основания конуса с вершиной  $A$ . Из  $\triangle ADC \Rightarrow \operatorname{tg} \angle DAC = \frac{R}{H} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Следовательно,  $\angle DAC = 30^\circ$ , а потому  $\angle DAO = 90^\circ - \angle DAC = 60^\circ$ . Так как точка  $P$  равноудалена от прямых  $AE$  и  $AO$ , то  $AP$  — биссектриса угла  $\angle DAO$ , и значит,  $\angle PAO = 30^\circ$ . Тогда из  $\triangle AOP \Rightarrow \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{OA} \Rightarrow$

$OA = r\sqrt{3}$ . Аналогично показывается, что  $OB = r\sqrt{3}$ . Так как  $OA = OB$ , то точка  $O$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $AB$  в плоскости  $MAB$ . Учитывая, что треугольник  $MAB$  равносторонний (все его стороны равны  $2R$ ), получаем, что луч  $MO$  — биссектриса угла  $\angle AMB$ . Так как шар касается поверхности цилиндра, то  $OM = R + r$ . По теореме косинусов из  $\triangle AMO \Rightarrow$

$$\begin{aligned} OA^2 &= OM^2 + AM^2 - 2 \cdot OM \cdot AM \cos 30^\circ = \\ &= (R+r)^2 + 4R^2 - 4R(R+r) \frac{\sqrt{3}}{2} = R^2 + r^2 + 2Rr + 4R^2 - 2R^2\sqrt{3} - 2Rr\sqrt{3} = \\ &= R^2(5 - 2\sqrt{3}) - 2R(\sqrt{3} - 1)r + r^2. \end{aligned}$$

С другой стороны,  $OA^2 = 3r^2$ . Таким образом, получаем уравнение для нахождения  $r$ :

$$R^2(5 - 2\sqrt{3}) - 2R(\sqrt{3} - 1)r + r^2 = 3r^2, \quad 2r^2 + 2R(\sqrt{3} - 1)r - R^2(5 - 2\sqrt{3}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 r_{1,2} &= \frac{-R(\sqrt{3}-1) \pm \sqrt{R^2(\sqrt{3}-1)^2 + 2R^2(5-2\sqrt{3})}}{2} = \\
 &= \frac{-R(\sqrt{3}-1) \pm R\sqrt{14-6\sqrt{3}}}{2}. \text{ Так как радиус — положительная вели-} \\
 \text{чина, то } r &= \frac{-R(\sqrt{3}-1) + R\sqrt{14-6\sqrt{3}}}{2} = \\
 &= \frac{R(\sqrt{14-6\sqrt{3}} - \sqrt{3} + 1)}{2} = \\
 &= \frac{(\sqrt{14-6\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1)(\sqrt{14-6\sqrt{3}} - (\sqrt{3} - 1))}{2} = \\
 &= \frac{14 - 6\sqrt{3} - (4 - 2\sqrt{3})}{2} = \frac{10 - 4\sqrt{3}}{2} = 5 - 2\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $5 - 2\sqrt{3}$ .

**1062.** 1. Пусть  $O$  — центр сферы радиуса  $R$ , описанной около пирамиды  $FABC$ . По условию  $4\pi R^2 = 48$ , отсюда  $R = 2\sqrt{3}$ . Так как  $OA = OB = OC$  и  $O$  лежит в плоскости  $ABC$ , то  $O$  — центр правильного треугольника  $ABC$  (см. рис. 333).

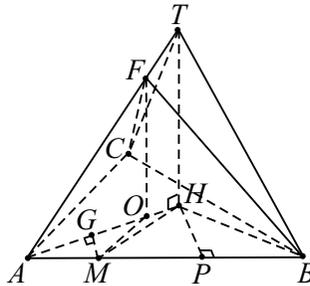


Рис. 333.

2.  $FABC$  — правильная пирамида, поэтому  $FO$  — высота пирамиды. Опустим из точки  $T$  перпендикуляр  $TH$  на прямую  $AO$ , см. рис. 333. Так как  $TH \parallel FO$ , то  $TH \perp ABC$ , и, значит,  $TH$  — высота пирамиды  $TAMC$ . По условию  $TM = TB$ , то есть отрезки  $HM$  и  $HB$  — проекции равных наклонных и, следовательно,  $HM = HB$ .

Пусть точка  $P$  — проекция  $H$  на прямую  $AB$ , тогда  $PM = PB$ .

3. Объём  $V$  пирамиды  $TAMC$  найдём по формуле:  $V = \frac{1}{3} \cdot TH \cdot S_{AMC}$ .

$S_{AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot CK$ , где  $CK$  — высота  $\triangle ABC$ . Так как  $\triangle ABC$  правиль-

ный и  $R = 2\sqrt{3}$  — радиус его описанной окружности, то  $CK = \frac{3}{2}R =$

$= 3\sqrt{3}$ ,  $AB = \sqrt{3}R = 6$ . Пусть точка  $G$  — проекция точки  $M$  на пря-

мую  $AO$ . По условию  $AM = MO$ , значит,  $AG = GO$ ,  $AG = \frac{1}{2}AO = \sqrt{3}$ .

Из  $\triangle AMG$ :  $\angle MAG = 30^\circ$ ,  $AM = \frac{AG}{\cos \angle MAG} = \sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$ . Име-

ем:  $MB = AB - AM = 4$ ,  $MP = \frac{1}{2}MB = 2$ ,  $AP = AM + MP = 4$ ,

$AH = \frac{AP}{\cos 30^\circ} = \frac{8}{\sqrt{3}}$ . Так как  $AO = FO$ , то прямоугольный треуголь-

ник  $AFO$  — равнобедренный и  $\angle FAO = 45^\circ$ , поэтому  $TH = AH = \frac{8}{\sqrt{3}}$ .

Итак,  $V = \frac{1}{3} TH \cdot \frac{1}{2} AM \cdot CK = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} = 8$ .

Ответ: 8.

**1063.** 1. Пусть  $R$  — радиус сферы, описанной около пирамиды  $FABC$ , а точка  $O$  — её центр. Так как  $OA = OB = OC$  и  $O$  лежит в плоскости  $ABC$ , то  $O$  — центр правильного треугольника  $ABC$ .

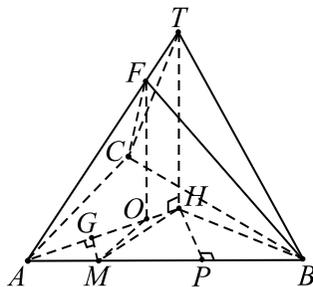


Рис. 334.

2. Пирамида  $FABC$  правильная, поэтому  $FO$  — её высота. Опустим из точки  $T$  перпендикуляр  $TH$  на прямую  $AO$ , см. рис. 333,  $TH \parallel FO$ ,  $TH$  — высота пирамиды  $TAMC$ . Пусть  $P$  — проекция точки  $H$  на прямую  $AB$ . Так как по условию  $TM = TB$ , то  $HM = HB$ ,  $PM = PB$ .

3. Выразим объём  $V$  пирамиды  $TAMC$  через  $R$ .  $V = \frac{1}{3} \cdot TH \cdot S_{AMC}$ ,  $S_{AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot CK$ , где  $CK$  — высота  $\triangle ABC$ . Так как  $\triangle ABC$  правильный, и  $R$  — радиус его описанной окружности, то  $CK = \frac{3}{2}R$ ,  $AB = \sqrt{3}R$ . Пусть  $G$  — проекция точки  $M$  на прямую  $AO$ . По условию  $AM = MO$ , следовательно,  $AG = GO$ ,  $AG = \frac{1}{2}AO = \frac{R}{2}$ . Из  $\triangle AMG$ :  $\angle MAG = 30^\circ$ ,  $AM = \frac{AG}{\cos \angle MAG} = \frac{R}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{\sqrt{3}}$ . Следовательно,  $\frac{AM}{AB} = \frac{R}{\sqrt{3}} : \sqrt{3}R = \frac{1}{3}$   $BM = \frac{2}{3}AB$ ,  $MP = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{3}AB$ ,  $AP = \frac{2}{3}AB = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$ ,  $AH = AP : \cos 30^\circ = \frac{4}{3}R$ . Так как  $AO = FO$ , то прямоугольный треугольник  $AFO$  — равнобедренный и  $\angle FAO = 45^\circ$ , поэтому  $TH = AH = \frac{4}{3}R$ . Итак,  $V = \frac{1}{3}TH \cdot \frac{1}{2}AM \cdot CK = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}R \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2}R = \frac{R^3}{3\sqrt{3}}$ . По условию,  $V = 24\sqrt{3}$ , следовательно,  $R^3 = 24\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 216$ ,  $R = 6$ .

Ответ: 6.

**1064.** 1) Так как параллелограмм  $ABCD$  можно вписать в окружность, то он является прямоугольником. Пусть  $O$  — центр сферы, описанной вокруг  $SABCD$ , а  $R$  — радиус этой сферы, то есть  $SO = CO = R$ , (см. рис. 335). Поскольку точка  $O$  равноудалена от точек  $A, B, C, D$ , то проекция точки  $O$  на плоскость  $ABC$  является центром описанной вокруг  $ABCD$  окружности, то есть совпадает с точкой  $K$ . Таким образом,  $OK$  — перпендикуляр к плоскости  $ABC$ , а  $SK$  — высота пирамиды  $SABCD$ . Так как  $CK \perp SK$  и  $DK \perp SK$ , то  $\angle CKD$  является линейным углом двугранного угла между плоскостями  $ASC$  и  $BSD$ , то есть тем углом, синус которого подлежит определению.

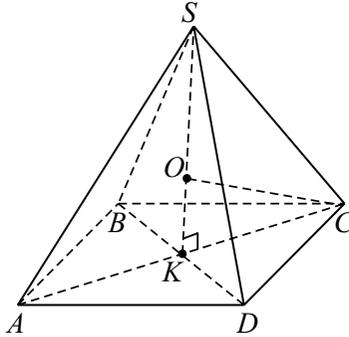


Рис. 335.

2) По условию,  $SO : OK = 13 : 5 \Rightarrow OK = \frac{5}{13}R$ . Из  $\triangle COK$  имеем:

$$CK = \sqrt{CO^2 - OK^2} = \frac{12}{13}R. \text{ Но } CK = \frac{AC}{2} = 6 \Rightarrow \frac{12}{13}R = 6, R = \frac{13}{2},$$

$$SK = SO + OK = \frac{18}{13}R = 9.$$

3) Объём  $V$  пирамиды  $SABCD$  равен:  $V = \frac{1}{3}SK \cdot S_{ABCD} = 3S_{ABCD}$ .

По условию,  $V = 108 \Rightarrow S_{ABCD} = 36$ . Воспользовавшись формулой, выражающей площадь четырёхугольника через длины диагоналей, имеем:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \angle CKD, \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \sin \angle CKD = 36, \sin \angle CKD = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

**1065.** Решение данной задачи разобьём на несколько пунктов.

1. Пусть  $O$  — центр сферы, описанной вокруг пирамиды  $ABCD$ , см. рис. 336. Так как  $BD$  — диаметр этой сферы, то  $\angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$ . Поскольку вершина  $A$  равноудалена от вершин  $B, C, D$ , то её проекция на плоскость  $BCD$  является центром описанной вокруг  $\triangle BCD$  окружности, то есть совпадает с точкой  $O$ . Таким образом,  $AO$  — перпендикуляр к плоскости  $BCD$  и, значит, плоскость  $ABD$  перпендикулярна плоскости  $BCD$ . Следовательно,  $\angle CBD$  есть угол между ребром  $BC$  и плоскостью  $ABD$  (прямая  $BD$  является проекцией прямой  $BC$  на плоскость  $ABD$ ). Обозначим через  $R$  — радиус сферы, описанной вокруг  $ABCD$ , а через  $\alpha$  величину угла  $\angle CBD$ .

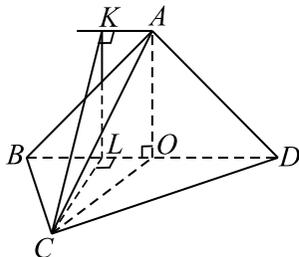


Рис. 336.

Тогда  $AO = CO = R$ ,  $BD = 2R$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ,  $BC = 2R \cdot \cos \alpha$ ,  
 $CD = 2R \cdot \sin \alpha$ .

2. Через вершину  $A$  проведём прямую, параллельную ребру  $BD$ , и пусть  $K$  — проекция вершины  $C$  на эту прямую, а  $L$  — проекция точки  $K$  на  $BD$ . Так как  $AK \parallel BD$ , то угол между рёбрами  $AC$  и  $BD$  равен  $\angle KAC$ . Заметим, что  $\sin \angle KAC = \frac{CK}{AC}$ .

3. Из  $\triangle KLC$  и  $\triangle ADC$  по теореме Пифагора имеем:  
 $CK = \sqrt{KL^2 + CL^2} = \sqrt{R^2 + CL^2}$ ,  $AC = \sqrt{2}R$ . Поскольку  $AL \parallel DK$ ,  
 $DK \perp CK$ , то  $AL \perp CK$ , и по теореме о трёх перпендикулярах  $AL \perp CL$ , то  
 есть  $CL$  — высота в  $\triangle BCD$ . Найдём длину  $CL$ , выразив площадь  $\triangle BCD$   
 двумя способами:  $2S_{BCD} = CL \cdot BD = BC \cdot CD$ . Имеем,

$$CL = \frac{BC \cdot CD}{BD} = 2R \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2R \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}R}{2},$$

$$CK = \sqrt{R^2 + CL^2} = \frac{\sqrt{3}R}{\sqrt{2}}.$$

4.  $\sin \angle KAC = \frac{\sqrt{3}R}{\sqrt{2}} : (\sqrt{2}R) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Итак,  $\angle CAK = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ ,  
 градусная мера  $\angle CAK$  равна  $60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

**1066.** Решение данной задачи разобьём на несколько пунктов.

1. Через вершину  $D$  проведём прямую, параллельную ребру  $AB$ , и пусть  $K$  — проекция вершины  $C$  на эту прямую, а  $L$  — проекция точки  $K$  на  $AB$ , см. рис. 337. Так как центр описанной вокруг  $ABCD$  сферы — точка  $O$ , лежит на ребре  $AB$ , а вершина  $D$  равноудалена от вершин  $A, B, C$ , то  $\angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$ , а прямая  $DO$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Поскольку прямая  $AB$  является проекцией прямой  $AC$  на

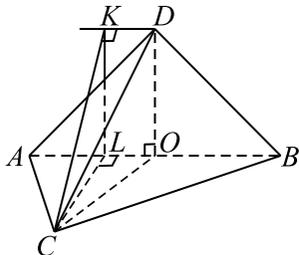


Рис. 337.

плоскость  $ABD$ , то угол между ребром  $AC$  и гранью  $ABD$  равен  $\angle BAC$ , и, значит,  $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ .

2. Радиус сферы, описанной вокруг  $ABCD$ , обозначим через  $R$ , тогда  $AC = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}R$ ,  $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}R$ .

По теореме Пифагора из  $\triangle CLK$  и  $\triangle COD$  имеем:

$$CK = \sqrt{KL^2 + CL^2} = \sqrt{R^2 + CL^2}, \quad CD = \sqrt{CO^2 + DO^2} = \sqrt{2}R.$$

Заметим, что  $AL \perp CK$ , так как  $AL \parallel KD$ ,  $KD \perp CK$ . Поэтому, по теореме о трёх перпендикулярах,  $AL \perp CL$ , то есть  $CL$  — высота в  $\triangle ABC$ .

Найдём длину  $CL$ , выразив площадь  $\triangle ABC$  двумя способами:

$$2S_{ABC} = CL \cdot AB = AC \cdot BC, \quad AC \cdot BC = R^2, \quad CL = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{R}{2}.$$

$$\text{Далее, } CK = \sqrt{R^2 + CL^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}R, \quad \sin \angle CDK = \frac{CK}{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

3. Чтобы найти расстояние  $d$  между прямыми  $AB$  и  $CD$ , выразим объём пирамиды  $ACOD$  по двум формулам:

$$V = \frac{DO}{3} \cdot S_{AOC} \quad \text{и} \quad V = \frac{d}{6} \cdot AO \cdot CD \cdot \sin \alpha, \quad \text{где } \alpha \text{ — угол между } AB \text{ и}$$

$CD$ . Из первой формулы имеем:  $V = \frac{DO}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot CL = \frac{R^3}{12}$ . Заметим,

что  $\alpha = \angle CDK$ , поскольку  $AB \parallel DK$ . Поэтому из второй формулы имеем:  $V = \frac{d}{6} \cdot R \cdot \sqrt{2}R \cdot \sin \angle CDK = \frac{\sqrt{5}}{12} \cdot d \cdot R^2$ . Итак,  $\frac{\sqrt{5}}{12}R^2d = \frac{1}{12}R^3$ ,

$$d = \frac{R}{\sqrt{5}} = 1.$$

Ответ: 1.

**1067.** Пусть  $O$  — центр сферы,  $H$  и  $H_1$  — центры оснований призмы (см. рис. 338). Найдём сначала сторону основания призмы. Пусть  $BC = a$ , тогда  $CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $CL = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \angle LKC = 2\sqrt{3}$ . Заметим, что

$\triangle C_1MN \sim \triangle C_1A_1B_1$  и найдём коэффициент подобия  $k$ :

$$LC_1 = LC - CC_1 = 2a(\sqrt{3} - 1), k = \frac{MN}{AB} = \frac{LM}{LB} = \frac{LC_1}{LC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}.$$

Поэтому  $\frac{S_{C_1MN}}{S_{C_1A_1B_1}} = k^2 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3}$  и  $\frac{S_{A_1MNB_1}}{S_{C_1A_1B_1}} = 1 - k^2 = \frac{2\sqrt{3} - 1}{3}$ .

Значит,  $S_{A_1MNB_1} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2(6 - \sqrt{3})}{12}$ . С другой стороны,

$$S_{AMNB} = \frac{S_{A_1B_1MN}}{\cos \alpha}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{17}},$$

$$S_{ABMN} = \frac{\sqrt{17} \cdot a^2(6 - \sqrt{3})}{12}. \text{ По условию, } S_{ABMN} = \frac{\sqrt{17}(6 - \sqrt{3})}{3},$$

$$\Rightarrow a^2 = 4, a = 2. \text{ Теперь вычислим радиус сферы: } CO^2 = CH^2 + OH^2 = \\ = \frac{a^2}{3} + a^2, R = CO = \frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

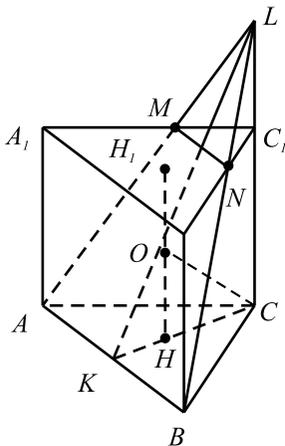


Рис. 338.

Ответ:  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ .

**1068.** Пусть  $O$  — центр сферы,  $H$  и  $H_1$  — центры оснований призмы,  $R$  — радиус сферы, описанной вокруг призмы (см. рис. 339).  $S_{\text{сф.}} = 4\pi \cdot R^2_{\text{сф.}}$ .

По условию  $S_{\text{сф.}} = 12\pi$ , значит  $R_{\text{сф.}} = \sqrt{3}$ .

Пусть  $AB = a$ , тогда  $AA_1 = 2a$ ,  $OH = a$ .  $HC = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

$OC^2 = OH^2 + HC^2$ ,  $3 = a^2 + \frac{a^2}{3}$ ,  $4a^2 = 9$ ,  $a^2 = \frac{9}{4}$ . Так как  $\triangle ABC$  —

правильный, то  $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$ . По условию, угол между плоскостями  $ABL$  и  $ABC$  равен  $30^\circ$ , и так как  $C$  — проекция точки  $L$ , то  $S_{ABL} = \frac{S_{ABC}}{\cos 30^\circ} = \frac{9\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,125$ .

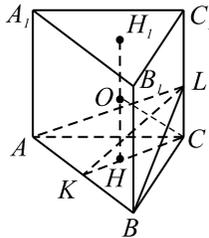


Рис. 339.

Ответ: 1,125.

**1069.** Пусть  $O$  — центр сферы,  $H$  и  $H_1$  — центры оснований призмы,  $R$  — радиус сферы, описанной вокруг призмы (см. рис. 340). Пусть  $AB = x$ ,

тогда  $AA_1 = 2x$ ,  $OH = x$ .  $HC = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ .  $R = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{3}} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$ .

$\angle LKC$  — линейный угол двугранного угла между плоскостью сечения  $ALB$  и плоскостью основания  $ABC$ , поэтому  $\angle LKC = 45^\circ$ , значит,

$KL = KC = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ ,  $KL = \frac{x\sqrt{6}}{2}$ .  $S_{ALB} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x\sqrt{6}}{2} = \frac{x^2\sqrt{6}}{4}$ .

$\frac{x^2\sqrt{6}}{4} = 2,25\sqrt{6}$ ,  $x^2 = 9$ ,  $x = 3$ .  $R = \frac{2x}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ .

Ответ:  $2\sqrt{3}$ .

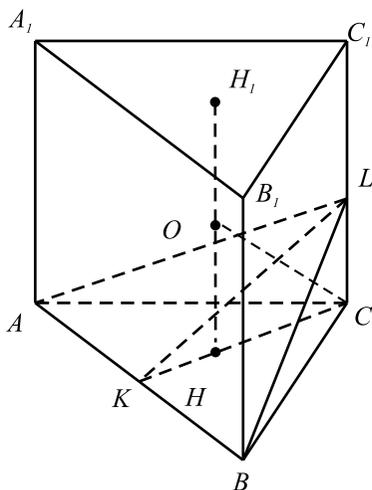


Рис. 340.

**1070.** 1) Пусть радиус основания конуса  $R$ , а высота конуса  $h$ , тогда  $S_{SAB} = R \cdot h$ , а  $S_{MON} = \frac{1}{4}S_{ABS} = \frac{1}{4}Rh$  (площадь срединного треугольника равна четверти площади исходного треугольника) (см. рис. 341).

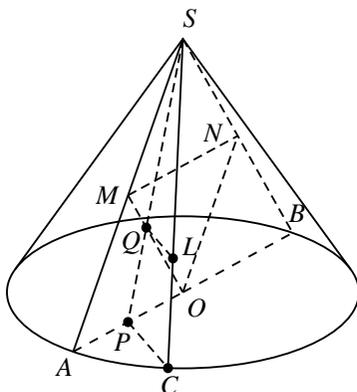


Рис. 341.

2) Опустим высоту  $CP$  в треугольнике  $ACO$ . Тогда  $CP$  — перпендикуляр к плоскости  $ABS$ , так как  $CP$  перпендикулярно ещё и  $SO$ . Поэтому  $AB$  — перпендикуляр к плоскости  $SPC$ .

Из условия следует, что дуга  $AC$  равна  $30^\circ$ , тогда из треугольника  $POC$  находим  $PC = \frac{R}{2}$ ,  $PO = R\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

3) Пусть точка  $Q$  — точка пересечения  $SP$  и  $MO$ . Восстановим перпендикуляр из точки  $Q$  к  $SP$  в плоскости  $SPC$ . Он перпендикулярен ещё и к  $AB$ , так как лежит в плоскости  $SPC$ .

Следовательно, он пересечёт  $SC$  в точке  $L$ , так как  $SCP \perp ABS$ . Тогда  $LQ$  — искомая высота пирамиды  $LMNO$ .

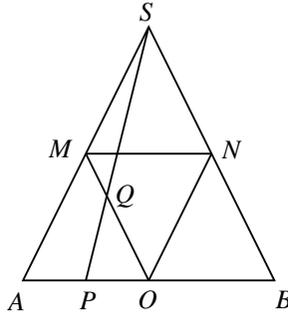


Рис. 342.

4) Треугольники  $PQO$  и  $PSB$  подобны (см. рис. 342), так как  $MO \parallel SB$ . Поэтому  $PQ : QS = PO : OB = \sqrt{3} : 2$ , значит,  $SQ : SP = SQ : (SQ + PQ) = 2 : (2 + \sqrt{3})$ .

5) Так как  $LQ \perp SP$  и  $CP \perp SP$ , то прямоугольные треугольники  $SQL$  и  $SPC$  подобны.  $QL : PC = SQ : SP = 2 : (2 + \sqrt{3})$ .

$$QL = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} PC = \frac{R}{2 + \sqrt{3}}.$$

$$6) V_{OLMN} = \frac{1}{3} QL \cdot S_{OMN} = \frac{hR^2}{12(2 + \sqrt{3})}. \text{ Площадь основания}$$

$\pi R^2 = 12\pi$ , значит,  $R^2 = 12$ ,  $h = 10 + 5\sqrt{3}$ , подставляя в выражение для объёма, находим  $V_{OLMN} = 5$ .

Ответ: 5.

**1071.** План решения:

1) Докажем, что точка  $M$  — середина  $A_1C$ .

2) Докажем, что искомый объём равен половине объёма пирамиды  $A_1ABC$ .

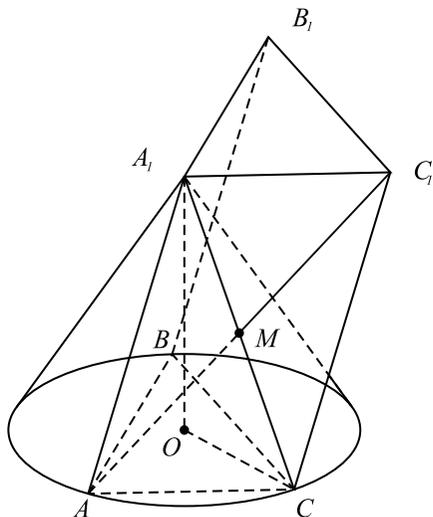


Рис. 343.

3) Вычислим радиус описанной окружности, площадь треугольника  $ABC$ .

4) Угол между прямой  $A_1C$  и плоскостью основания — это угол  $A_1CO$ . Найдём высоту конуса  $A_1O$ .

5) Найдём объём  $A_1ABC$  и, с помощью соотношения, полученного во втором пункте, найдём объём искомой пирамиды.

1)  $A_1C$  — образующая конуса (см. рис. 343), поэтому точка пересечения  $AC_1$  и  $A_1C$  является точкой пересечения  $AC_1$  с конусом. Но  $AC_1$  пересекает конус только в двух точках:  $A$  и  $M$ . Следовательно,  $M$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма  $AA_1C_1C$ . Значит,  $M$  — середина  $A_1C$ .

2) Поскольку прямая  $BB_1$  параллельна плоскости  $AA_1C_1C$ , то длина перпендикуляра из точки  $B_1$  равна длине перпендикуляра из точки  $B$ . Кроме того,  $S_{AMC} = \frac{1}{2}S_{AA_1C}$ , так как  $M$  — середина  $A_1C$ . Поэтому

$$V_{B_1AMC} = V_{BAMC} = \frac{1}{2}V_{A_1ABC}.$$

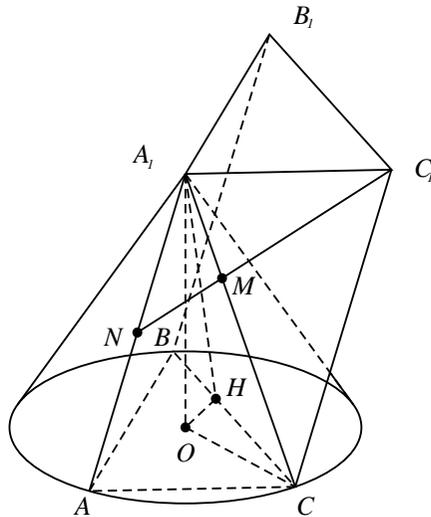


Рис. 344.

3) По теореме синусов  $AB : \sin 60^\circ = 2R$ , где  $R$  — радиус описанной окружности. Поэтому  $R = \frac{10}{\sqrt{3}}$ . По формуле площади правильного

треугольника  $S_{ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$ .

4)  $A_1O$  — перпендикуляр к плоскости основания, поэтому угол между  $A_1C$  и основанием равен углу  $A_1CO$ .  $A_1O = CO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 10$ .

$$5) V_{B_1AMC} = \frac{1}{2} V_{A_1ABC} = \frac{1}{6} A_1O \cdot S_{ABC} = \frac{250\sqrt{3}}{6} = \frac{125}{\sqrt{3}}.$$

Ответ:  $\frac{125}{\sqrt{3}}$ .

**1072.** Общий план решения такой же, как и в задаче C4 предыдущего варианта.

1)  $A_1C$  — образующая конуса (см. рис. 344), поэтому точка пересечения  $C_1N$  и  $A_1C$  является точкой пересечения  $C_1N$  с конусом. Но  $C_1N$  пересекает конус только в двух точках:  $N$  и  $M$ . Следовательно,  $M$  — точка пересечения  $A_1C$  и  $C_1N$ . Треугольники  $A_1MN$  и  $CMC_1$  подобны. Значит,  $CM : MA_1 = CC_1 : A_1N = 2 : 1$ .

2) Перпендикуляр из  $M$  на плоскость  $BB_1C_1C$  относится к перпендикуляру из точки  $A_1$  как  $CM$  к  $CA_1$ , и равно  $2 : 3$ .  $V_{MBB_1C_1} = \frac{2}{3}V_{A_1BB_1C_1}$ . Поскольку прямая  $CC_1$  параллельна плоскости  $AA_1B_1B$ , то  $V_{A_1BB_1C_1} = V_{A_1BB_1C}$ . Кроме того,  $S_{A_1BB_1} = S_{A_1BA}$ , поэтому  $V_{A_1BB_1C} = V_{A_1BAC}$ . Таким образом, искомый объём равен  $\frac{2}{3}$  от объёма пирамиды  $A_1ABC$ .

3) Пусть  $O$  — центр окружности-основания конуса, а  $AH$  — высота в треугольнике  $ABC$ .  $A_1B = A_1C$ , поэтому  $H$  — середина стороны  $BC$ , поэтому  $OH$  — перпендикулярно  $BC$ . То есть угол между плоскостями  $A_1BC$  и  $ABC$  равен углу  $A_1HO$ .  $OH = OC \cdot \sin 30^\circ = 6$ .  $CH = 6\sqrt{3}$ ;  $AB = AC = BC = 12\sqrt{3}$ .  $S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 108\sqrt{3}$ .

4)  $OH$  и  $AH$  — перпендикуляры к плоскости  $BC$ , поэтому угол между плоскостями  $A_1BC$  и  $ABC$  равен углу  $A_1HO$ .  $A_1O = OH \cdot \operatorname{tg} A_1HO = 6\sqrt{3}$ .

$$5) V_{MBB_1C_1} = \frac{2}{3}V_{A_1ABC} = \frac{2}{9}A_1O \cdot S_{ABC} = 432.$$

Ответ: 432.

**1073.** Дано:  $SMNPQ$  — четырёхугольная пирамида (см. рисунок 345), центр  $O$  сферы  $T$ , описанной около пирамиды  $SMNPQ$  лежит в плоскости  $MNP$ ,  $H = MP \cap NQ$ ,  $SH \perp$  пл.  $MNP$ ,  $SN = MN$ ,  $PH = 8$ ,  $MQ = 6$ ,  $\operatorname{tg} \angle(SM, \text{пл. } MNP) = \frac{4}{3}$ .

Найти:  $QP$ .

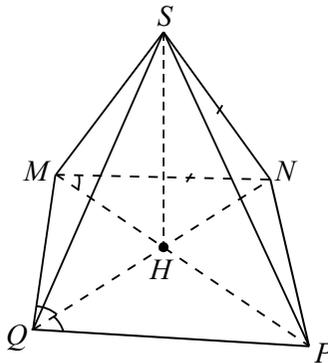


Рис. 345.

План решения: 1. Докажем, что треугольники  $SQN$  и  $SMP$  прямоугольные. 2. Найдём все элементы треугольника  $SMP$ . 3. Докажем, что  $QN$  — биссектриса угла  $MQP$  и по свойству биссектрисы найдём  $QP$  из треугольника  $MQP$ .

*Решение.* Поскольку центр сферы, описанной около пирамиды  $SMNPQ$  лежит в плоскости основания  $MNPQ$ , плоскость  $MNP$  является плоскостью симметрии сферы  $T$ . Так как  $SH \perp$  пл.  $MNP$  и  $SH \subset$  пл.  $MSP$ , то пл.  $MSP \perp$  пл.  $MNP$ . Поэтому сечение сферы  $T$  плоскостью пл.  $MSP$  является окружность с диаметром  $MP$ , при этом в эту окружность вписан треугольник  $SMP$ . Значит,  $\angle MSP = 90^\circ$ , как угол, опирающийся на диаметр. Аналогично,  $\angle QSN = 90^\circ$ .

Так как  $SH \perp$  пл.  $MNP$ , то  $\angle(SM, \text{пл. } MNP) = \angle SMH \Rightarrow$

$\text{tg } \angle SMH = \frac{4}{3}$ . Треугольник  $MSP$  прямоугольный. Так как  $SH$  — высота в нём, то  $\angle SMH = \angle HSP$ , откуда  $\frac{HP}{SH} = \text{tg } \angle HSP = \frac{4}{3}$ . Поэтому

$SH = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6$ ,  $SP = \sqrt{SH^2 + HP^2} = 10$ ,  $MH = \frac{SH}{\text{tg } \angle SMH} = \frac{9}{2}$ . Тре-

угольник  $SNQ$  прямоугольный, поэтому  $SN^2 = NH \cdot NQ$ . В силу того,

что  $SN = MN$ ,  $MN^2 = NH \cdot NQ$ , откуда следует, что  $\frac{MN}{NH} = \frac{NQ}{MN}$ , а

это означает, что треугольники  $MHN$  и  $QMN$  подобны. Поэтому  $\angle MQN = \angle NMP$ . Но четырёхугольник  $MNPQ$  вписан в сечение сферы  $T$  плоскостью  $MNP$ , которое является окружностью, что означает, что  $\angle NMP = \angle NQP$  как вписанные углы. Следовательно,  $\angle MQN = \angle NMP = \angle NQP$ , то есть  $QN$  — биссектриса угла  $MQP$ .

Из треугольника  $MQP$  по свойству биссектрисы имеем  $\frac{QP}{QM} = \frac{PH}{MH} \Rightarrow$

$$QP = QM \cdot \frac{PH}{MH} = \frac{32}{3}.$$

Ответ:  $\frac{32}{3}$ .

**1074.** Дано:  $SABC$  — треугольная пирамида (см. рисунок 346),  $\triangle ABC$  — остроугольный, центр  $O$  сферы  $T$ , описанной около пирамиды  $SABC$  лежит в плоскости  $ABC$ ,  $CH$  — биссектриса угла  $ACB$ ,  $SH \perp$  пл.  $ABC$ ,  $AS = \sqrt{15}$ ,  $BH = 2$ ,  $\text{tg } \angle(\text{пл. } SBC, \text{пл. } ABC) = \sqrt{2}$ .

Найти:  $V_{ABC}$ .

План решения: 1. Докажем, что треугольник  $ASB$  прямоугольный.

2. Найдём все элементы треугольника  $ASB$ . 3. Найдём элементы треугольника  $ABC$ .

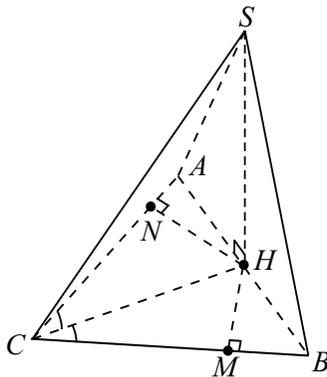


Рис. 346.

*Решение.* 1. Так как центр сферы, описанной около пирамиды  $SABC$ , лежит в плоскости основания  $ABC$ , плоскость  $ABC$  является плоскостью симметрии сферы  $T$ . Так как  $SH \perp$  пл.  $ABC$  и  $SH \subset$  пл.  $ASB$ , то пл.  $ASB \perp$  пл.  $ABC$ . Поэтому сечением сферы  $T$  плоскостью  $ASB$  является окружность с диаметром  $AB$ , при этом в эту окружность вписан треугольник  $ASB$ . Значит,  $\angle ASB = 90^\circ$ , как угол, опирающийся на диаметр.

2. Треугольник  $ASB$  прямоугольный, поэтому  $SB^2 = HB \cdot AB$ . Пусть  $SB = x$ . Тогда  $AB = \sqrt{15 + x^2}$  и  $x^2 = 2\sqrt{15 + x^2}$ .

Таким образом, получили уравнение для нахождения  $x$ . Сделаем в нём замену  $t = x^2$ , тогда уравнение примет вид:  $t = 2\sqrt{15 + t} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 4t + 60, \\ t \geq 0, \end{cases}$

$\begin{cases} t^2 - 4t - 60 = 0, \\ t \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (t - 10)(t + 6) = 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow t = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10}$ . Значит,  $AB = 5$ ,  $AH = AB - BH = 3$  и  $SH = \sqrt{BS^2 - BH^2} = \sqrt{6}$ .

3. Пусть  $M \in BC$  так, что  $BC \perp$  пл.  $SMH$ , тогда так как  $BC \perp MH$ ,  $BC \perp MS$  и  $BC$  — линия пересечения плоскостей  $SBC$  и  $ABC$ , то угол между этими плоскостями равен углу  $SMH$ , откуда  $\operatorname{tg} \angle SMH = \sqrt{2}$ . Тогда из прямоугольного треугольника  $SMH$  следует, что

$HM = \frac{SH}{\operatorname{tg} \angle SMH} = \sqrt{3}$ . Опустим перпендикуляр  $HN$  из точки  $H$  на прямую  $AC$ . Точка  $N$  попадёт на отрезок  $AC$ , так как  $\triangle ABC$  — ост-

роугольный.  $NH = MH = \sqrt{3}$ , поскольку все точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Пусть  $\angle ABC = \alpha$ ,  $\angle BAC = \beta$ . Так как  $NM \perp BC$ , а  $HN \perp AC$ , то  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . По основ-

ному тригонометрическому тождеству  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . Значит,  $\sin \angle ACB = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$ . Тогда по теореме синусов из треугольника  $ABC$  следует:

$$\frac{\sin \angle ACB}{AB} = \frac{\sin \beta}{BC} \Rightarrow BC = \frac{\sin \beta}{\sin \angle ACB} \cdot AB = \frac{10\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}. \text{ Значит,}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{75}{6\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} \text{ и } V_{SABC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABC} = \frac{10\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{2}.$$

*Ответ:*  $\frac{10\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{2}$ .

**1075.** 1. По свойству прямой, параллельной плоскости, плоскость сечения, проходящая через середину ребра  $DC$  точку  $N$  параллельно прямым  $BC$  и  $AD$ , пересекает грани  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ADB$ ,  $ABC$  по отрезкам соответственно параллельным этим рёбрам, то есть  $NE \parallel BC \parallel MF$  и  $MN \parallel AD \parallel EF$  (см. рис. 347). Следовательно, сечение  $MNEF$  (основание пирамиды  $PMNEF$ ) является параллелограммом, стороны которого суть средние линии треугольников-граней пирамиды.

2. Диагональ  $NF$  делит параллелограмм  $MNEF$  на два равных треугольника, поэтому  $S_{MNF} = \frac{1}{2}S_{MNEF}$ . Значит  $V_{PMNEF} = 2V_{PMNF}$ .

3. Примем  $\triangle PMF$  за основание пирамиды  $PMNF$ , тогда проведём  $NO \parallel DH$ , так как  $DH$  — высота пирамиды  $DABC$ .  $DH \perp ABC \Rightarrow NO \perp ABC \Rightarrow NO$  — высота пирамиды  $NPMF$ .  $HKNO$  — прямоугольник  $\Rightarrow NO = KH = 2,5$ .

4. В  $\triangle PMF$  поведём высоту  $PQ$ , тогда  $PCMQ$  прямоугольник ( $MF \parallel BC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $CM \parallel PQ$ ), значит

$$PQ = CM = 7,5. S_{PMF} = \frac{1}{2} \cdot MF \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7,5 = 22,5.$$

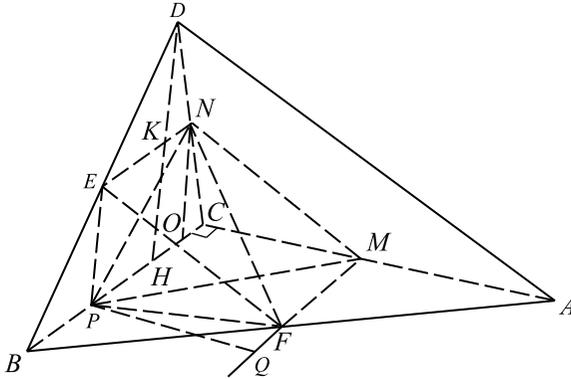


Рис. 347.

$$5. V_{PMNEF} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{PMF} \cdot NO = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 22,5 \cdot 2,5 = 37,5.$$

Ответ: 37,5.

**1076.** 1) По свойству прямой, параллельной плоскости, плоскость сечения, проходящая через середину  $M$  ребра  $BD$  параллельно рёбрам  $BC$  и  $AD$ , пересекает грани  $BCD$ ,  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  по отрезкам, соответственно параллельным этим рёбрам, то есть  $LM \parallel BC \parallel FN$  и  $MN \parallel AD \parallel LF$  (см. рис. 348).

Следовательно, сечение  $MLFN$  (основание пирамиды  $TMLFN$ ) является параллелограммом, причём его стороны — средние линии треугольников — граней пирамиды  $DABC$ .

2) Диагональ  $LN$  делит параллелограмм  $MLFN$  на два равных треугольника, поэтому площадь треугольника  $LFN$  равна половине площади параллелограмма  $MLFN$ . Следовательно, объём  $V$  пирамиды  $TMLFN$  равен удвоенному объёму пирамиды  $TLFN$ , поскольку они имеют общую вершину  $T$ , то есть  $V = 2V_{TLFN}$ .

3) Примем треугольник  $TFN$  за основание пирамиды  $TLFN$ . Поскольку  $AD \perp ABC$  и  $AD \parallel LF$ , то  $LF \perp ABC$ , следовательно,  $LF$  — высота пирамиды  $TLFN$ , опущенная из вершины  $L$ .

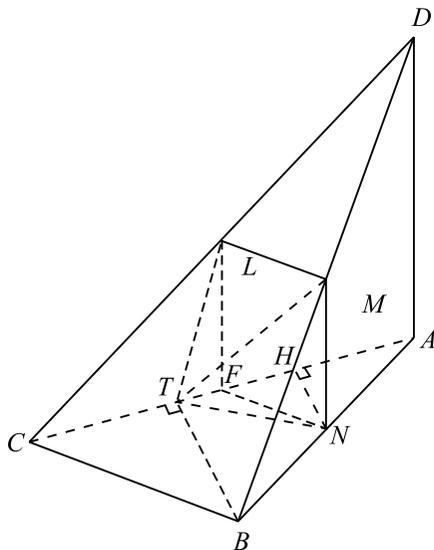


Рис. 348.

По свойству средней линии треугольника  $ADC$   $LF = 0,5AD$ .

4) В прямоугольном треугольнике  $BCT$   $CT = BC \cos 60^\circ = \sqrt{5}$ . Следовательно,  $FT = CF - CT = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Пусть  $NH$  — высота треугольника  $TFN$ . Тогда  $NH \parallel BT$ , а так как  $N$  — середина отрезка  $AB$ , то по свойству средней линии треугольника  $ABT$  имеем

$NH = 0,5BT = 0,5\sqrt{BC^2 - CT^2} = \frac{1}{2}\sqrt{15}$ . Найдём площадь  $S$  основания  $TFN$ :  $S = 0,5 \cdot FT \cdot NH = \frac{5\sqrt{3}}{8}$ .

Следовательно,  $V = 2V_{TLFN} = \frac{2}{3}S \cdot LF = \frac{5\sqrt{3}}{24} \cdot AD$ . Вычислим объём

пирамиды  $DABC$ :  $V_{DABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin 60^\circ \cdot AD = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot AD$ .

Отсюда  $\frac{V_{DABC}}{V} = 12$ . Следовательно, объём пирамиды  $DABC$  в 12 раз больше объёма пирамиды  $TMLFN$ .

Ответ: 12.

**1077.** 1) Плоскость сечения, проходящая через середину  $L$  ребра  $DC$  параллельно рёбрам  $BC$  и  $AD$ , пересекает грани  $BCD$ ,  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  по отрезкам, соответственно параллельным этим рёбрам, то есть  $LM \parallel BC \parallel FN$  и  $MN \parallel AD \parallel LF$  (см. рис. 349). Следовательно, сече-

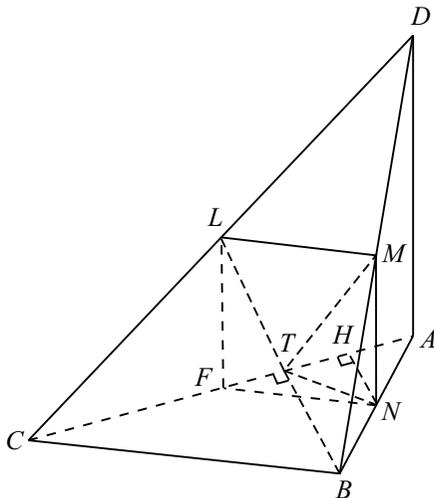


Рис. 349.

ние

$MLFN$  — параллелограмм, причём его стороны — средние линии треугольников — граней пирамиды  $DABC$ .

2)  $LN$  делит  $MLFN$  на два равных треугольника, поэтому  $S_{LFN} = \frac{1}{2}S_{MLFN}$ . Отсюда  $V_{TMLFN} = 2V_{TLFN}$ , поскольку вершина  $T$  — общая.

3) Примем  $TFN$  за основание пирамиды  $TLFN$ . Так как  $AD \perp ABC$  и  $AD \parallel LF$ , то  $LF \perp ABC$ , следовательно,  $LF$  — высота пирамиды  $TLFN$ , опущенная из вершины  $L$ . По свойству средней линии  $\triangle ADC$

$$LF = \frac{AD}{2}.$$

4) В прямоугольном треугольнике  $BCT$   $CT = BC \cos 30^\circ = 3$ . Следовательно,  $FT = CT - CF = 0,5$ . Пусть  $NH$  — высота треугольника  $TFN$ . Тогда  $NH \parallel BT$ , а так как  $N$  — середина отрезка  $AB$ , то

$$NH = \frac{1}{2}BT = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 - CT^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Теперь } S_{TFN} = \frac{1}{2} \cdot FT \cdot NH = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Следовательно,  $V_{TMLFN} = 2V_{TLFN} = \frac{2}{3}S_{TFN} \cdot LF = \frac{\sqrt{3}}{24} \cdot AD$ . Вы-

числим  $V_{DABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin 30^\circ \cdot AD = \frac{5\sqrt{3}}{6} \cdot AD$ . Отсюда

$$\frac{V_{DABC}}{V_{TMLFN}} = 20.$$

Ответ: 20.

**1078.** По условию задачи сделаем чертёж (см. рис. 350). Проведём  $AK \perp BC$ , тогда  $SK \perp BC$  (по теореме о трёх перпендикулярах).

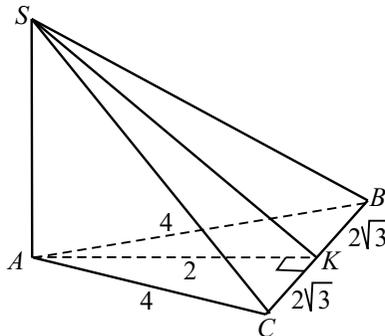


Рис. 350.

Высота пирамиды  $H = SA$ . Из прямоугольного треугольника  $AKC$  находим  $AK = 2$ . Тогда  $SK = \sqrt{4 + H^2}$ .

Воспользуемся формулой:  $V = \frac{1}{3}rS_{\text{пол.}}$ , где  $V$  — объём пирамиды,  $r$  — радиус вписанного в неё шара,  $S_{\text{пол.}}$  — площадь полной поверхности пирамиды. С другой стороны

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot H = \frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3} \cdot 2}{2} \cdot H = \frac{4\sqrt{3}}{3}H.$$

$$\text{Найдём } S_{\text{пол.}}. S_{SBA} = S_{SCA} = \frac{4H}{2} = 2H.$$

$$\text{Найдём } S_{BCS}. S_{BCS} = \frac{1}{2}4\sqrt{3} \cdot \sqrt{4 + H^2} = 2\sqrt{3}\sqrt{4 + H^2}.$$

$$S_{\text{пол.}} = 4\sqrt{3} + 4H + 2\sqrt{3}\sqrt{4 + H^2}.$$

Имеем:  $\frac{4\sqrt{3}H}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot (4\sqrt{3} + 4H + 2\sqrt{3}\sqrt{4+H^2})$ ,  $3H - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}\sqrt{4+H^2}$ . Решая это уравнение, находим:  $H = 2\sqrt{3}$ .

Точка  $H$  — центр шара, описанного около пирамиды  $SABC$  ( $HD$  — серединный перпендикуляр к  $SA$ ,  $HO \perp ABC$ , где  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ) (см. рис. 351).

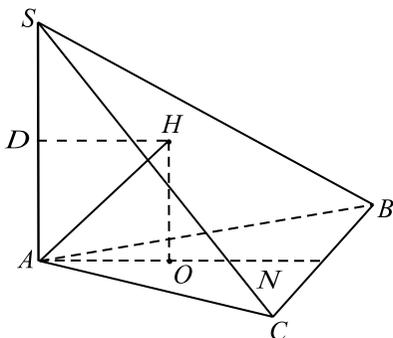


Рис. 351.

Иначе,  $H$  — вершина прямоугольника  $ADHO$ ,  $AH$  — радиус шара.

$$AH^2 = OH^2 + AO^2; OH = \frac{H}{2} = \sqrt{3},$$

$$AO = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3}}{4 \cdot 4\sqrt{3}} = 4. AH = \sqrt{3 + 16} = \sqrt{19}.$$

Ответ:  $\sqrt{19}$ .

**1079.** По условию задачи сделаем чертёж (см. рис. 352).

Дано:  $AB = BC = 6$ ,  $AC = 4$ .  $SB \perp ABC$ ,  $H = SB = (4 + \sqrt{2})r$ .

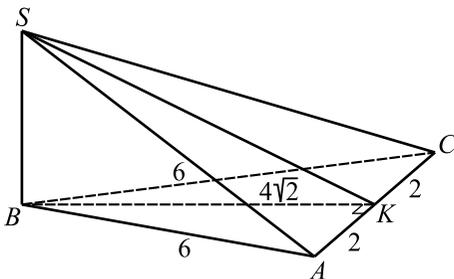


Рис. 352.

Найти:  $R$ .

Воспользуемся формулой  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot r \cdot S_{\text{пол. пов.}}$ . Обозначим высоту

пирамиды  $SB = H$ . Из прямоугольного треугольника  $ABK$ :

$BK = 4\sqrt{2}$ . Из прямоугольного треугольника  $BSK$ :  $SK = \sqrt{H^2 + 32}$ .

Тогда:  $S_{\triangle ABC} = 8\sqrt{2}$ ;  $2S_{\triangle SAB} = 6H$ ;  $S_{\triangle SAC} = 2\sqrt{H^2 + 32}$ ;

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot H \cdot 8\sqrt{2}$ . Подставим найденные значения в формулу:

$$\frac{1}{3} \cdot H \cdot 8\sqrt{2} = \frac{1}{3}r(8\sqrt{2} + 6H + 2\sqrt{H^2 + 32}),$$

$$4\sqrt{2}H = \frac{H}{4 + \sqrt{2}}(4\sqrt{2} + 3H + \sqrt{H^2 + 32}), \text{ что даёт уравнение:}$$

$12\sqrt{2} + 8 - 3H = \sqrt{H^2 + 32}$  (1). Возведём его в квадрат. Получим  $H^2 - (6 + 9\sqrt{2})H + 40 + 24\sqrt{2} = 0$ . Вычислим дискриминант этого уравнения:  $D = (6 + 9\sqrt{2})^2 - 4(40 + 24\sqrt{2}) = 38 + 12\sqrt{2} = (6 + \sqrt{2})^2$ .

Тогда:  $H_{1,2} = \frac{6 + 9\sqrt{2} \pm (6 + \sqrt{2})}{2}$ .  $H_1 = 4\sqrt{2}$ ,  $H_2 = 5\sqrt{2} + 6$ . Вто-

рой корень  $H = 5\sqrt{2} + 6$  не является решением уравнения (1), так как  $12\sqrt{2} + 8 - 3H < 0$ . Значит,  $H = 4\sqrt{2}$ . Центр описанного около пирамиды шара лежит в точке  $O$  — точке пересечения прямой  $DO$ , проходящей через точку  $D$  — центр описанной около  $\triangle ABC$  окружности, перпендикулярно плоскости  $ABC$  и плоскости, проходящей через середину высоты  $SB$ , перпендикулярно этой высоте (см. рис. 353).

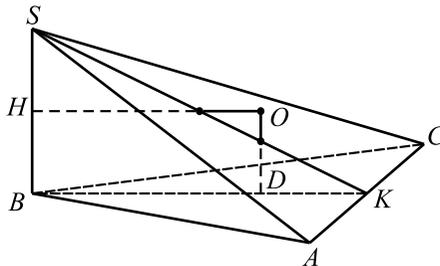


Рис. 353.

То есть  $BHOD$  — прямоугольник и радиус описанного шара  $R = OB$ .

Для его нахождения найдём  $DB = R_{\triangle ABC}$ .  $R_{\triangle ABC} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 4}{4 \cdot 8\sqrt{2}} = \frac{9}{4}\sqrt{2}$ .

$$BH = 2\sqrt{2}. \text{ Тогда } R = \sqrt{\frac{81}{16} \cdot 2 + 8} = \frac{\sqrt{290}}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{290}}{4}.$$

**1080.** Пусть  $AB_1MN$  — заданное сечение (см. рис. 354).  
Найти:  $V_{BB_1MNA}$ .

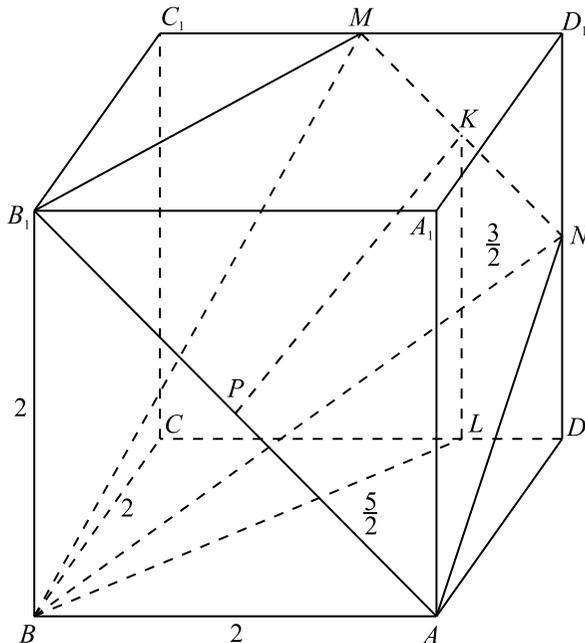


Рис. 354.

Найдём  $S_{\text{осн}}$ :  $AB_1 = 2\sqrt{2}$ ,  $MN = \sqrt{2}$ ,  $B_1M = AN = \sqrt{5}$ .  $B_1MNA$  — равнобочная трапеция. Её высота равна  $\frac{3}{2}$ ,  $S_{\text{тр}} = S_{\text{осн}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ . Пусть  $K$  и  $P$  — середины сторон  $MN$  и  $AB_1$  соответственно,

$KL \perp CD$ . В треугольнике  $BPK$ :  $BP = \sqrt{2}$ ,  $KP = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ,

$BK = \sqrt{BL^2 + KL^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$ . Высота этого треугольника, проведённая

из вершины  $B$ , является высотой пирамиды  $H$ . Из  $\triangle BPK$  находим, что  $H = \frac{4}{3}$ . А искомый объём  $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$ .

Ответ: 2.

**1081.** Проведём указанное в условии сечение (см. рис. 355).

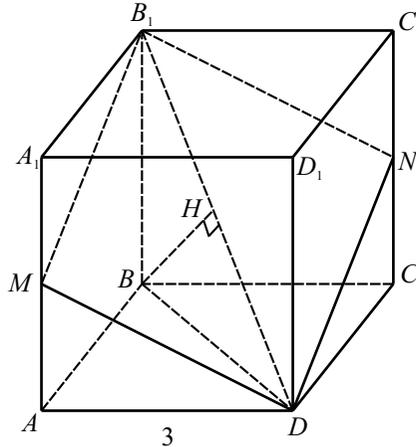


Рис. 355.

Обозначим середины рёбер  $AA_1$  и  $CC_1$  соответственно  $M$  и  $N$ . Искомый объём будет находиться по формуле  $V = \frac{1}{3} \cdot S_{MB_1ND} \cdot h$ , где  $h$  — высота пирамиды  $BH$ . Четырёхугольник  $MB_1ND$  является ромбом. Его диагонали  $MN = 3\sqrt{2}$  и  $B_1D = 3\sqrt{3}$ .  $S_{\text{осн}} = S_{MB_1ND} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$ . Найдём высоту пирамиды  $BH$ .  $BH$  есть высота  $\triangle BB_1D$ . Так как  $\triangle B_1BD \sim \triangle B_1HB$ , то  $\frac{BH}{BD} = \frac{BB_1}{B_1D}$ . Отсюда  $BH = h = \sqrt{6}$ .

Объём равен  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{6} = 9$ .

Ответ: 9.

**1082.** По условию задачи сделаем чертёж (см. рис. 356).

Пусть  $NMM_1N_1$  — сечение пирамиды плоскостью  $a$ ,  $Q$  — середина  $AB$ . Условие  $AM > \frac{1}{2}AS$  позволяет однозначно определить взаимное расположение заданной плоскости и сферы.

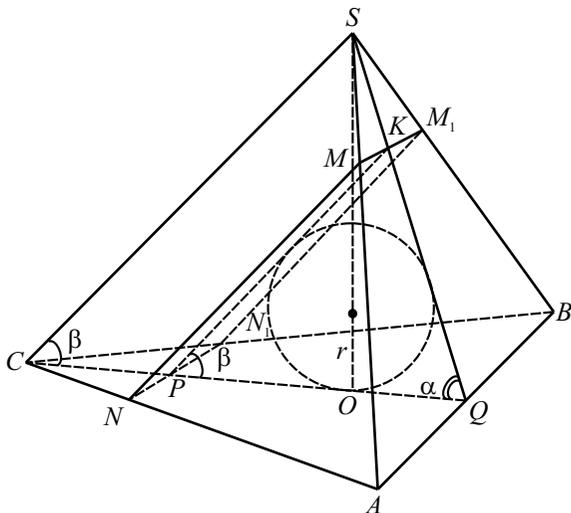


Рис. 356.

*План решения:*

1. Докажем, что пирамида  $SABC$  есть правильный тетраэдр, то есть что все её рёбра равны.
2. Найдём стороны  $\triangle PQQ$ .
3. Найдём радиус вписанной сферы как радиус вписанной окружности в  $\triangle PQQ$ .

*Решение.* 1. Так как  $AM = AN$  и  $MN \parallel SC$ , то  $AC = AS$ . А так как  $SC = SA$ , то  $\triangle ACS$  — правильный. Значит, и вся пирамида — правильный тетраэдр.

2. Сечение  $NMM_1N_1$  — прямоугольник.  $KP = MN = 2\sqrt{2}$ . Найдём углы  $\triangle PQQ$ . Пусть ребро пирамиды равно  $a$ . Тогда  $SQ = CQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;

$OQ = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ;  $CO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Из  $\triangle SOQ$  по теореме Пифагора:

$$SO^2 = SQ^2 - OQ^2 = \frac{a^2 \cdot 3}{4} - \frac{a^2 \cdot 3}{36} = 3a^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{36} \right) = \frac{2}{3}a^2; \quad SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\sin \alpha = \frac{SO}{SQ} = \frac{a\sqrt{6} \cdot 2}{3 \cdot a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad \sin \beta = \frac{SO}{SC} = \frac{a\sqrt{6}}{3a} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad \text{Тогда по тео-}$$

реме синусов из  $\triangle P Q K$ :  $\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{KQ}{\frac{\sqrt{6}}{3}} \Rightarrow KQ = \sqrt{6}$ . А так как  $QP = QK$ ,

то и  $QP = \sqrt{6}$ .

3. Найдём радиус окружности, вписанной в  $\triangle P Q K$  по формуле  $r = \frac{S}{p}$ , где  $S$  — площадь  $\triangle P Q K$ ,  $p$  — его полупериметр.

$p = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ .  $S = \frac{1}{2} QK \cdot QP \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$ . Значит,

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \sqrt{3} - 1.$$

Ответ:  $\sqrt{3} - 1$ .

**1083.** Пусть  $D P P_1 D_1$  — сечение пирамиды плоскостью,  $N$  — середина  $BC$ . Условие  $BD > \frac{1}{2} BA$  позволяет однозначно определить взаимное расположение заданной плоскости и сферы.

План решения:

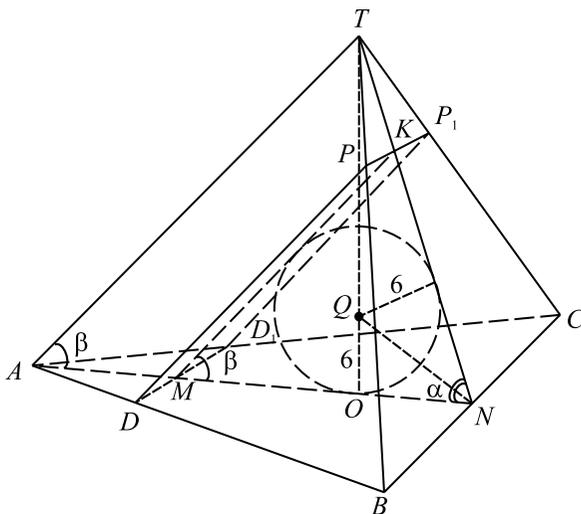


Рис. 357.

1. Докажем, что пирамида  $TABC$  есть правильный тетраэдр, то есть что все её рёбра равны.

2. Покажем, что  $KM = PD$ .

3. Найдём  $KM$  из треугольника  $ATN$ .

1. Так как  $BP = BD$  и  $DP \parallel AT$ , то  $AB = BT$ . А так как  $BT = AT$ , то  $\triangle ATB$  — правильный. Значит и вся пирамида — правильный тетраэдр.

2. Сечение  $DPP_1D_1$  — прямоугольник, точки  $K$  и  $M$  — середины его противоположных сторон. Значит  $KM = PD$ .

3. Рассмотрим  $\triangle ATN$ . Обозначим  $\angle ANT = \alpha$ ,  $\angle NKM = \beta$ . То-

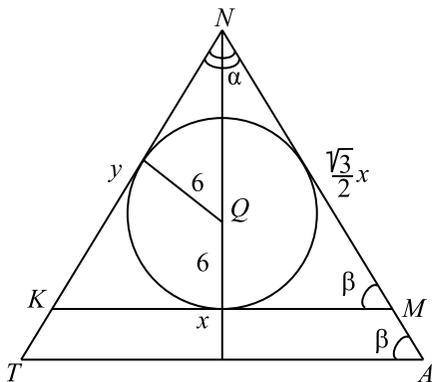


Рис. 358.

гда  $\angle ONQ = \frac{\alpha}{2}$ . Обозначим ребро пирамиды  $a$ . Тогда  $ON = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ;

$TN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .  $\cos \alpha = \frac{ON}{TN} = \frac{1}{3}$ .  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .  $\angle TAN =$   
 $= \angle KMN = \beta$ . Из  $\triangle OTN$ :

$$OT = \sqrt{TN^2 - ON^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \sin \beta = \frac{TO}{AT} = \frac{a\sqrt{6}}{3a} = \frac{\sqrt{6}}{3};$$

$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Обозначим  $NK = y$ ;  $KM = x$ . Тогда из  $\triangle KNM$

по теореме синусов  $\frac{y}{\sin \beta} = \frac{x}{\sin \alpha}$ ;  $\frac{y \cdot 3}{\sqrt{6}} = \frac{x \cdot 3}{2\sqrt{2}}$ . Значит  $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$  (см.

рис. 358). Воспользуемся формулой  $p \cdot r = S$ . Для  $\triangle KNM$

$$S = \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \sin \beta = \frac{\sqrt{3}x^2\sqrt{6}}{4 \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}x^2}{4}. p = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)x = \frac{x}{2}(\sqrt{3} + 1).$$

Имеем:  $\frac{x}{2}(\sqrt{3} + 1) \cdot 6 = \frac{\sqrt{2}x^2}{4}$ ;  $x = \frac{12}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1) = 6(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ .

Ответ:  $6(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ .

**1084.** Пусть  $r$  — радиус оснований конусов,  $h$  — высота конусов,  $\alpha$  — угол между образующей и плоскостью основания конуса,  $R$  — искомый радиус сферы.

На чертеже (см. рисунок 359):  $O$  — центр сферы,  $CG$  — образующая конуса,  $B_1$  — точка касания сферы и плоскости,  $E$  — точка касания сферы и конуса.

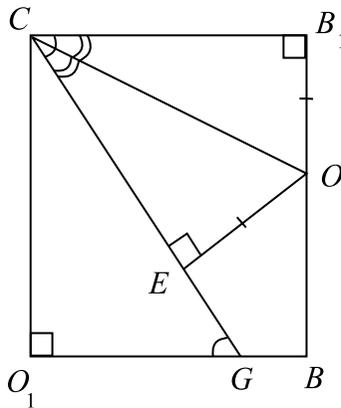


Рис. 359.

Тогда  $CO_1 = h$ ,  $O_1G = r$ ,  $OB_1 = R$ . Центры оснований конусов образуют правильный треугольник со стороной  $2r$ ,  $O_1B$  — радиус описанной вокруг этого треугольника окружности. Значит  $O_1B = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ .

Из  $\triangle COB_1 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{CB_1} \Rightarrow R = CB_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = O_1B \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2r\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

Из  $\triangle CO_1G \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r}$ , но  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ . Обозначая  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = x$ , полу-

чим  $\frac{2x}{1 - x^2} = \frac{h}{r}$ . Это уравнение имеет корни  $x_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + h^2}}{h}$ .

Так как  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , то  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0$ , значит  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{r^2 + h^2} - r}{h}$ .

$$\text{Итак, } R = \frac{2r\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2r\sqrt{3}}{3h} (\sqrt{r^2 + h^2} - r) = \sqrt{3}.$$

Ответ:  $\sqrt{3}$ .

**1085.** Пусть  $r$  — радиус оснований конусов,  $h$  — высота конусов,  $\alpha$  — угол между образующей и плоскостью основания конуса,  $R$  — радиус сферы.

На чертеже (см. рисунок 359):  $O$  — центр сферы,  $CG$  — образующая конуса,  $B_1$  — точка касания сферы и плоскости,  $E$  — точка касания сферы и конуса.

Тогда  $CO_1 = h$ ,  $O_1G = r$ ,  $OB_1 = R$ .

1. Из  $\triangle COB_1 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{B_1C}$ . Но  $B_1C = O_1B$ , где  $O_1B$  является радиусом окружности, описанной вокруг правильного треугольника со стороной  $2r$ , который образуют центры оснований конусов. Значит  $B_1C = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ .

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2r} \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{3}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

2. Из  $\triangle GCO_1 \Rightarrow r = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}$ . Получим уравнение  $\frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{R\sqrt{3}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ . Но

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{h \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{R\sqrt{3}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \text{ Так как } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ то}$$

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0$ . Положительный корень последнего уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{R}{h} \sqrt{3}}.$$



1087. Пусть сторона основания призмы равна  $a$ .

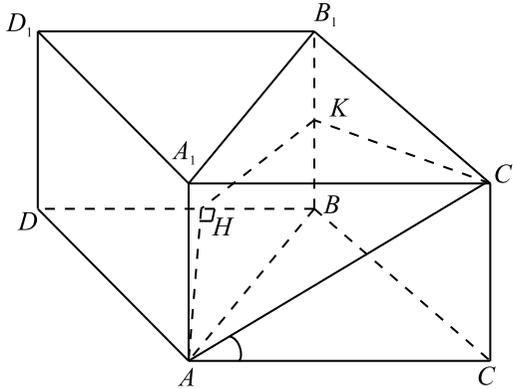


Рис. 361.

Тогда радиус описанной около  $\triangle A_1B_1C_1$  окружности равен  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Из

условия следует, что высота призмы равна радиусу, значит  $CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

Пусть искомый угол равен  $\alpha$ , тогда  $\angle C_1AC = \alpha$ . Докажем это. Построим к призме  $ABCA_1B_1C_1$  такую же призму так, чтобы она была симметрична относительно плоскости  $AA_1B_1B$  (см. рис. 361). Плоскость сечения пересечёт плоскость  $\triangle ABC$  по прямой  $AH$ , но  $\triangle AC_1C \sim \triangle BKH$  ( $KH \parallel AC_1$ ,  $AC \parallel BH$ ,  $CC_1 \parallel BK$ )  $\Rightarrow HB = \frac{1}{2}AC$ . Плоскость  $AC_1C$  перпендикулярна плоскости  $AA_1H$ , так как  $AC \perp AH$  и  $AC \perp AA_1$ , значит  $C_1A \perp AH$ , следовательно  $\angle C_1AC$  есть угол между плоскостью сечения и плоскостью  $\triangle ABC$ .  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1C}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{3a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$  (так как  $\alpha$  — острый угол).

Ответ:  $30$ .

1088. 1. Пусть  $SH$  — высота пирамиды,  $SM$  — апофема,  $K$  — центр вписанной окружности. Обозначим  $SH = H$ ,  $MH = a$ , тогда  $HC = a\sqrt{2}$  (см. рис. 362). Тогда  $HC^2 = SH(2R - SH)$ , где  $R$  — радиус описанной сферы,

$$2a^2 = H(2 - H), a = \sqrt{\frac{H \cdot (2 - H)}{2}}.$$

2.  $KH = r = \sqrt{2} - 1$  радиус вписанной сферы.  $MK$  — биссектриса. Тогда

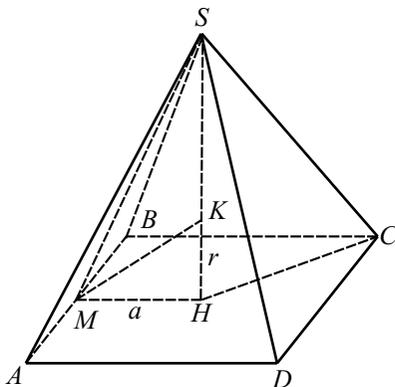


Рис. 362.

$$\frac{MH}{KH} = \frac{MS}{SK}, \quad \frac{a}{\sqrt{2}-1} = \frac{MS}{H-\sqrt{2}+1}; \quad MS = \sqrt{\frac{H^2+2H}{2}} \quad (\text{по теореме}$$

Пифагора для  $\triangle MSH$ ).

$$3. \quad \sqrt{\frac{H \cdot (2-H)}{2}} = \sqrt{\frac{H^2+2H}{2}}; \quad \frac{\sqrt{2H-H^2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{H^2+2H}}{H-\sqrt{2}+1};$$

$$\frac{\sqrt{2-H}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{H+2}}{H-(\sqrt{2}-1)}; \quad \frac{2-H}{3-2\sqrt{2}} = \frac{H+2}{H^2-2H(\sqrt{2}-1)+3-2\sqrt{2}};$$

$2H^2 - 4H(\sqrt{2}-1) + 6 - 4\sqrt{2} - H^3 + 2H^2(\sqrt{2}-1) - (3-2\sqrt{2})H =$   
 $= H(3-2\sqrt{2}) + 2(3-2\sqrt{2})$ . Разделив на  $H \neq 0$  и упростив, получим уравнение  $(H-\sqrt{2})^2 = 0$ ,  $H = \sqrt{2}$ .

$$4. \quad S_{\text{осн.}} = 4a^2 = 2H(2-H) = 2\sqrt{2}(2-\sqrt{2}).$$

$$5. \quad V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2}(2-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{3}(2-\sqrt{2}).$$

Ответ:  $\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})$ .

**1089.** 1) По условию задачи сделаем чертёж (см. рис. 364). Найдём радиус шара, вписанного в четвертинку конуса  $SABC$ . Нетрудно догадаться, что тот же шар будет вписан в пирамиду  $SAB'C'$ , здесь  $B'C'$  — отрезок в плоскости основания конуса, касательный к окружности основания в точке  $H$  — середине дуги  $BC$ , и образующий с прямыми  $AB$  и  $AC$  углы по  $45^\circ$ .

2) Найдём в пирамиде  $SAB'C'$  ребра  $SA$ ,  $AB'$ ,  $AC'$ ,  $B'C'$ ; площадь её полной поверхности  $S_{\text{пол}}$  и объём  $V$ . Так как  $\angle SHA = 60^\circ$ , то

$$SA = AH \operatorname{tg} 60^\circ = (\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{3} = 3 + \sqrt{6} \text{ и } SH = \frac{AH}{\cos 60^\circ} =$$

$= 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ . Так как  $\angle AB'C' = \angle AC'B' = \angle HAB' = \angle HAC' = 45^\circ$ , то  $AB' = AC' = AH\sqrt{2} = 2 + \sqrt{6}$ ,  $B'C' = 2AH = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ . Теперь

$$S_{\text{пол}} = S_{AB'C'} + S_{SAB'} + S_{SAC'} + S_{SB'C'} = \\ = \frac{1}{2} AB' \cdot AC' + \frac{1}{2} SA \cdot AB' + \frac{1}{2} SA \cdot AC' + \frac{1}{2} SH \cdot B'C' =$$

$$= (\sqrt{2} + \sqrt{3})(6\sqrt{2} + 5\sqrt{3}), V = \frac{1}{3} S_{AB'C'} \cdot SA = \frac{1}{3} (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 (3 + \sqrt{6}).$$

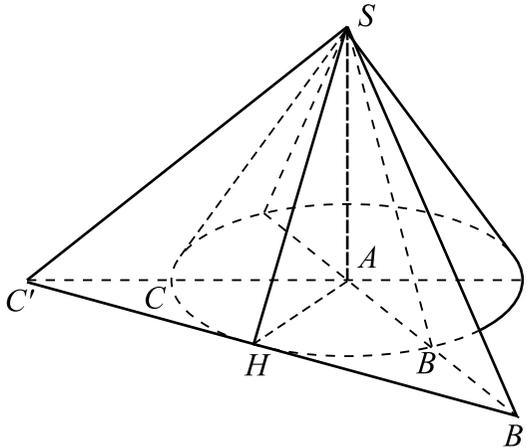


Рис. 363.

3) Радиус вписанного в пирамиду  $SAB'C'$  шара найдём по формуле:

$$r = \frac{3V}{S_{\text{пол}}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 (3 + \sqrt{6})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(6\sqrt{2} + 5\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{2} + 5\sqrt{3}}{6\sqrt{2} + 5\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

**1090.** а) Пусть  $A$  — центр окружности, лежащей в основании конуса (см. рис. 364).  $B'B$  и  $C'C$  — отрезки, образованные пересечением перпендикулярных плоскостей, проходящих через ось конуса с кругом, лежащим в его основании.  $H \in CB$  и  $\sphericalangle CH = \sphericalangle HB$ .  $C'B'$  — касательная к окружности, лежащей в основании конуса, проходящая через точку  $H$ .

$SAB'C'$  — пирамида, в основании которой лежит прямоугольный тре-

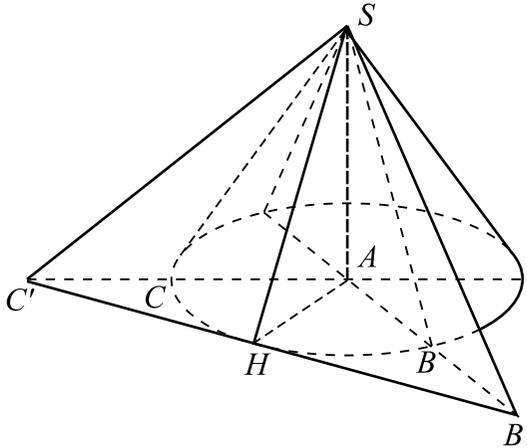


Рис. 364.

угольник  $C'AB'$ , образованный прямыми  $AC$ ,  $AB$  и  $C'B'$ . Тогда шар, вписанный в четвертинку конуса  $SABC$  вписан в пирамиду  $SAB'C'$ .

б) Пусть  $R$  — радиус конуса. Тогда  $AH = R$ ;  $SA = AH \cdot \operatorname{tg} \angle SHA = R \operatorname{tg} 60^\circ = R\sqrt{3}$ ;  $SH = \frac{AH}{\cos 60^\circ} = 2R$ . Так как  $\angle AB'C' = \angle AC'B' = \angle HAB' = \angle HAC' = 45^\circ$ , то  $AB' = AC' = AH\sqrt{2} = R\sqrt{2}$ ;  $B'C' = 2AH = 2R$ .

Выразим площадь поверхности пирамиды  $SAB'C'$ :

$$\begin{aligned} S_{\text{пол.}} &= S_{AB'C'} + S_{SAB'} + S_{SAC'} + S_{SB'C'} = \\ &= \frac{1}{2} AB' \cdot AC' + \frac{1}{2} SA \cdot AB' + \frac{1}{2} SA \cdot AC' + \frac{1}{2} SH \cdot B'C' = \\ &= \frac{1}{2} (2R^2 + R^2\sqrt{6} + R^2\sqrt{6} + 4R^2) = (3 + \sqrt{6})R^2. \end{aligned}$$

Объём пирамиды  $SAB'C'$  может быть выражен так:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{AB'C'} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^3\sqrt{3}}{3}.$$

С другой стороны,

$$V = \frac{1}{3} r S_{\text{пол.}},$$

где  $r$  — радиус вписанного в пирамиду шара.

$$V = \frac{1}{3} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{6}) R^2.$$

Приравняем найденные выражения объёма пирамиды.  $\frac{R^3\sqrt{3}}{3} =$

$$= \frac{1}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{6})R^2; R = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

**1091.** а)  $\angle ASD = 90^\circ$ , поэтому  $AD$  — гипотенуза. Точки  $A$  и  $D$  не могут принадлежать разным основаниям цилиндра ввиду того, что  $AD \parallel BC$ ,  $AD \neq BC$ . Поэтому  $A, S, D \in$  одной окружности одного основания (см. рис. 365). Действительно, точки  $A$  и  $D$  не могут принадлежать разным основаниям цилиндра ввиду того, что  $AD \parallel BC$ ,  $AD \neq BC$ . Далее пусть  $SS_1$  — высота в  $\triangle ASD$  (где  $S_1 \in AD$ ). Тогда  $SS_1 \leq \frac{AD}{2} \leq 2,5$ . Если  $S$  принадлежит окружности другого основания цилиндра, нежели  $A$  и  $D$ , то  $SS_1$  не меньше высоты цилиндра, то есть  $SS_1 \geq 3$ , что противоречит  $SS_1 \leq 2,5$ .

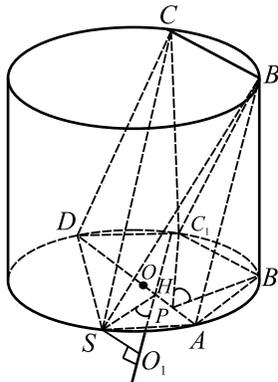


Рис. 365.

б)  $\angle SDC = 90^\circ$ ;  $SD \perp DC$ . По теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах,  $SD \perp DC$ ,  $\angle SDC_1 = 90^\circ$ , поэтому  $SC_1$  — диаметр. Таким образом, находим положение точек  $C$  и  $B$ .  $BC \parallel AD$  и  $SABCD$  — пирамида, следовательно точки  $B$  и  $C$  лежат на окружности другого основания цилиндра, нежели  $A, S$  и  $D$ .

в) Пусть  $B_1$  и  $C_1$  — проекции точек  $B$  и  $C$  соответственно на плоскость основания цилиндра, содержащего точки  $A, S$  и  $D$ ;  $O$  — центр основания,

содержащего точки  $A$ ,  $S$  и  $D$ ;  $M$  — середина  $B_1C_1$ ;  $B_1P$  — высота в  $\triangle OB_1A$  ( $P \in OA$ ). Значит,  $AD = 5$ ,  $BC = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$ .  $B_1M = 1,5$ ,  $B_1O = 2,5$ .  $MO = \sqrt{6,25 - 2,25} = 2$ .  $B_1P = MO = 2$  (см. рис. 366).

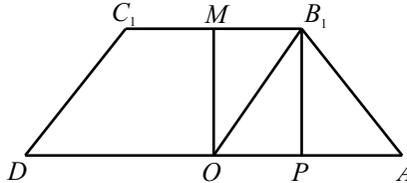


Рис. 366.

г)  $BP \perp AD$  по теореме о трёх перпендикулярах ( $BB_1 \perp ADB$ ,  $B_1P \perp AD$ ).  $BP = \sqrt{BB_1^2 + B_1P^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ .

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BP. S_{ABCD} = \frac{1}{2}(5 + 3)\sqrt{13} = 4\sqrt{13}.$$

д) Пусть  $SO_1$  — высота пирамиды  $SABCD$  ( $O_1 \in$  пл.  $ABC$ ),  $SH$  — высота в  $\triangle SAD$  ( $H \in AD$ ). Тогда  $O_1H \perp AD$  по теореме о трёх перпендикулярах.  $\angle BPB_1 = \angle SHO_1$  — линейные углы двугранного угла при ребре  $AD$ .  $\sin BPB_1 = \frac{3}{\sqrt{13}}$ .  $AS = DC_1 = \sqrt{5}$  ( $AB_1 = DC_1 =$

$$= \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}, \text{ так как } \angle C_1DS = \angle DSA = \angle OC_1A = 90^\circ).$$

$$SD = \sqrt{AD^2 - AS^2} = \sqrt{25 - 5} = \sqrt{20}. 2S_{ASD} = AS \cdot SD = 10;$$

$$2S_{ASD} = AD \cdot SH = 5SH \Rightarrow SH = 2. \text{ Из } \triangle SO_1H: SO = SH \cdot \sin \angle SHO,$$

$$SO_1 = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}. V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot SO_1;$$

Ответ: 8.

**1092.** Найдём синус двугранного угла при  $AS$  (см. рис. 367). Для этого рассмотрим правильный тетраэдр со стороной  $a$  (см. рис. 368). Искомый угол это  $\angle A_3B_1A_4$ .

$$\text{По теореме косинусов } A_3A_4^2 = A_3B_1^2 + A_4B_1^2 - 2A_3B_1 \cdot A_4B_1 \cdot \cos \alpha.$$

$$A_3B_1 = A_4B_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда } a^2 = \frac{3a^2}{2} - \frac{3a^2}{2} \cos \alpha, \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

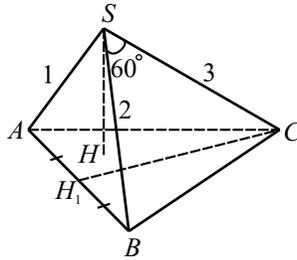


Рис. 367.

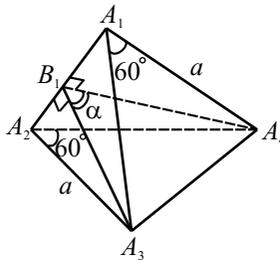


Рис. 368.

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ . Теперь найдём высоту из точки  $C$  на  $ASB$ , она равна  $CM \cdot \sin \alpha$ , но  $CM = 1,5\sqrt{3}$  (из  $\triangle CSM$ ) (см. рис. 369), значит  $CM \sin \alpha = \sqrt{6}$ .  $S_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot SB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , значит

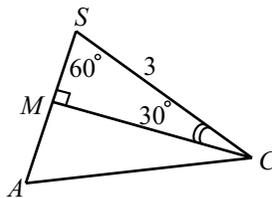


Рис. 369.

$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Применяя теорему косинусов для каждого из треугольников  $\triangle ASB$ ,  $\triangle ASC$ ,  $\triangle BSC$ , получим  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AC = \sqrt{7}$ ,  $BC = \sqrt{7}$ .  $CH_1 = \sqrt{AC^2 - AH_1^2} = 2,5$ .  $S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} AB \cdot CH_1 = \frac{2,5\sqrt{3}}{2}$ ,

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{\triangle ACB}; SH = \frac{3V_{SABC}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Найдём радиус основания цилиндра (он равен радиусу описанной окружности  $\triangle ABC$ ).  $S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot BC}{4R}$ ;  $R = \frac{7\sqrt{3} \cdot 2}{2,5\sqrt{3} \cdot 4} = \frac{7}{5}$ .

$$S_{\text{осн. цил.}} = \pi \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49\pi}{25},$$

$$V_{\text{цил.}} = S_{\text{осн. цил.}} \cdot SH = \frac{49\pi}{25} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{98\pi\sqrt{6}}{125}.$$

Ответ:  $\frac{98\pi\sqrt{6}}{125}$ .

**1093.**  $V_{\text{призмы}} = S_{\triangle ABS} \cdot H$ , где  $H = CO$  — высота пирамиды  $CABS$  (см. рис. 370). Так как по теореме, обратной теореме Пифагора,

$\angle BAS = 90^\circ$ , то  $S_{\triangle ABS} = \frac{AB \cdot AS}{2} = 6$ .

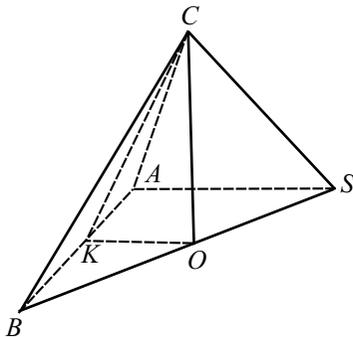


Рис. 370.

Так как боковые рёбра пирамиды  $CABS$  равны между собой, то  $O$  — центр описанной около  $\triangle ABS$  окружности. А так как этот треугольник прямоугольный, то  $O$  — центр гипотенузы  $BS$ . Проведём  $CK \perp AB$ . Тогда по теореме о трёх перпендикулярах  $OK \perp AB$ . Значит  $OK$  — средняя линия  $\triangle ABS$ , поэтому  $OK = \frac{AS}{2} = 2$ . Так как, по условию,  $\triangle ABC$  — равносторонний, то его высота  $CK = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

Из прямоугольного  $\triangle CKO$  получим  $OC = H = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$ .

Поэтому  $V_{\text{призмы}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = 3\sqrt{11}$ .

Ответ:  $3\sqrt{11}$ .

**1094.** По условию задачи сделаем чертёж (см. рис. 371).

Дано:  $S_{\text{бок. цил.}} = 16\pi\sqrt{3}$ ;  $d = 2\sqrt{3}$ .

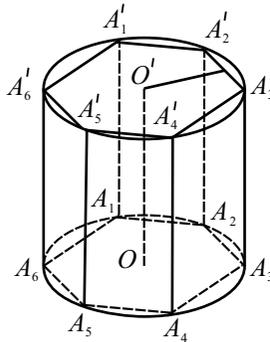


Рис. 371.

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

По формуле  $S_{\text{бок. цил.}} = 2\pi RH = 16\pi\sqrt{3}$ . Отсюда  $RH = 8\sqrt{3}$ . Расстояние  $d = 2\sqrt{3}$  есть расстояние между осью цилиндра и плоскостью боковой грани призмы (так как  $OO_1 \parallel A_2A_3A'_3A'_2$ ). А это есть радиус вписанного в шестиугольник круга:  $d = r = \frac{R\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ . Отсюда  $R = 4$ . Сторона основания правильной шестиугольной призмы  $A_2A_3 = R = 4$ . Высоту призмы  $H$  найдём из равенства  $RH = 8\sqrt{3}$ ;  $H = 2\sqrt{3}$ .

$S_{\text{осн.}} = 6S_{\triangle OA_2A_3} = 6 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$ .

$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн.}} \cdot H = 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 144$ .

Ответ: 144.

**1095.** Обозначим через  $SABC$  правильную треугольную пирамиду. Треугольник  $ABC$  (основание исходной пирамиды) — правильный. Точка  $O$  — его центр. Прямая  $AM$  (проходящая через  $O$ ) — и медиана, и высота треугольника  $ABC$ . Треугольник  $CSB$  (боковая грань пирамиды) — равнобедренный.  $SM$  — его высота (по теореме о трёх перпендикуля-

рах). Пирамида  $ONLKQ$  — правильная (по условию). Значит, в основании её лежит квадрат  $NLKQ$ , который вписан в  $\triangle CSB$  (по условию). Это возможно, так как  $\triangle CSB$  — равнобедренный. При этом  $BQ = CN$ ;  $NM = MQ$ . Высота  $OP$  этой пирамиды попадает в центр квадрата, и, значит, она перпендикулярна всей плоскости  $CSB$ . Угол между основанием и боковой гранью пирамиды (любой) есть угол  $OMS$ .

Пусть  $\angle OMS = \alpha$ . Итак, ищем угол  $\alpha$  (см. рис. 372).

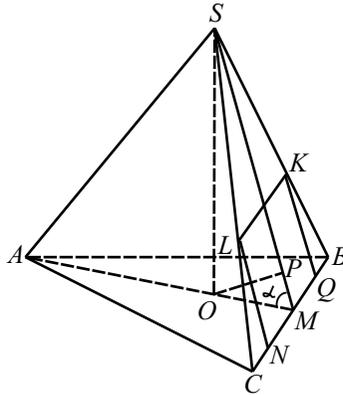


Рис. 372.

Обозначим  $AB = AC = BC = 2a$ , а сторону квадрата  $NL = LK = KQ = NQ = x$ . Тогда  $OM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$  как радиус вписанной окружности в  $\triangle ABC$ .  $MB = a$ ,  $QB = a - \frac{x}{2}$ .  $\triangle KQB \sim \triangle SMB \Rightarrow \frac{SM}{KQ} = \frac{BM}{BQ}$ ;  $\frac{SM}{x} = \frac{2a}{2a-x}$ ;  $SM = \frac{2ax}{2a-x}$ .  $OP \perp SM$ ;  
 $\triangle OPM \sim \triangle SOM \Rightarrow \frac{SM}{OM} = \frac{OM}{PM}$ ;  $\frac{3 \cdot SM}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2}{3 \cdot x}$ ;  $SM = \frac{2a^2}{3x}$ .  
 Значит,  $\frac{2ax}{2a-x} = \frac{2a^2}{3 \cdot x}$ ;  $3x^2 + ax - 2a^2 = 0$ . Решив это уравнение как квадратное относительно  $x$ , получим  $x = \frac{2a}{3}$  или  $\frac{x}{2} = \frac{a}{3}$ . Из  $\triangle OPM$ :

$$\cos \alpha = \frac{PM}{OM} = \frac{a \cdot 3}{3a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ И так, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}; \alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**1096.** Из треугольника  $ADM$  находим  $AM = 8 \sin \frac{60}{2}$ . Из треугольника

$$AMO \text{ находим } r = OM = AM \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 8 \sin \frac{60}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$R = AO = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = \frac{28 \sin \frac{60}{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Из треугольника } AOD \text{ находим } OD = H = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{60}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Объём  $V$  конуса равен

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{64 \sin^2 \frac{60}{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{60}{2}} = \frac{128\sqrt{2}\pi}{9\sqrt{3}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{128\sqrt{2}\pi}{9\sqrt{3}}$$

**1097.** 1. Объём пирамиды  $SABFC$  вычислим по формуле

$V = \frac{1}{3} S_{ABFC} \cdot SO$ . Так как  $S_{ABFC} = S_{ABC} + S_{CBF}$  и по условию задачи  $SO$ ,  $BC$  и  $S_{ABC}$  — постоянные величины, то наибольший объём пирамиды будет при наибольшей площади  $\triangle BCF$ .  $S_{BCF} = \frac{1}{2} BC \cdot FE$ , где  $FE$  — высота треугольника  $BCF$ , то есть расстояние от точки  $F$  дуги  $BC$  окружности до стягивающей её хорды. Это расстояние наибольшее, если точка  $F$  — середина дуги  $BC$  (см. рис 373).

2. Пусть  $\rho_F$  и  $\rho_O$  — расстояния от точек  $F$  и  $O$  до плоскости  $\alpha = ASB$  соответственно (см. рис. 374).

Так как  $\rho_F : \rho_O = FA : OA$ , то  $\rho_F = 2 \cdot \rho_O$ .

3. Проведём  $OK \perp AB$ , тогда  $SK \perp AB$  по теореме о трёх перпендикулярах, отсюда  $AB \perp SOK$ . Проведём  $OL \perp SK$ , а так как  $AB \perp SOK$ , то  $OL \perp AB$ , значит,  $OL \perp ASB$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Следовательно,  $OL$  — расстояние от точки  $O$  до плоскости  $ASB$ , то есть  $OL = \rho_O$ .

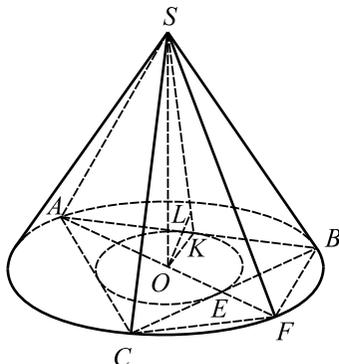


Рис. 373.

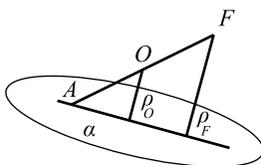


Рис. 374.

4. По условию пирамида  $SABC$  — правильная  $\Rightarrow \triangle ABC$  — равносторонний,  $OK$  и  $OA$  — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно  $\Rightarrow OK = \frac{1}{2}OA = 8$ .

В прямоугольном треугольнике  $OLK$   $OL = \frac{1}{2}OK$  как катет, лежащий против угла в  $30^\circ$ , поэтому  $OL = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ ,  $\rho_0 = 4$ ,  $\rho_F = 2 \cdot 4 = 8$ .

*Ответ:* 8.

**1098.** 1. Пусть  $H$  — высота пирамиды  $SA_1A_2 \dots A_n$ , опущенная из вершины  $S$ . Тогда её объём  $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H \leq \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot R$ , где  $R$  — радиус сферы,  $S_{\text{осн}} = S_{A_1A_2 \dots A_n}$  — площадь основания пирамиды (см. рис. 375). Значит, объём пирамиды наибольший тогда и только тогда, когда  $H = R = SO$  и  $S_{\text{осн}}$  является наибольшей.

2. Докажем теперь, что если площадь основания  $S_{\text{осн}}$  наибольшая, то многоугольник  $A_1A_2 \dots A_n$  является правильным.

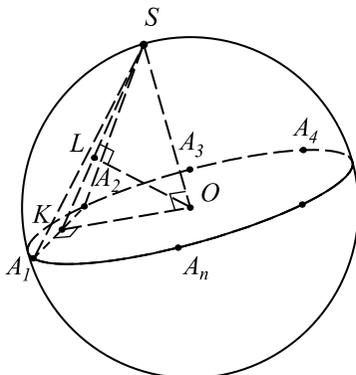


Рис. 375.

Предположим, что это не так, то есть  $S_{\text{осн}}$  наибольшая, но многоугольник  $A_1A_2 \dots A_n$  не является правильным. Тогда, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что  $A_1A_2 \neq A_2A_3$ .

Пусть  $M$  такая точка, лежащая на описанной окружности многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$ , что  $A_1M = MA_3$ , а точка  $N$  такая, что  $ON \parallel A_1A_3$  и  $A_2N \parallel MO$  (см. рис. 376). Тогда  $NPQO$  — прямоугольник, так как  $\triangle A_1OA_3$  равнобедренный и  $OQ$  его биссектриса и, следовательно, высота. Тогда  $A_2N < A_2O$ , так как катет в  $\triangle A_2NO$  меньше гипотенузы. Но  $A_2O = MO = R$ , тогда  $A_2N < MO$ ;  $A_2P + PN < MQ + QO$ ;  $A_2P < MQ$ , так как  $PN = QO$ . В этом случае  $\frac{1}{2} \cdot A_1A_3 \cdot A_2P < \frac{1}{2} \cdot A_1A_3 \cdot MQ$ , то есть  $S_{A_1A_2A_3} < S_{A_1MA_3}$ ;  $S_{\text{осн}} < S_{A_1MA_3 \dots A_n}$ . Но это противоречит предположению о том, что  $S_{\text{осн}}$  наибольшая.

Значит,  $A_1A_2 \dots A_n$  — правильный многоугольник.

3. Построим  $OK \perp A_1A_2$  и  $OL \perp SK$ . Так как  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SA_1A_2 \dots A_n$ , то  $SO \perp A_1A_2A_3$ . Значит,  $A_1A_2 \perp SO$ . Следовательно,  $A_1A_2 \perp SKO$ , то есть  $OL \perp A_1A_2$ . Кроме того,  $OL \perp SK$  по построению. Поэтому  $OL \perp SA_1A_2$ , то есть  $OL$  — искомое расстояние от точки  $O$  до плоскости  $SA_1A_2$ .

4. Так как  $OK$  — радиус вписанной окружности правильного  $n$ -угольника, то  $OK = R \cos \frac{\pi}{n}$ . По свойству высоты прямоугольного треугольника, проведённой из вершины прямого угла, имеем:

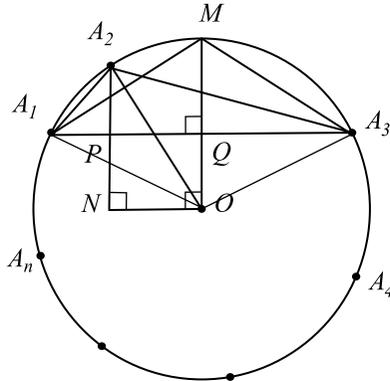


Рис. 376.

$$OL = \frac{SO \cdot OK}{SK} = \frac{R \cdot R \cos \frac{\pi}{n}}{\sqrt{R^2 + R^2 \cos^2 \frac{\pi}{n}}} = \frac{R \cos \frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 + \cos^2 \frac{\pi}{n}}}. \text{ Так как } R = 1 \text{ по}$$

$$\text{условию, то } OL = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 + \cos^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 + \cos^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

**1099.** Обозначим для удобства сторону основания пирамиды  $2\sqrt{3}a$ . Тогда  $AO = 2a$ ;  $OD = a$  (см. рис. 377).

Для того, чтобы куб можно было вписать, как сказано в условии, в пирамиду, нужно, чтобы у неё все плоские углы при вершине  $S$  равнялись  $90^\circ$ , диагональ куба  $SN_1$  совпадала с высотой пирамиды  $SO$  и вершины куба  $NM_1K$  лежали на апофемах соответствующих боковых граней. Обозначим ребро куба  $x$ . Тогда диагональ куба равна  $\sqrt{3}x$ . Апофема  $SD$  из  $\triangle OSD$  равна  $\sqrt{a^2 + 3x^2}$ . Но так как углы  $\angle BSD = \angle DBS = 45^\circ$ , то  $\triangle SBD$  равнобедренный и  $SD = DB = \sqrt{3}a$ .

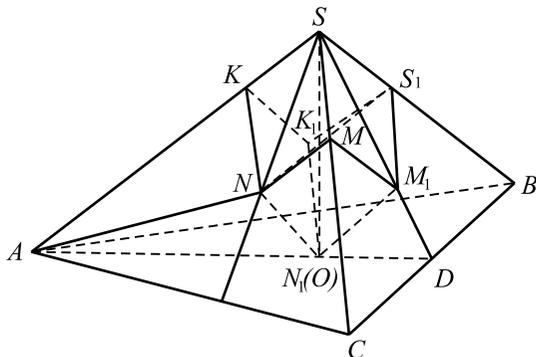


Рис. 377.

Получим:  $a^2 + 3x^2 = 3a^2$ ;  $x = \sqrt{\frac{2}{3}}a$ . Найдём  $\cos \angle NAS_1$ .

1) Ищем сторону  $AS_1$ . Рассмотрим  $\triangle AS_1N$ . Ребро пирамиды  $SA^2 = 4a^2 + 3x^2 = 4a^2 + 3 \cdot \frac{2}{3}a^2 = 6a^2$ . Значит,  $SA = \sqrt{6}a$ . Из прямоугольного  $\triangle ASS_1$  по теореме Пифагора:

$AS_1^2 = 6a^2 + x^2 = \frac{20}{3}a^2$ .  $AS_1 = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}a$ . Найдём сторону  $NS_1$  как диагональ куба:  $NS_1 = \sqrt{3}x = \sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}}a = \sqrt{2}a$ .

2) Найдём  $AN$ .  $AN^2 = AK^2 + KN^2 = (AS - SK)^2 + KN^2 = (\sqrt{6}a - x)^2 + x^2 = \frac{8}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2 = \frac{10}{3}a^2$ .  $AN = a\sqrt{\frac{10}{3}}$ .

3) Теперь в  $\triangle AS_1N$  все стороны известны и мы можем применить для нахождения  $\cos \angle NAS_1$  теорему косинусов:

$S_1N^2 = AS_1^2 + AN^2 - 2 \cdot AS_1 \cdot AN \cdot \cos \angle NAS_1$ . Имеем:

$$2a^2 = \frac{4 \cdot 5}{3}a^2 + \frac{10}{3}a^2 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}a \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}a \cdot \cos \angle NAS_1.$$

$$\text{Отсюда } \cos \angle NAS_1 = \frac{24}{3} \cdot \frac{3}{20\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

Ответ:  $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ .

**1100.** Построим общую часть куба и правильной треугольной призмы. Проекцией куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали, является правильный шестиугольник, поэтому если одно из рёбер правильной треугольной призмы совпадает с диагональю куба, то два других боковых ребра призмы проходят через середины  $M$  и  $N$  рёбер  $A_1D_1$  и  $C_1D_1$  куба (см. рис. 378).

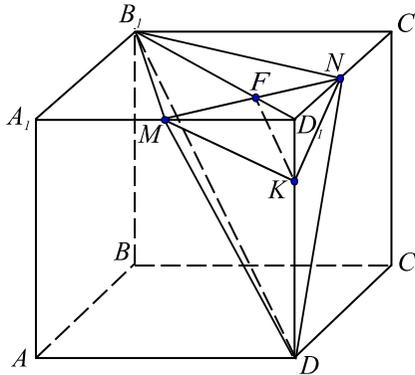


Рис. 378.

Боковая грань правильной треугольной призмы, параллельная диагонали куба, пересекает ребро куба  $DD_1$  в точке  $K$ , причём так, что  $FK \parallel B_1D$ , где  $F$  — точка пересечения  $B_1D_1$  и  $MN$ . Поэтому общей частью куба и призмы является шестигранник с вершинами  $DB_1MNK$ . Объём общей части можно представить в виде разности объёмов  $V_1$  и  $V_2$  пирамид  $DMB_1ND_1$  и  $KMND_1$ .

Найдём объём этих пирамид:

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{MB_1ND_1} \cdot DD_1, S_{MB_1ND_1} = \frac{1}{2}, DD_1 = 1, \text{ поэтому } V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

$$V_2 = \frac{1}{3} S_{MND_1} \cdot KD_1, S_{MND_1} = \frac{1}{8}, KD_1 = \frac{1}{4} \text{ (так как } FK \parallel B_1D),$$

$$\text{поэтому } V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{96}.$$

$$\text{Найдём теперь объём общей части } V = V_1 - V_2, V = \frac{1}{6} - \frac{1}{96} = \frac{5}{32}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{32}.$$