Диагностическая работа № 5 С1

Решите неравенство: $\begin{cases} 2^y + 2\sin x = 0 \\ tgx + 1 = \dfrac{1}{cos^2 x} \end{cases}$

Заметим, что первое уравнение системы может иметь решения только при $\sin x < 0$.
Разберемся со вторым уравнением.

$$tgx + 1 = \frac{1}{cos^2 x}$$

$$tgx + 1 = tg^2 x + 1$$

$$tg^2 x - tgx = 0 \quad \rightarrow \quad tgx = 0;1 \quad \rightarrow \quad x = \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi k;\ n,k \in Z$$

С учетом условия $\sin x < 0$ получаем:

$$x = \pi n;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi k;\ n,k \in Z$$

Тогда первое уравнение при $x = \pi n;\quad n \in Z$ имеет вид $2^y = 0$ - решений нет.

При $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in Z \quad 2^y - \sqrt{2} = 0; \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{1}{2};$

Ответ: $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in Z \quad y = \dfrac{1}{2};$

Диагностическая работа № 6 С1

Решите неравенство: $\begin{cases} 4^{\sin y} - 5 \cdot 2^{\sin y} + 4 = 0 \\ \sqrt{x} + 5\cos y + 1 = 0 \end{cases}$

Решим первое уравнение, приняв $2^{\sin y} = t > 0$

$t^2 - 5t + 4 = 0; \quad \rightarrow \quad t = 1;4 \quad \rightarrow \quad \sin y = 0;\ \sin y = 2 > 1 - \text{не подходит}$

Итого $\sin y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pi n, n \in Z;$

Заметим, что второе уравнение может иметь решения только при $\cos y < 0$.

Тогда $y = \pi + 2\pi n, n \in Z; \quad \Rightarrow \quad \cos y = -1;$

Второе уравнение: $\sqrt{x} - 5 + 1 = 0; \quad \rightarrow \quad x = 16;$

Ответ: $x = 16; \quad y = \pi + 2\pi n, n \in Z;$

Диагностическая работа № 7 С1

Решите неравенство: $\begin{cases} 4\cos^2 x - 12\cos x + 5 = 0 \\ \sqrt{y^2 - 4y + 16} + 4\sin x = 0 \end{cases}$

Заметим, что второе уравнение может иметь корни только при $\sin x \le 0$
Решим первое уравнение, приняв $\cos x = t$.

$$4t^2 - 12t + 5 = 0 \quad \to \quad t = \frac{1}{2}; \frac{5}{2} > 1 - не\ подходит$$

$$\cos x = \frac{1}{2}; \quad \to \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

С учетом условия $\sin x \le 0$ получим $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \quad \to \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

Решаем второе уравнение:

$$\sqrt{y^2 - 4y + 16} = 2\sqrt{3}$$

$$y^2 - 4y + 16 = 12;$$

$$y^2 - 4y + 4 = 0 \quad \to \quad y = 2;$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \quad y = 2;$

Диагностическая работа № 8 С1

Решите неравенство: $\begin{cases} \sqrt{y + \cos^2 x - 2} = \cos x \\ y\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \end{cases}$

Заметим, что первое уравнение может иметь корни только при $\cos x \ge 0$
Разберемся с первым уравнением.

$$\sqrt{y + \cos^2 x - 2} = \cos x$$

$$y + \cos^2 x - 2 = \cos^2 x$$

$$y - 2 = 0 \quad \to \quad y = 2;$$

Теперь решим второе уравнение, приняв $\sin x = t$.

$$2t^2 - t - 1 = 0 \quad \to \quad t = 1; -\frac{1}{2}; \quad \to \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ n, k \in Z$$

Вспомним про условие $\cos x \ge 0$ и получим $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ n, k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ y = 2; \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ y = 2; \quad n, k \in Z$

Диагностическая работа № 9 С1

Решите неравенство: $\begin{cases} 4^y - 10 \cdot 2^y + 16 = 0 \\ \cos x = \sqrt{y-2} \end{cases}$

Решим первое уравнение, приняв $2^y = t > 0$.
$t^2 - 10t + 16 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 8;2 \quad \rightarrow \quad y = 3;1$

Теперь решим второе уравнение:
При $y = 3 \quad \cos x = 1; \quad \rightarrow \quad x = 2\pi n, n \in Z$
При $y = 1$ - решений нет.

Ответ: $x = 2\pi n, n \in Z; \quad y = 3;$

http://alexlarin.narod.ru

Диагностическая работа №5 С3

Решить неравенство: $\dfrac{\log_3 x}{\log_3(3x+2)} < 1$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3x+2 > 0 \\ \log_3(3x+2) \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -\dfrac{2}{3} \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \quad x > 0$$

Теперь само неравенство:
Заметим, что при $x > 0 \quad 3x+2 > 2 \quad \log_3(3x+2) > 0$, тогда получаем

$\log_3 x < \log_3(3x+2)$

$x < 3x+2$

$2x > -2$

$x > -1$

С учетом ограничений получаем $x > 0$

Ответ: $x > 0$

http://alexlarin.narod.ru

Диагностическая работа №6 С3

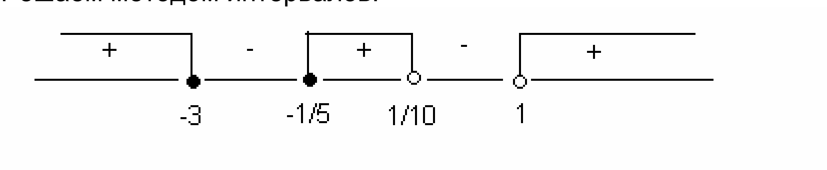
Решите неравенство: $\dfrac{(\log_3(10x+3))(\log_3(3x+10))}{(\log_3 10x)\log_3 x} \ge 0$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} 10x+3>0 \\ 3x+10>0 \\ 10x>0 \\ x>0 \\ \log_3 x \ne 0 \\ \log_3 10x \ne 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{3}{10} \\ x>-\dfrac{10}{3} \\ x>0 \\ x\ne 1 \\ x\ne \dfrac{1}{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ne 1 \\ x\ne \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Теперь само неравенство:

Решаем методом интервалов:



С учетом ограничений получаем: $\left(0;\dfrac{1}{10}\right)\cup(1;\infty)$

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{10}\right)\cup(1;\infty)$

http://alexlarin.narod.ru

Диагностическая работа №7 С3

Решите неравенство: $\log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\log_{x+2}(36+16x-x^2)$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x-18\ne 0 \\ x+2>0 \\ x+2\ne 1 \\ 36+16x-x^2>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\ne 18 \\ x>-2 \\ x\ne -1 \\ -2<x<18 \end{cases} \rightarrow \quad x\in(-2;-1)\cup(-1;18)$$

Теперь само неравенство:

$$4\log^2_{x+2}(18-x)+32\le 16\log_{x+2}(18-x)+16\log_{x+2}(x+2)$$
$$\log^2_{x+2}(18-x)-4\log_{x+2}(18-x)+4\le 0$$
$$\left(\log_{x+2}(18-x)-2\right)^2\le 0$$
$$\log_{x+2}(18-x)=2$$
$$18-x=x^2+4x+4$$
$$x^2+5x-14=0$$
$$x=-7;2$$

С учетом ограничений $x=2$

Ответ: $x=2$

Диагностическая работа №8 С3

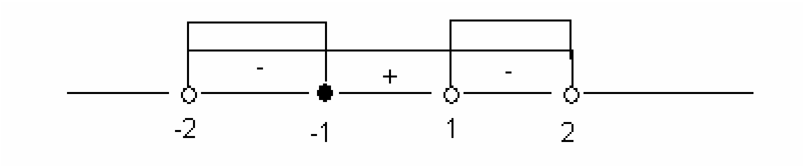
Решите неравенство: $log_{2-x}(x+2)\cdot log_{x+3}(3-x)\le 0$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ 2-x>0 \\ 2-x\ne 1 \\ 3-x>0 \\ x+3>0 \\ x+3\ne 1 \end{cases} \to \begin{cases} x>-2 \\ x<2 \\ x<3 \\ x>-3 \\ x\ne 1 \\ x\ne -2 \end{cases} \to \begin{cases} -2<x<2 \\ x\ne 1 \end{cases}$$

Преобразуем неравенство к виду:

$\dfrac{lg(x+2)lg(3-x)}{lg(2-x)lg(x+3)}\le 0$ и решим методом интервалов с учетом ограничений



Ответ: $x\in(-2;-1]\cup(1;2)$

http://alexlarin.narod.ru

Диагностическая работа №9 С3

Решите неравенство: $log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq log_{2x^2-5x+3}(3-x)$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} 3-x>0 \\ 12x^2-41x+35>0 \\ 12x^2-41x+35 \neq 1 \\ 2x^2-5x+3>0 \\ 2x^2-5x+3 \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<3 \\ x>\frac{7}{4}, x<\frac{5}{3} \\ x \neq 2, x \neq \frac{17}{12} \\ x<1, x>\frac{3}{2} \\ x \neq 2, x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};1\right) \cup \left(\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4};2\right) \cup (2;3)$$

Теперь само неравенство:

$$log_{(4x-7)(3x-5)}(3-x) \geq log_{(2x-3)(x-1)}(3-x)$$

$$\frac{1}{log_{3-x}(4x-7)(3x-5)} \geq \frac{1}{log_{3-x}(2x-3)(x-1)}$$

Рассмотрим промежутки поочереди.

1) При $x \in (2;3)$ оба логарифма в знаменателях отрицательны и $3-x<1$, значит

$$log_{3-x}(4x-7)(3x-5) \leq log_{3-x}(2x-3)(x-1)$$

$$12x^2-41x+35 \geq 2x^2-5x+3$$

$$10x^2-36x+32 \geq 0$$

$$x>2; \quad x \leq \frac{8}{5}$$

$$x \in (2;3)$$

2) При $\frac{7}{4}<x<2$ логарифмы отрицательны и $3-x>1$, значит

$$log_{3-x}(4x-7)(3x-5) \leq log_{3-x}(2x-3)(x-1)$$

$$12x^2-41x+35 \leq 2x^2-5x+3$$

$$10x^2-36x+32 \leq 0$$

$$\frac{8}{5} \leq x < 2$$

Т.е. этот участок целиком удовлетворяет неравенству.

3) При $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{3}$ логарифмы отрицательны и $3-x>1$, значит

$$\frac{8}{5} \leq x < 2$$

Получаем решение $\frac{8}{5} \leq x < \frac{5}{3}$

4) При $\frac{1}{2}<x<1$

$log_{3-x}(4x-7)(3x-5)>0, \quad log_{3-x}(2x-3)(x-1)<0$

Т.е. неравенство выполняется.

5) При $x<\frac{1}{2}$ оба логарифма положительные, т.е. $\frac{8}{5}\le x<2$ - противоречие.

Окончательно: $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{4};2\right)\cup(2;3)$

http://alexlarin.narod.ru

Диагностическая работа №5 С5

Найдите все значения параметра *а*, при каждом их которых уравнение

$$x^2-(|a+5|-|a-5|)x+(a-12)(a+12)=0$$

Имеет два различных отрицательных корня.

Наличие двух различных корней определяется условием

$$D=(|a+5|-|a-5|)^2-4(a^2-144)>0$$

1) То, что корни отрицательные, определяется по теореме Виета:

$$\begin{cases} a^2-144>0 \\ |a+5|-|a-5|<0 \end{cases} \quad \begin{cases} a>12,\ a<-12 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+5-a+5<0 \\ a\ge 5 \end{cases} \\ \begin{cases} a+5+a-5<0 \\ -5\le a<5 \end{cases} \\ \begin{cases} -a-5+a-5<0 \\ a<-5 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} a>12,\ a<-12 \\ \left[\begin{array}{l} -5\le a<0 \\ a<-5 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} a>12,\ a<-12 \\ a<0 \end{cases} \quad a<-12$$

2) Теперь дискриминант:

$$D=a^2+10a+25-2|a^2-25|+a^2-10a+25-4a^2+576>0$$

$$\text{с учетом } a<-12:$$

$$-2a^2+50-2a^2+50+576>0$$

$$-4a^2+676>0$$

$$a^2-169<0$$

$$-13<a<13$$

Окончательно получаем: $-13<a<-12$.

http://alexlarin.narod.ru

Диагностическая работа №6 С5

Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение
$|1-ax| = 1+(1-2a)x+ax^2$ имеет единственный корень.

1) $ax^2 - 2ax + x + 1 = 1 - ax$ при $1 - ax \ge 0$

$ax^2 - ax + x = 0$

$x(ax - a + 1) = 0$

$x = 0 \quad x = \dfrac{a-1}{a}$

Видим, что корень $x = 0$ вообще не зависит от параметра, а значит, других корней быть не должно для выполнения условия задачи.
Корень будет единственным, если $a = 0$ (второй корень не существует), $a = 1$ (второй корень совпадает с первым), $1 - a \cdot \dfrac{a-1}{a} = 2 - a < 0; \quad a > 2$ (второй корень не удовлетворяет условию раскрытия модуля).

2) $ax^2 - 2ax + x + 1 = -1 + ax$ при $1 - ax < 0$

$ax^2 - (3a-1)x + 2 = 0$

Рассматривать будем только те случаи, которые удовлетворяют условиям, полученным в п.1, т.е.
при $a = 0$ не выполняется условие $1 - ax < 0$

при $a = 1 \;\; x > 1 \quad x^2 - 2x + 2 = 0$ нет корней

при $a > 2 \quad D = (3a-1)^2 - 8a = 9a^2 - 14a + 1 > 36 - 28 + 1 = 9$, т.е. уравнение будет иметь два корня. (При $a > 2$ дискриминант будет монотонно возрастать)

Больший из корней $\dfrac{3a - 1 + \sqrt{D}}{2a}$.

Рассмотрим условие $1 - ax < 0$

$$1 - \frac{3a - 1 + \sqrt{D}}{2} < 0$$

$$2 - 3a + 1 - \sqrt{D} < 0$$

$$\sqrt{D} > 3 - 3a$$

Очевидно, что при $a > 2$ это условие выполнится, т.е. по крайней мере еще один корень будет.

Значит, условию задачи удовлетворяет только условие $x = 0; \quad x = 1.$

aalleexx

Диагностическая работа №7 С5

Найдите наибольшее значение параметра *b*, при котором неравенство

$\sqrt{b^5}(8x-x^2-16)+\dfrac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}\ge -\dfrac{2}{3}b|\cos\pi x|$ имеет хотя бы одно решение.

Очевидно, что $b\ge 0$

$$0\le|\cos\pi x|\le 1$$

$$0\le\frac{2}{3}|\cos\pi x|\le\frac{2}{3}$$

$$\sqrt{b^5}(8x-x^2-16)+\frac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}=-(x-4)^2b^2\sqrt{b}-\frac{\sqrt{b}}{(x-4)^2}=\frac{-\sqrt{b}(b^2(x-4)^4+1)}{(x-4)^2}\le 0$$

$$\frac{-\sqrt{b}(b^2(x-4)^4+1)}{(x-4)^2}\ge-\frac{2}{3}b|\cos\pi x|$$

$$\frac{(b^2(x-4)^4+1)}{\sqrt{b}(x-4)^2}\le\frac{2}{3}|\cos\pi x|$$

Это неравенство будет иметь хотя бы одно решение, если $f(x)_{наим}\le\dfrac{2}{3}$, где

$$f(x)=\frac{(b^2(x-4)^4+1)}{\sqrt{b}(x-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{b^2 4(x-4)^3\sqrt{b}(x-4)^2-2\sqrt{b}(x-4)b^2(x-4)^4-2\sqrt{b}(x-4)}{\sqrt{b}(x-4)^4}=$$

$$=\frac{2\sqrt{b}(x-4)(b^2(x-4)^4-1)}{\sqrt{b}(x-4)^4}=\frac{2(b^2(x-4)^4-1)}{(x-4)^3}=\frac{2(b(x-4)^2+1)(b(x-4)^2-1)}{(x-4)^3}$$

Наименьшее значение

$$f(x)_{наим}=f\left(4\pm\frac{1}{\sqrt{b}}\right)=\frac{b^2\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4+1}{\sqrt{b}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2}\le\frac{2}{3}$$

$$\frac{1+1}{\frac{\sqrt{b}}{b}}\le\frac{2}{3}\quad\rightarrow\quad\sqrt{b}\le\frac{1}{3}\quad\rightarrow\quad b\le\frac{1}{9}$$

Наибольшим значением будет $b=\dfrac{1}{9}$

http://alexlarin.narod.ru

Диагностическая работа №8 C5

Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых для любого значения *x* выполняется неравенство:

$$\left|3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a\right| \le 3$$

$$\left|3\frac{1-\cos 2x}{2} + 2a\sin x\cos x + \frac{1+\cos 2x}{2} + a\right| \le 3$$

$$\left|2 - \cos 2x + a\sin 2x + a\right| \le 3$$

$$\left|2 + a + \sqrt{a^2+1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cos 2x\right)\right| \le 3$$

Обозначим $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \cos\alpha;\quad \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \sin\alpha$

Тогда

$$\left|2 + a + \sqrt{a^2+1}\sin(2x-\alpha)\right| \le 3$$

$$-3 \le 2 + a + \sqrt{a^2+1}\sin(2x-\alpha) \le 3$$

$$\frac{-5-a}{\sqrt{a^2+1}} \le \sin(2x-\alpha) \le \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$$

Чтобы неравенство выполнялось для любого *x*, необходимо

$$\begin{cases} \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} \ge 1 \\ \frac{-a-5}{\sqrt{a^2+1}} \le -1 \end{cases} \to \begin{cases} 1 - a - \sqrt{a^2+1} \ge 0 \\ -a - 5 + \sqrt{a^2+1} \le 0 \end{cases} \to \begin{cases} \sqrt{a^2+1} \le 1 - a \\ \sqrt{a^2+1} \le a + 5 \end{cases}$$

Правые части неравенств неотрицательны, в противном случае нет решений.

$$\begin{cases} a^2 + 1 \le a^2 - 2a + 1 \\ a^2 + 1 \le a^2 + 10a + 25 \end{cases} \to \begin{cases} a \le 0 \\ a \ge -2{,}4 \end{cases}$$

Ответ: $a \in [-2{,}4; 0]$

Диагностическая работа №9 С5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых все корни уравнения

$$3ax^2+\left(3a^3-12a^2-1\right)x-a(a-4)=0$$

удовлетворяют неравенству $|x|\le 1$.

Сначала рассмотрим случай $a=0$, корень уравнения $x=0$ - удовлетворяет условию задачи. Далее

$$|x|\le 1 \quad \to \quad -1\le x\le 1$$

$$3ax^2+3a(a^2-4a)x-x-(a^2-4a)=0$$

$$3ax(x+a^2-4a)-(x+a^2-4a)=0$$

$$(x+a^2-4a)(3ax-1)=0$$

$$x_1=4a-a^2; \quad x_2=\frac{1}{3a};$$

Оба корня должны принадлежать промежутку $|x|\le 1$.

$$\begin{cases} -1\le 4a-a^2\le 1 \\ -1\le \dfrac{1}{3a}\le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a-a^2\le 1 \\ 4a-a^2\ge -1 \\ \dfrac{1}{3a}\le 1 \\ \dfrac{1}{3a}\ge -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2-4a+1\ge 0 \\ a^2-4a-1\le 0 \\ \dfrac{1-3a}{3a}\le 0 \\ \dfrac{1+3a}{3a}\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\in(-\infty;2-\sqrt{3}]\cup[2+\sqrt{3};\infty) \\ a\in[2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}] \\ a\in(-\infty;0)\cup[1/3;\infty) \\ a\in(-\infty;-1/3]\cup(0;\infty) \end{cases} \qquad \to \quad a\in[2+\sqrt{3};2+\sqrt{5}]$$

Ответ: $[2+\sqrt{3};2+\sqrt{5}], \quad \{0\}$.