C3.1

Решите неравенство: $(0{,}3)^{2x^2-3x+6} < 0{,}00243$

$$(0{,}3)^{2x^2-3x+6} < (0{,}3)^5$$
$$2x^2-3x+6 > 5$$
$$2x^2-3x+1 > 0$$
$$x \in (-\infty;0{,}5) \cup (1;\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty;0{,}5) \cup (1;\infty)$

C3.2

Решите неравенство: $8^{\sqrt{8^x}} > 4096$

$$8^{\sqrt{8^x}} > 8^4$$
$$\sqrt{8^x} > 4 \quad \to \quad 2^{\frac{3x}{2}} > 2^2 \quad \to \quad \frac{3x}{2} > 2 \quad \to \quad x > \frac{4}{3}$$

Ответ: $x > \dfrac{4}{3}$

C3.3

Решите неравенство: $log_{0,5}(x^2-5x+6) > -1$

$$\begin{cases} x^2-5x+6 > 0 \\ x^2-5x+6 < 2 \end{cases} \to \begin{cases} x \in (-\infty;2) \cup (3;\infty) \\ x \in (1;4) \end{cases} \to x \in (1;2) \cup (3;4)$$

Ответ: $x \in (1;2) \cup (3;4)$

С3.4.

Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \ge -1$

$$\begin{cases} \frac{2-3x}{x} > 0 \\ \frac{2-3x}{x} \le 3 \end{cases} \to \begin{cases} \frac{3x-2}{x} < 0 \\ \frac{6x-2}{x} \ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} x \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \\ x \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{3}; \infty\right) \end{cases} \to x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

С3.5

Решите неравенство: $2^x + 2^{|x|} \ge 2\sqrt{2}$

1) $x \ge 0 \quad 2 \cdot 2^x \ge 2\sqrt{2} \quad \to \quad x \ge \frac{1}{2}$

2) $x < 0; \quad 2^x + 2^{-x} \ge 2\sqrt{2}$

$2^x = t > 0$

$t + \frac{1}{t} \ge 2\sqrt{2} \quad \to \quad t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 \ge 0; \quad \to \quad t \le \sqrt{2} - 1; \quad t \ge \sqrt{2} + 1;$

$2^x \le \sqrt{2} - 1; \quad 2^x \ge \sqrt{2} + 1;$

$x \le \log_2(\sqrt{2} - 1); \quad x \ge \log_2(\sqrt{2} + 1);$

С учетом ограничения $x < 0$ получаем $x \le \log_2(\sqrt{2} - 1)$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \log_2(\sqrt{2} - 1)\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$

С3.6

Решите неравенство: $8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$$\frac{8}{9\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x; \quad \to \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = t > 0 \quad \to \quad \frac{8}{9 - 9t} > 1 + t$$

$$9t + 9 + \frac{8}{t-1} < 0 \quad \to \quad \frac{9t^2 - 1}{t - 1} < 0 \quad \to \quad t \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right)$$

С учетом $t > 0$ получаем $t \in \left(\frac{1}{3};1\right)$

$$t \in \left(\frac{1}{3};1\right) \quad \to \quad \frac{1}{3} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1 \quad \to \quad 0 < x < \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)$$

Ответ: $0 < x < \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)$

C3.7

Решите неравенство: $3^{72} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$

$$3^{72-x-\sqrt{x}} > 1 \quad \to \quad 72 - x - \sqrt{x} > 0 \quad \to \quad x + \sqrt{x} - 72 < 0; \quad \to \quad 0 \le \sqrt{x} < 8 \quad \to \quad 0 \le x < 64$$

Ответ: $x \in [0;64)$

C3.8

Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(x-2)$

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \\ \log_3(x-2)+\log_3(x+1)<0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x>2 \\ (x-2)(x+1)<1 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x>2 \\ x^2-x-3<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>2 \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad \to \quad x \in \left(2;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

Ответ: $x \in \left(2;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

С3.9

Решите неравенство: $\left(\frac{x}{10}\right)^{lg\,x-2} < 100$

$$\left(\frac{x}{10}\right)^{lg\,x-2} < 100 \quad\to\quad lg\left(\left(\frac{x}{10}\right)^{lg\,x-2}\right) < lg\,100 \quad\to\quad (lg\,x-2)(lg\,x-1) < 2;$$

Обозначим $lg\,x = t;$

$$t^2 - 3t < 0; \quad\to\quad t \in (0;3) \quad\to\quad x \in (1;1000)$$

Ответ: $x \in (1;1000)$

С3.10

Решить неравенство: $log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2} - x - 1\right) \ge 1$

Сначала ограничения.

$$\begin{cases} x \ne 0 \\ x \ne \pm 1 \\ \sqrt{9-x^2} > x+1 \end{cases} \to \begin{cases} x \ne 0 \\ x \ne \pm 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1 \\ 9-x^2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -1 \\ 9-x^2 \ge 0 \\ 9-x^2 > x^2+2x+1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \to \begin{cases} x \ne 0 \\ x \ne \pm 1 \\ \left[\begin{array}{l} -3 \le x < -1 \\ \begin{cases} x \ge -1 \\ -3 \le x \le 3 \\ x^2+x-4 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x \ne 0 \\ x \ne \pm 1 \\ \left[\begin{array}{l} -3 \le x < -1 \\ \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) \end{array}\right. \end{cases} \to \begin{cases} x \ne 0 \\ x \ne \pm 1 \\ \left[-3; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) \end{cases}$$

Теперь само неравенство.

1) При $|x| > 1 \quad x > 1; x < -1 \qquad \sqrt{9 - x^2} - x - 1 \ge |x|$

1.1) при $x > 0 \qquad \sqrt{9 - x^2} \ge 2x + 1 \quad \to \quad 9 - x^2 \ge 4x^2 + 4x + 1; \quad \to \quad 5x^2 + 4x - 8 \le 0$

$$x \in \left(0; \frac{-2 + \sqrt{44}}{5}\right]$$

1.2) при $x < 0 \quad \sqrt{9 - x^2} \ge 1 \quad \to \quad 9 - x^2 \ge 1; \quad \to \quad x^2 \le 8$

$$x \in \left[-2\sqrt{2}; 0\right)$$

Для этого случая $\left[-2\sqrt{2}; -1\right)$

2) При $|x| < 1; \quad -1 < x < 1 \quad \sqrt{9 - x^2} - x - 1 \le |x|$

2.1) при $x > 0 \qquad \sqrt{9 - x^2} \le 2x + 1 \quad \to \quad 9 - x^2 \le 4x^2 + 4x + 1; \quad \to \quad 5x^2 + 4x - 8 \ge 0$

$$x \in \left[\frac{-2 + \sqrt{44}}{5}; 1\right)$$

2.2) при $x < 0 \quad \sqrt{9 - x^2} \le 1 \quad \to \quad 9 - x^2 \le 1; \quad \to \quad x^2 \ge 8$

Нет решений с учетом $-1 < x < 1$

Теперь соберем все это вместе с учетом ограничений.

$$\left[-2\sqrt{2}; -1\right) \cup \left[\frac{-2 + \sqrt{44}}{5}; 1\right)$$

Ответ: $\left[-2\sqrt{2}; -1\right) \cup \left[\frac{-2 + \sqrt{44}}{5}; 1\right)$ **Внимание!** В книжке ответ неправильный!

Тренировочный вариант №1 С3

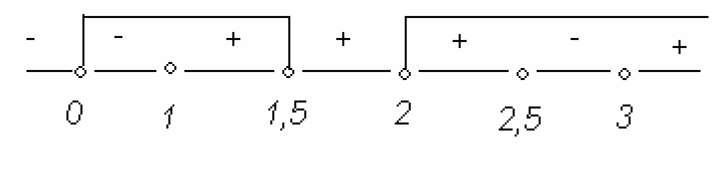
Решите неравенство:

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right)>0$$

$$\frac{lg\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{1}{2}lg\left(2x^2-7x+6\right)}>0$$

$$\begin{cases} x>0 \\ 2x^2-7x+6>0 \\ 2x^2-7x+6\neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<\frac{3}{2};\ x>2; \\ x\neq 1;\ x\neq\frac{5}{2}; \end{cases}$$

Теперь метод интервалов.



Ответ: $x\in(1;1{,}5)\cup(2;2{,}5)\cup(3;\infty)$

Тренировочная работа №2 С3

Решите неравенство: $x^{lg\,x}>10x^{-lg\,x}+3$

Обозначим $x^{lg\,x}=t>0$

$$t>\frac{10}{t}+3;\ \rightarrow\ t^2-3t-10>0;\ \rightarrow\ t<-2;t>5;\ \rightarrow\ t>5;$$

$$x^{lg\,x}>5;\ \rightarrow\ lg\,x^{lg\,x}>lg\,5;\ \rightarrow\ (lg\,x)^2>lg\,5;\ \rightarrow\ lg\,x\in(-\infty;-\sqrt{lg\,5})\cup(\sqrt{lg\,5};\infty)$$

$$x\in\left(0;10^{-\sqrt{lg\,5}}\right)\cup\left(10^{\sqrt{lg\,5}};\infty\right)$$

Ответ: $x\in\left(0;10^{-\sqrt{lg\,5}}\right)\cup\left(10^{\sqrt{lg\,5}};\infty\right)$

C5.1 – C5.4

Первые четыре задачи из сборника объединим в одну из-за того, что в них рассматривается одно и то же неравенство.

Найдите все значения *x*, для каждого из которых неравенство

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$

C5.1 … выполняется для всех *x*.

Прежде всего, заметим, что при $a < 0$ неравенство не может выполняться для всех *x*, т.к. множество его положительных решений (если таковые вообще имеются) является ограниченным отрезком.

Тогда при $a > 0$ неравенство будет выполняться при любом *x*, если парабола находится выше оси абсцисс, т.е.

$$D < 0 \quad \to \quad 16 - 4a(3a+1) = 16 - 12a^2 - 4a = -4(3a^2 + a - 4) = -12\left(a + \frac{4}{3}\right)(a-1) < 0$$

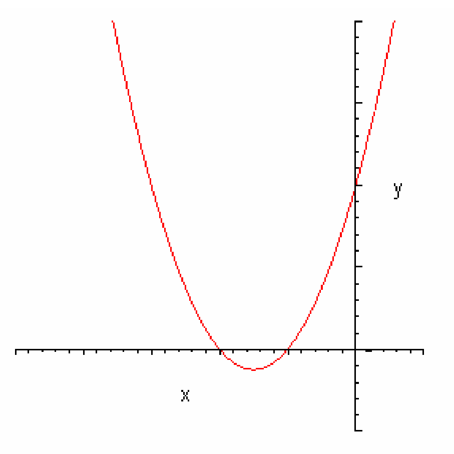
Получаем $a < -\frac{4}{3};\ a > 1$, с учетом $a > 0 \quad \to \quad a > 1$

Ответ в C5.1: $a > 1$

C5.2 … выполняется для всех $x > 0$

При $a < 0$ условие не выполняется, при $a > 1$ - выполняется (см.выше)

Возможен еще следующий вариант:



$$\begin{cases} D \ge 0 \\ x_0 = \dfrac{4}{2a} \le 0 \\ f(0) \ge 0 \end{cases}$$

При $a > 0$ второе неравенство системы невозможно, значит такого варианта быть не может.

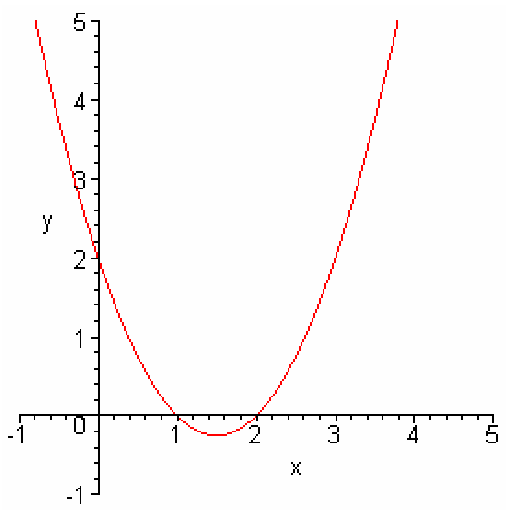
Если $a = 0 \quad \to \quad -4x + 1 > 0 \quad \to \quad x < \frac{1}{4}$ - условие не выполняется для любого *x*.

Окончательно – ответ в C5.2: $a > 0$

C5.3 … выполняется при всех $x < 0$

При $a < 0$ условие не выполняется, при $a > 1$ - выполняется (см. выше)

Возможен еще следующий вариант:



$$\begin{cases} D \ge 0 \\ x_0 = \dfrac{4}{2a} \ge 0 \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{4}{3} \le a \le 1 \\ a > 0 \\ 3a+1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{3} \le a \le 1 \\ a > 0 \\ a \ge -\dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad 0 < a \le 1$$

И еще случай, если $a = 0 \quad \to \quad -4x+1>0 \quad \to \quad x < \dfrac{1}{4}$ - условие выполнено.

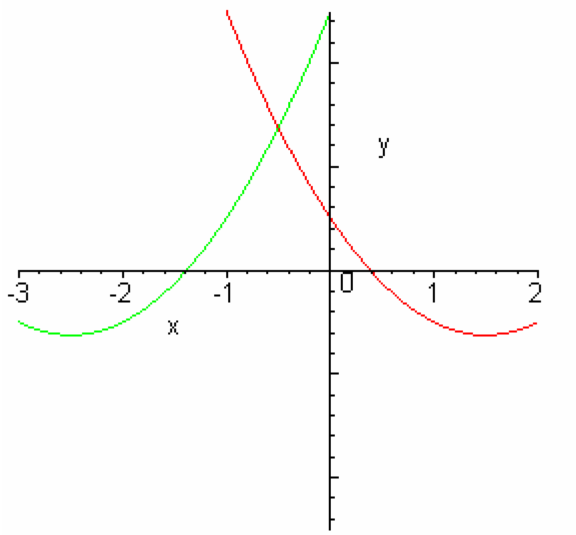
Окончательно – ответ в С5.3: $a \ge 0$

С5.4 … выполняется для всех $-1 < x < 0$

При $a > 1$ - выполняется (см. выше)

Если $a = 0 \quad \to \quad -4x+1>0 \quad \to \quad x < \dfrac{1}{4}$ - условие выполнено.

1) Рассмотрим случай $a > 0$

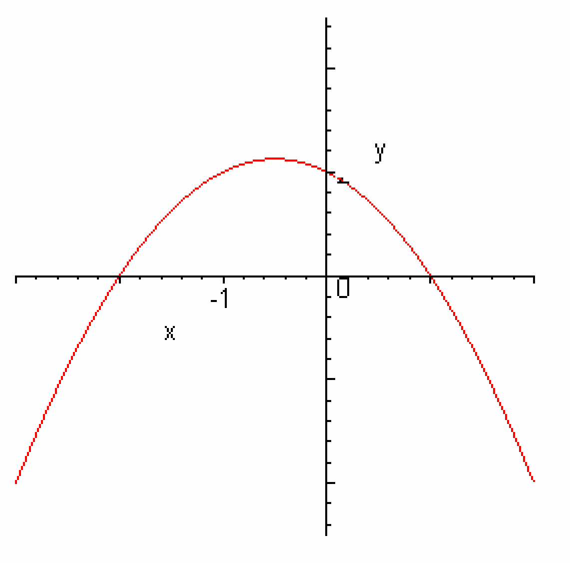


Для выполнения условия задачи:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D \ge 0 \\ \dfrac{4}{2a} \ge 0 \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} D \ge 0 \\ \dfrac{4}{2a} \le -1 \\ f(-1) \ge 0 \end{cases} \end{array} \right. \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\dfrac{4}{3} \le a \le 1 \\ a > 0 \\ 3a+1 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{4}{3} \le a \le 1 \\ \dfrac{4}{2a} \le -1 \\ a+4+3a+1 \ge 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Вторая система не имеет решений при $a > 0$. Окончательно $0 < a \le 1$

2) Рассмотрим случай $a < 0$



Для выполнения условия задачи:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(-1) \ge 0 \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} < a < 0 \\ a \ge -\frac{5}{4} \\ a \ge -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{3} \le a < 0$$

С учетом всего вышесказанного: $\left[\begin{array}{l} a > 1 \\ 0 < a \le 1 \\ -\frac{1}{3} \le a < 0 \\ a = 0 \end{array} \right. \rightarrow \quad a \ge -\frac{1}{3}$

Ответ в С5.4: $a \ge -\frac{1}{3}$

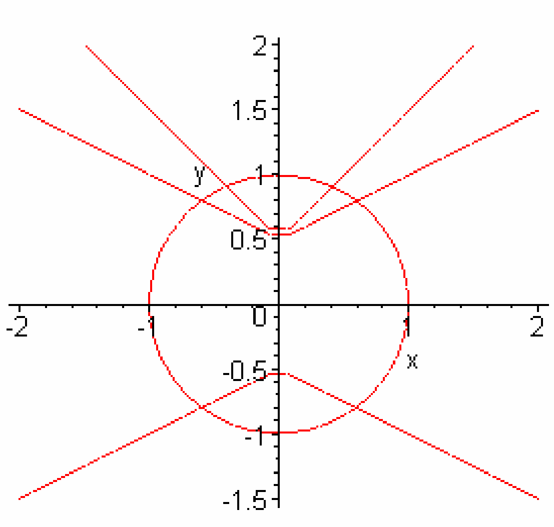
http://alexlarin.narod.ru

С5.5 Найдите все значения p, при каждом из которых для любого q система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = q|x| + p \end{cases}$$

имеет решения.

Задачу можно решить по-разному. Способ первый – графически. График функции, заданной первым уравнением – окружность радиуса 1 с центром в начале координат. График функции, заданной вторым уравнением должен пересекать эту окружность при любом q, т.е. при любом угле наклона прямых этой ломаной.



Нетрудно видеть, что это условие для любого угла наклона выполняется при сдвиге вершины ломаной по оси y не более чем на единицу вниз или вверх

Ответ: $-1 \le p \le 1$.

Второй способ. Подстановкой.

$$x^2 + q^2x^2 + 2pq|x| + p^2 - 1 = 0$$

$$(1 + q^2)x^2 + 2pq|x| + p^2 - 1 = 0$$

Заметим, что $1 + q^2 > 0$, а для выполнения условия задачи это уравнение должно иметь как минимум один неотрицательный корень. Чтоб это выполнялось при любом q, т.е. независимо от положения вершины параболы от начала координат, необходимо, чтобы $f(0) \le 0$.

Т.е. $p^2 - 1 \le 1 \quad \to \quad -1 \le p \le 1$.

C5.6 Найдите все значения *p*, при каждом из которых найдется *q*, такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = q|x| + p \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$x^2 + q^2x^2 + 2pq|x| + p^2 - 1 = 0$$

$$\left(1 + q^2\right)x^2 + 2pq|x| + p^2 - 1 = 0$$

Если корни уравнения $|x| = a$ вообще есть, то хотя бы один из них должен быть неотрицательным. Но любой неотрицательный корень $|x| = a$ будет давать два решения $x = a \quad x = -a$. Чтоб решение было единственным, необходимо, чтобы $|x| = 0$.

Тогда $p^2 - 1 = 0 \quad \to \quad p = \pm 1$

Ответ: $p = \pm 1$

C 5.7

Найти все значения *a*, при каждом из которых неравенство $\left|\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$

выполняется при всех *x*.

$-3<\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}<3$, заметим, что $x^2+x+1>0$ при любом *x*.

Получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}<3\\ \dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}>-3\end{cases}\to\begin{cases}x^2-ax+1<3x^2+3x+3\\ x^2-ax+1>-3x^2-3x-3\end{cases}\to\begin{cases}3x^2+(3+a)x+2>0\\ 4x^2+(3-a)x+4>0\end{cases}$$

Т.к. неравенства должны выполняться при любом *x*, получаем:

$$\begin{cases}(3+a)^2-16<0\\ (3-a)^2-64<0\end{cases}\to\begin{cases}-4<3+a<4\\ -8<3-a<8\end{cases}\to\begin{cases}-7<a<1\\ -5<a<11\end{cases}\to\quad a\in(-5;1)$$

Ответ: $a\in(-5;1)$

http://alexlarin.narod.ru

C 5.8

Найдите все такие целые *a* и *b*, для которых один из корней уравнения $3x^2 + ax^2 + bx + 12 = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$.

Подставим этот корень в уравнение:

$$12 + 6\sqrt{3} + 4a + 2\sqrt{3}a + b + \sqrt{3}b + 12 = 0$$

$$6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}a + \sqrt{3}b + 4a + b + 12 = 0$$

$$\sqrt{3}(6 + 2a + b) + 4a + b + 24 = 0$$

Поскольку *a* и *b* – целые числа, то равенство возможно только в случае, если

$$\begin{cases} 6 + 2a + b = 0 \\ 4a + b + 24 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad 2a + 18 = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 12 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a = -9 \\ b = 12 \end{cases}$

Внимание!

Поскольку в сборнике указаны другие ответы $\begin{cases} a = -12 \\ b = 6 \end{cases}$, сделаем проверку, подставим эти значения в исходное уравнение.

Получаем $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$

При подстановке ответов $\begin{cases} a = -9 \\ b = 12 \end{cases}$ получаем $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

http://alexlarin.narod.ru

С 5.9

При всех *а* решить уравнение $x-\sqrt{a-x^2}=1$.

$\sqrt{a-x^2}=x-1$

При $a<0$ корней нет, при $a=0$ $x=0\neq 1$ - нет корней.

Чтоб корни были необходимо, чтобы $x\geq 1$, тогда

$$a-x^2=x^2-2x+1$$

$$2x^2-2x+1-a=0$$

$$D=4+8(a-1)=8a-4;\quad a\geq\frac{1}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm2\sqrt{2a-1}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{2a-1}}{2}$$

$$\frac{1\pm\sqrt{2a-1}}{2}\geq 1$$

$$\pm\sqrt{2a-1}\geq 1$$

Подходит только один корень $\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$

$$\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\geq 1 \quad\to\quad \sqrt{2a-1}\geq 1 \quad\to\quad a\geq 1$$

Еще надо учесть условие $a-x^2\geq 0 \quad\to\quad x^2\leq a$

$$\frac{1+2\sqrt{2a-1}+2a-1}{4}\leq a$$

$$\sqrt{2a-1}+a\leq 2a \quad\to\quad \sqrt{2a-1}\leq a \quad\to\quad a^2-2a+1\geq 0$$

Условие выполняется при любом *а*.

Итого: при $a\geq 1$ $x=\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$, при $a<1$ нет корней.

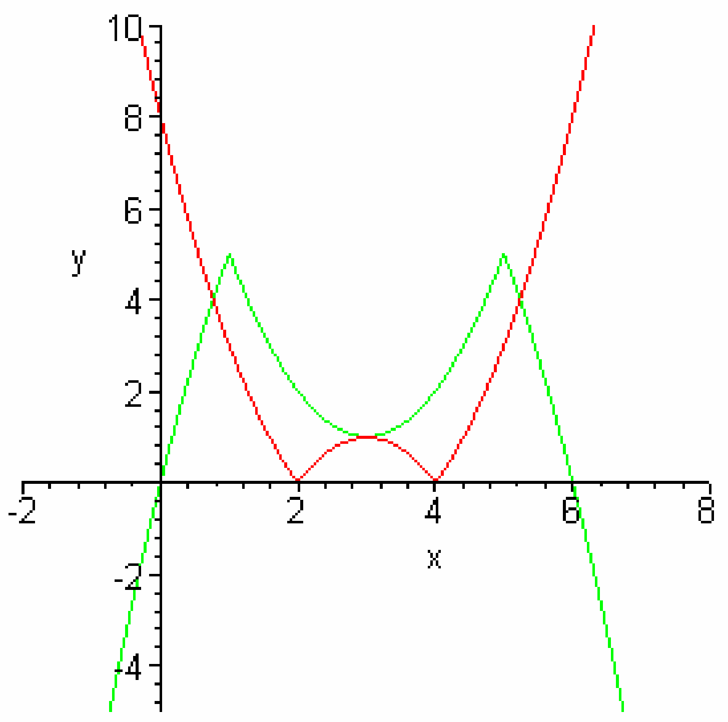
С 5.10
Найти все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-6x+8\right|+\left|x^2-6x+5\right|=a$$

имеет ровно три корня.

Решаем графически $\left|x^2-6x+8\right|=-\left|x^2-6x+5\right|+a$

Как легко видеть, ровно три корня могут быть только в том случае, если графики левой и правой частей уравнения имеют три общие точки.



Т.е. при совпадении значений в вершинах при $x=3$

Получаем $\left|9-18+8\right|=-\left|9-18+5\right|+a \quad \to \quad 1=-4+a \quad \to \quad a=5$

Ответ: $a=5$

http://alexlarin.narod.ru

Тренировочная работа №1 С5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $(a+4x-x^2-1)(a+1-|x-2|)=0$ имеет ровно три различных корня.

$x^2-4x+1-a=0$ (1) или $a+1-|x-2|=0 \quad \to \quad |x-2|=a+1$ (2)

Если уравнение (1) не имеет корней, трех различных корней быть не может.
Если уравнение (1) имеет один корень (при $a=-3 \quad x=2$), тогда уравнение (2) вообще не имеет корней.
Значит уравнение (1) должно иметь 2 различных корня.
При этом возможно, что один из корней уравнения (2) должен быть корнем уравнения (1).

$$|x-2|=a+1 \quad \to \quad \left[\begin{array}{l} x-2=a+1 \\ x-2=-a-1 \end{array}\right. \quad \to \quad \left[\begin{array}{l} x=a+3 \\ x=1-a \end{array}\right.$$

Получаем два случая:

$1) \quad (a+3)^2-4a-12+1-a=0$

$a^2+6a+9-5a-11=0$

$a^2+a-2=0$

$a=1;-2$

При $a=1$:
Первое уравнение имеет корни 0 и 4, второе 4 и 0, т.е. условие задачи не выполняется.
При $a=-2$:
Первое уравнение имеет корни 3 и 1, второе 1 и 3, т.е. условие задачи не выполняется.

$2) \ (1-a)^2-4+4a+1-a=0$

$1-2a+a^2-3+3a=0$

$a^2+a-2=0$

$a=1;-2$

Получаем то же самое, что и в первом случае.
Делаем единственно возможный вывод, что уравнение (2) должно иметь один корень, а уравнение (1) – два корня, не являющиеся корнями уравнения (2). Это возможно только если $|x-2|=0$ при $a=-1$. Тогда первое уравнение имеет два корня $\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$, а второе один корень $x=2$.

Ответ: $a=-1$

http://alexlarin.narod.ru

Тренировочная работа №2 С5

Найдите все значения *а*, при каждом из которых система $\begin{cases} y - x^2 = a \\ x - y^2 = a \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Найдем разность уравнения системы.

$$(y - x) + (y - x)(y + x) = 0$$

$$(y - x)(y + x + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -x - 1 \end{array}\right.$$

Если $y = x$, то оба уравнения системы имеют вид $x^2 - x + a = 0$.

Если $y = -x - 1$, то оба уравнения системы имеют вид $x^2 + x + 1 + a = 0$.

Корни имеют вид $\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$ и $\frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4a}}{2}$

Система имеет два решения в следующих случаях:

1) уравнения имеют по одному корню (их дискриминанты равны нулю)

$\begin{cases} 1 - 4a = 0 \\ 1 - 4 - 4a = 0 \end{cases}$, получается противоречие

2) $\begin{cases} 1 - 4a > 0 \\ -3 - 4a < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a < \frac{1}{4} \\ a > -\frac{3}{4} \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1 - 4a < 0 \\ -3 - 4a > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a > \frac{1}{4} \\ a < -\frac{3}{4} \end{cases}$, что невозможно.

4) Первое уравнение имеет 2 корня, а второе – 1, который совпадает с одном из корней первого.

$a = -\frac{3}{4}; \quad x = -\frac{1}{2}; \quad x = \frac{3}{2}; -\frac{1}{2};$ - подходит

5) Первое имеет один корень, а второе – 2, при этом тоже есть совпадающие корни.

$a = \frac{1}{4}; \quad x = \frac{1}{2};$, а вот второе уравнение корней иметь не будет.

Ответ: $-\frac{3}{4} \le a < \frac{1}{4}$