



ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН  
Универсальные материалы  
для подготовки учащихся

МАТЕМАТИКА

2010



ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ



ФИПИ

**ЕДИНЫЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ЭКЗАМЕН  
2010**

**МАТЕМАТИКА**

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ  
ДЛЯ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ



«Интеллект-Центр»  
2010

УДК 373.167.1:51(075.3)  
ББК 22.1я721  
Е33

Под редакцией  
А. Л. Семенова и И. В. Ященко

**Авторы-составители: Высоцкий И. Р., Гущин Д. Д., Захаров П. И.,  
Панферов С. В., Посицельский С. Е., Семенов А. В., Семенов А. Л.,  
Семенова М. А., Смирнов В. А., Шестаков С. А., Шноль Д. Э.,  
Ященко И. В.**

**Е33** Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ — М.: Интеллект-Центр, 2010. — 96 с.

ISBN 978-5-89790-600-0

Сборник содержит тренировочные задания с методическими указаниями и ответами.

Сборник включает рекомендации выпускникам по подготовке к экзамену 2010 г. с учетом особенностей его проведения в новом учебном году. Пособие содержит два тренировочных варианта КИМ ЕГЭ 2010 года с ответами, составленные в соответствии с кодификатором элементов содержания и демонстрационным вариантом ЕГЭ 2010 г.

Пособие адресовано старшеклассникам и абитуриентам, преподавателям и методистам.

**УДК 373.167.1:51(075.3)  
ББК 22.1я721**

Генеральный директор  
издательства «Интеллект-Центр» *Миндюк М. Б.*

Редактор *Локтионов Д. П.*

Компьютерная верстка и макет: *Погодин В. Н.*

Подписано в печать 31.08.2009 г. Формат 60х84 1/16.

Гарнитура Петербург. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 6,0. Тираж 50 000 экз. Заказ № 0907870.



Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленного электронного оригинал-макета  
в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат»  
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ISBN 978-5-89790-600-0



© ФИПИ, 2010 г.  
© «Интеллект-Центр», 2010 г.  
© Художественное оформление,  
«Интеллект-Центр», 2010 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение. . . . .	4
Демонстрационный вариант КИМ ЕГЭ 2010 г. . . . .	5
Система оценивания демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов по математике. . . . .	11
<b>Примеры заданий с кратким ответом . . . . .</b>	<b>23</b>
Задания типа В1 . . . . .	23
Задания типа В2 . . . . .	26
Задания типа В3 . . . . .	34
Задания типа В4 . . . . .	36
Задания типа В5 . . . . .	38
Задания типа В6 . . . . .	44
Задания типа В7 . . . . .	49
Задания типа В8 . . . . .	51
Задания типа В9 . . . . .	57
Задания типа В10. . . . .	59
Задания типа В11. . . . .	63
Задания типа В12. . . . .	66
<b>Примеры заданий с развернутым ответом . . . . .</b>	<b>69</b>
Задания типа С1 . . . . .	69
Задания типа С2 . . . . .	72
Задания типа С3 . . . . .	78
Задания типа С4 . . . . .	79
Задания типа С5 . . . . .	82
Задания типа С6 . . . . .	83
<b>Тренировочные варианты ЕГЭ 2010 г. . . . .</b>	<b>85</b>

## ВВЕДЕНИЕ

С 2010 года в контрольно-измерительные материалы по математике внесены определенные изменения. Экзамен теперь состоит из двух частей. В первой части 12 заданий с кратким ответом, во второй части 6 заданий, в которых требуется записать полное решение задачи.

В заданиях первой части увеличилось число практико-ориентированных заданий, а также заданий по геометрии. Важно отметить, что с 2010 года варианты первой части ЕГЭ по математике будут формироваться на базе открытого банка заданий. Настоящим изданием Федерального институт педагогических измерений начинается публикацию материалов открытого банка заданий. Поэтапно все материалы будут опубликованы в интернете и официальных изданиях. Таким образом учителя и учащиеся при организации подготовки будут иметь полную информацию о том, какие задания следует ожидать в первой части экзамена.

Разумеется, задания части С, в которых предполагается более глубокое знание математики, не могут и не должны браться из открытого банка заданий. Демонстрационный вариант и спецификация ЕГЭ по математике, приведенные в настоящем издании примеры заданий части С позволят получить представление о примерной тематике, уровне сложности заданий части С и позволят правильно организовать подготовку к экзамену.

Для самопроверки в конце книги приведены два тренировочных варианта ЕГЭ. Рекомендуем вначале проверить свои силы, и с учетом того, какие результаты вы хотите достигнуть на ЕГЭ, спланировать объем необходимой подготовки, используя материалы данного издания, открытого банка заданий, опираясь при этом на школьные учебники, по которым вы учитесь.

Мы надеемся, что вы сможете не только успешно подготовиться к экзамену, но и закрепить математические знания, которые пригодятся вам в обычной жизни и при продолжении образования.

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор

Федерального института  
педагогических измерений

Подпись А.Г. Ершов от «21» июля 2009 г.



А.Г. Ершов

«21» июля 2009 г.

**Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ**

**Демонстрационный вариант**

**контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2010 года**

## **Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов для ЕГЭ 2010 года по МАТЕМАТИКЕ**

Демонстрационный вариант ЕГЭ по математике 2010 года разработан по заданию Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации.

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалов, количестве заданий, их форме, уровне сложности. Задания Демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольно-измерительные материалы в 2010 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов в кодификаторах требований и элементов содержания по математике для составления контрольных измерительным материалов ЕГЭ 2010 г.

Правильное решение каждого из заданий В1–В12 части 1 экзаменационной работы оценивается 1 баллом. Полное правильное решение каждого из заданий С1 и С2 оценивается 2 баллами, С3 и С4 — 3 баллами, С5 и С6 — 4 баллами. Максимальный балл за выполнение всей работы — 30.

Предполагается, что верное выполнение не менее пяти заданий экзаменационной работы отвечает минимальному уровню подготовки, подтверждающему освоение выпускником основных общеобразовательных программ общего (полного) среднего образования. Конкретное значение минимального тестового балла, подтверждающего освоение выпускником основных общеобразовательных программ общего (полного) среднего образования, определяется Федеральной службой по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации в установленном порядке.

К каждому заданию с развернутым ответом, включенному в демонстрационный вариант, дается одно-два возможных решения. Приведенные критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов и система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике.

# Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов 2010 года

## Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин.). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (В1–В12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

**Желаем успеха!**

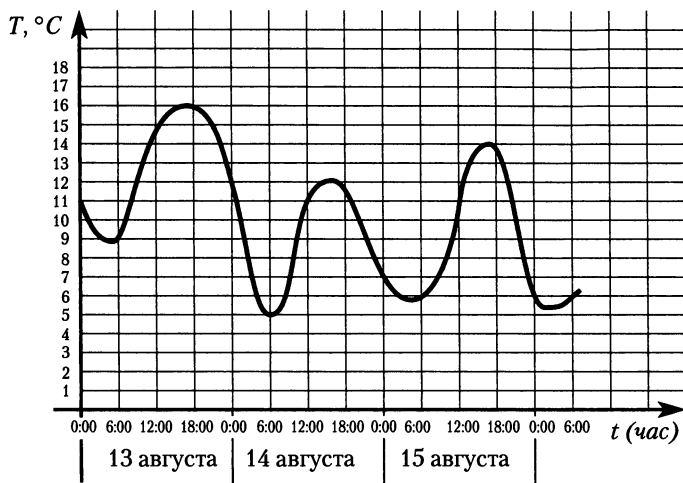
### Часть 1

*Ответом на задания В1–В12 должно быть некоторое целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

**В1** Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20%?

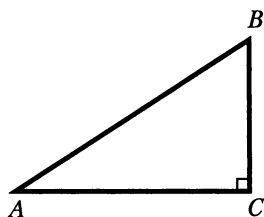
**В2** На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 15 августа.





**B3** Найдите корень уравнения  $3^{x-2} = 27$ .

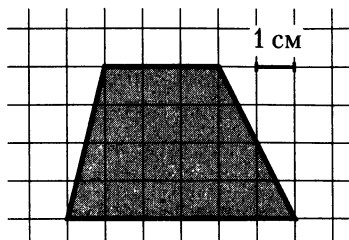
**B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $\cos A = 0,8$ . Найдите  $BC$ .



**B5** Строительная фирма планирует купить  $70 \text{ м}^3$  пеноблоков у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за $1 \text{ м}^3$ )	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия поставки
1	2600	10000	
2	2800	8000	При заказе товара на сумму свыше 150000 рублей доставка бесплатная.
3	2700	8000	При заказе товара на сумму свыше 200000 рублей доставка бесплатная.

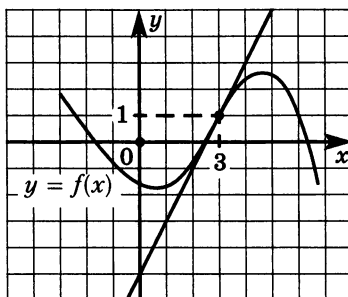
- B6** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



- B7** Найдите значение выражения

$$\log_2 200 + \log_2 \frac{1}{25}.$$

- B8** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке  $x = 3$ .



- B9** Объем первого цилиндра равен  $12 \text{ м}^3$ . У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

- B10** Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой  $h(t) = -5t^2 + 18t$  ( $h$  — высота в метрах,  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

- B11** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2 \cos x + \sqrt{3} x - \frac{\sqrt{3} \pi}{3}$$

на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

- B12** Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

## Часть 2

*Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.*

- C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2} \sin y = x. \end{cases}$$

- C2** Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равна 2, а диагональ боковой грани равна  $\sqrt{5}$ . Найдите угол между плоскостью  $A_1BC$  и плоскостью основания призмы.

- C3** Решите неравенство

$$\log_{x+3}(9 - x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+3}^2(x - 3)^2 \geq 2.$$

- C4** На стороне  $BA$  угла  $ABC$ , равного  $30^\circ$ , взята такая точка  $D$ , что  $AD = 2$  и  $BD = 1$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $A$ ,  $D$  и касающейся прямой  $BC$ .

- C5** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

- C6** Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1)  $a$  и  $b$ , что если к десятичной записи числа  $a$  приписать справа через запятую десятичную запись числа  $b$ , то получится десятичная запись числа, равного  $\frac{b}{a}$ .

## Система оценивания демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов по математике

### Ответы к заданиям части 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6
Ответ	5	14	5	3	192000	18

Номер задания	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	3	2	9	2,4	1	20

### Ответы к заданиям части 2

Номер задания	C1	C2
Ответ	$x = 2, y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$30^\circ$

Номер задания	C3	C4	C5	C6
Ответ	-1	1 или 7	$-8 \leq a \leq 6$	$a = 2, b = 5$

### Решения и критерии оценивания заданий части 2

Оценки заданий части 2 зависят от полноты решения и правильности ответа.

**Общие требования к выполнению заданий с развернутым ответом:** решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены, из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное число баллов.

Эксперты проверяют математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

При выполнении задания экзаменуемый может использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации.

### ЗАДАНИЕ С1

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2} \sin y = x. \end{cases}$$

*Решение.*

1. Сделаем замену  $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = t$ . Тогда  $x^2 + 3x = t^2 + 1$ . Теперь первое уравнение системы можно привести к виду:

$$t^2 - t - 6 = 0.$$

Корни:  $t = -2$  или  $t = 3$ .

Получаем:  $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = -2$  или  $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = 3$ .

Первое из этих уравнений не имеет корней. Решим второе:

$$x^2 + 3x - 10 = 0;$$

$$x = -5 \text{ или } x = 2.$$

2. При каждом из найденных значений  $x$  решим второе уравнение системы.

а) Если  $x = -5$ , то  $\sin y = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$ .

Поскольку  $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ , получаем, что  $\frac{5}{2\sqrt{2}} > 1$ . Значит, уравнение  $\sin y = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$  не имеет решений, поскольку его правая часть меньше  $-1$ .

б) Если  $x = 2$ , то  $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

О т в е т:  $x = 2, y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Возможны другие формы записи ответа. Например:**

А)  $x = 2$ ,  $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$  или  $y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

Б)  $\begin{cases} x = 2, \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$

В)  $\left(2; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), \left(2; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$ .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
1	Верно решено первое уравнение, но система решена неверно.
0	Решение неверно или отсутствует.
2	Максимальный балл

## ЗАДАНИЕ С2

Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равна 2, а диагональ боковой грани равна  $\sqrt{5}$ . Найдите угол между плоскостью  $A_1BC$  и плоскостью основания призмы.

*Решение:*

Обозначим  $H$  середину ребра  $BC$  (см. рисунок). Так как треугольник  $ABC$  равносторонний, а треугольник  $A_1BC$  — равнобедренный, отрезки  $AH$  и  $A_1H$  перпендикулярны  $BC$ . Следовательно,  $\angle A_1HA$  — линейный угол двугранного угла с гранями  $BSCA$  и  $BSCA_1$ .

Из треугольника  $A_1AB$  найдем:

$$AA_1 = 1.$$

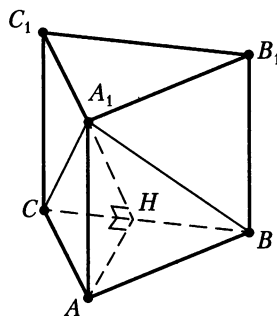
Из треугольника  $AHB$  найдем:

$$AH = \sqrt{3}.$$

Из треугольника  $HAA_1$  найдем:  $\operatorname{tg} \angle A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Искомый угол равен  $30^\circ$ .

Ответ:  $30^\circ$ .



**Возможны другие формы записи ответа.** Например:

А)  $\frac{\pi}{6}$ ;

Б)  $\frac{\pi}{6}$  рад.

В)  $\arctg \frac{1}{\sqrt{3}}$  и т. п.

**Возможны другие решения.** Например, решение задачи с использованием векторов или метода координат.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Получен и обоснован верный ответ.
1	Построен или описан линейный угол искомого угла или угол между перпендикулярами к плоскостям $A_1BC$ и $ABC$ , но получен неверный ответ или решение не закончено.
0	Решение неверно или отсутствует.
2	Максимальный балл

### ЗАДАНИЕ С3

Решите неравенство

$$\log_{x+3}(9-x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+3}^2(x-3)^2 \geq 2.$$

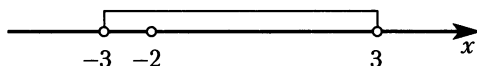
*Решение:*

Преобразуем неравенство:

$$\log_{x+3}((3-x)(3+x)) - \frac{1}{4} \log_{x+3}^2|x-3| \geq 2.$$

Найдем, при каких значениях  $x$  левая часть неравенства имеет смысл:

$$\begin{cases} 9-x^2 > 0, \\ x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \\ x-3 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (3-x)(3+x) > 0, \\ x > -3, \\ x \neq -2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$



Получаем:  $-3 < x < -2$  или  $-2 < x < 3$ .

Значит,  $|x - 3| = 3 - x$  при всех допустимых значениях  $x$ .  
Поэтому

$$\log_{x+3}(3-x) + \log_{x+3}(3+x) - \frac{1}{4} \log_{x+3}^2(3-x) \geq 2;$$

$$\log_{x+3}(3-x) + 1 - \frac{1}{4} \log_{x+3}^2(3-x) \geq 2.$$

Сделаем замену  $\log_{x+3}(3-x) = y$ . Получаем:

$$y - \frac{1}{4}y^2 \geq 1; y^2 - 4y + 4 \leq 0; (y-2)^2 \leq 0; y = 2.$$

Таким образом,  $\log_{x+3}(3-x) = 2$ , откуда

$$(x+3)^2 = 3-x;$$

$$x^2 + 7x + 6 = 0.$$

Корни уравнения:  $-6$  и  $-1$ . Условию  $-3 < x < -2$  или  $-2 < x < 3$  удовлетворяет только  $x = -1$ .

Ответ:  $x = -1$ .

*Замечание.* Можно не находить область допустимых значений  $x$ , а прийти к соотношению  $|x - 3| = 3 - x$  другим способом. Тогда решение будет немного короче.

Преобразуем неравенство:

$$\log_{x+3}((3-x)(3+x)) - \frac{1}{4} \log_{x+3}^2|x-3| \geq 2.$$

Заметим, что  $x+3 > 0$  и  $(3-x)(3+x) > 0$ . Значит,  $3-x > 0$ .

Поэтому  $|x-3| = 3-x$ . Получаем:

$$\log_{x+3}(3-x) - \frac{1}{4} \log_{x+3}^2(3-x) \geq 2.$$

Сделаем замену  $\log_{x+3}(3-x) = y$ . Получаем:

$$y - \frac{1}{4}y^2 \geq 1; y^2 - 4y + 4 \leq 0; (y-2)^2 \leq 0; y = 2.$$

Таким образом,

$$\log_{x+3}(3-x) = 2;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+3)^2 = (3-x), \\ x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 7x + 6 = 0, \\ x > -3, \\ x \neq -2; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = -1, \\ x = -6, \\ x > -3, \\ x \neq -2; \end{array} \right. \quad x = -1.$$

Ответ:  $-1$ .



Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
2	При верном решении допущена вычислительная ошибка, не влияющая на правильную последовательность рассуждений, и, возможно, приведшая к неверному ответу.
1	Получен ответ, содержащий наряду с правильным построением неверное решение.
0	Решение не закончено или получен неверный ответ (кроме тех случаев, в которых выставляется 1–2 балла; см. выше).
3	Максимальный балл

#### ЗАДАНИЕ С4

На стороне  $BA$  угла  $ABC$ , равного  $30^\circ$ , взята такая точка  $D$ , что  $AD = 2$  и  $BD = 1$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $A$ ,  $D$  и касающейся прямой  $BC$ .

*Решение:*

Центр  $O$  искомой окружности принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку  $AD$ . Обозначим  $P$  середину отрезка  $AD$ ,  $Q$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на прямую  $BC$ ,  $E$  — точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой  $BC$  (см. рисунок а). Из условия касания окружности и прямой  $BC$  следует, что отрезки  $OA$ ,  $OD$  и  $OQ$  равны радиусу  $R$  окружности.

Заметим, что точка  $O$  не может лежать по ту же сторону от прямой  $AB$ , что и точка  $E$ , так как в этом случае расстояние от точки  $O$  до прямой  $BC$  меньше, чем расстояние от нее до точки  $A$ .

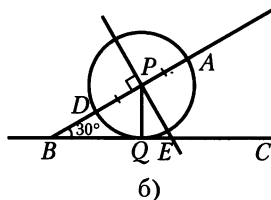
Из прямоугольного треугольника  $BPE$  с катетом  $BP = 2$  и  $\angle B = 30^\circ$  находим, что  $PE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Так как  $OA = R$  и  $AP = 1$ , получаем:  $OP = \sqrt{R^2 - 1}$  и, следовательно,  $OE = \sqrt{R^2 - 1} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

Из прямоугольного треугольника  $OQE$ , в котором  $\angle E = 60^\circ$ , находим:

$$R = OQ = \frac{\sqrt{3}}{2} OE = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{R^2 - 1} + 1.$$

В результате получаем уравнение для  $R$ :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{R^2 - 1} = R - 1.$$

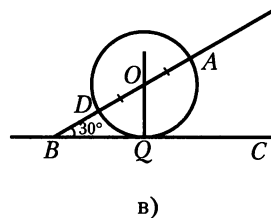


*Другое решение.* Пусть точка  $Q$  касания окружности с прямой  $BC$  лежит на луче  $BC$  (см. рисунок в). По теореме о касательной и секущей

откуда  $BQ = \sqrt{3}$ .

Пусть  $O$  — точка пересечения луча  $BA$  и перпендикуляра к  $BC$ , проведенного через точку  $Q$ . Из прямоугольного треугольника  $BQO$  находим:

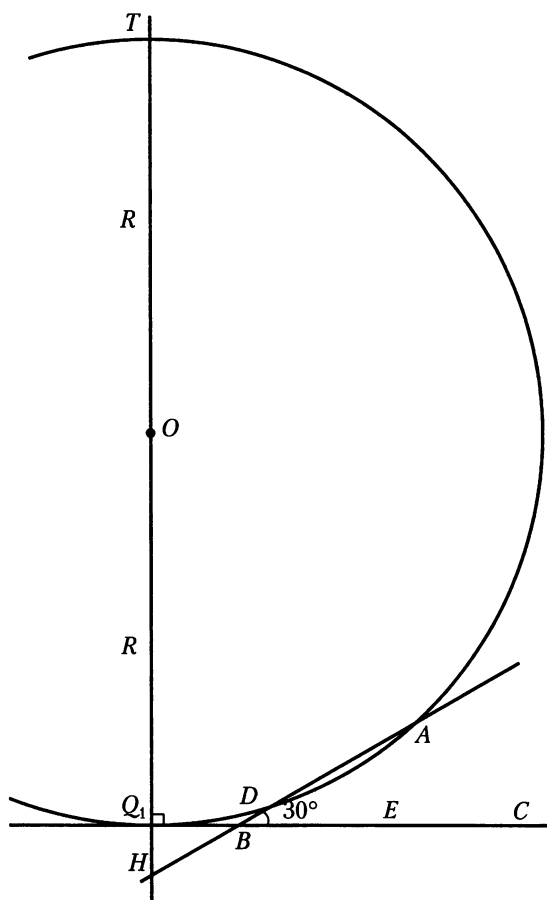
тогда  $AO = OD = 1$  и  $OQ = \frac{1}{2}BO = 1$ .



Таким образом, точка  $O$  удалена от точек  $A$ ,  $D$  и  $Q$  на одно и то же расстояние, равное 1. Следовательно,  $O$  — центр искомой окружности, а ее радиус равен 1.

17

г)



через точку  $Q_1$  перпендикулярно  $BC$ , пересекает прямую  $AB$  в точке  $H$ , а окружность вторично — в точке  $T$ . Тогда

$$BQ_1 = \sqrt{BA \cdot BD} = \sqrt{3}, \angle HBQ_1 = \angle ABC = 30^\circ,$$

$$BH = \frac{BQ_1}{\cos 30^\circ} = 2, HQ_1 = \frac{1}{2}BH = 1.$$

Если  $R$  — радиус окружности, то  $Q_1T = 2R$ . По теореме о двух секущих  $HQ_1 \cdot HT = HA \cdot HD$ , то есть  $1 \cdot (1 + 2R) = (2 + 3) \cdot 3$ , откуда находим, что  $R = 7$ .

Ответ: 1 или 7.

**Возможны другие формы записи ответа. Например,**

А) 1, 7;

Б) радиус окружности равен 7 или 1.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
3	В представленном решении верно найдены оба возможных значения радиуса.
2	Рассмотрены оба случая расположения окружности, но верно найден только один радиус.
1	Рассмотрен только один случай расположения окружности и верно найден ее радиус.
0	Оба радиуса найдены неверно или не найдены.
3	Максимальный балл

### ЗАДАНИЕ С5

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

*Решение:* Запишем уравнение в виде

$$9|x - 1| - 4x + |3x - |x + a|| = 0.$$

Функция  $f(x) = 9|x - 1| - 4x + |3x - |x + a||$  непрерывна и

1) неограниченно возрастает при  $x \geq 1$ , так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x) = 9x - 9 - 4x \pm (3x \pm (x \pm a)) = kx + m,$$

где  $k \geq 9 - 4 - 4 = 1 > 0$ ;

2) убывает при  $x \leq 1$ , так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x) = -9x + 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

где  $k \leq -9 - 4 + 4 = -9 < 0$ .

Следовательно, наименьшее значение функция  $f$  принимает при  $x = 1$ , и уравнение  $f(x) = 0$  будет иметь корень тогда и только тогда, когда  $f(1) \leq 0$ .

Решим это неравенство:

$$\begin{aligned} |3 - |1 + a|| &\leq 4; \\ -4 &\leq |a + 1| - 3 \leq 4; \\ |a + 1| &\leq 7; \\ -7 &\leq a + 1 \leq 7; \\ -8 &\leq a \leq 6. \end{aligned}$$

Ответ:  $-8 \leq a \leq 6$ .

**Возможны другие формы записи ответа.** Например:

А)  $[-8; 6]$ ;

Б)  $a \in [-8; 6]$ .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован: например, не указано явно необходимое и достаточное условие существования корня, или то, что функция принимает все значения из промежутка $[f(1); +\infty)$ , или решение содержит вычислительную ошибку.
2	Верно рассмотрены отдельные случаи раскрытия модуля, в результате чего получена часть верного ответа (возможно, другие случаи не рассмотрены или при их рассмотрении допущены ошибки).
1	Верно рассмотрены отдельные случаи раскрытия модуля, но не найдена никакая часть верного ответа.
0	Решение не содержит ни одного верно рассмотренного случая раскрытия модуля.
4	<i>Максимальный балл</i>

### ЗАДАНИЕ С6

Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1)  $a$  и  $b$ , что если к десятичной записи числа  $a$  приписать справа через запятую десятичную запись числа  $b$ , то получится десятичная запись числа, равного  $\frac{b}{a}$ .

*Решение.* Пусть десятичная запись числа  $b$  состоит из  $n$  цифр. Тогда по условию задачи можно записать равенство

$$\frac{b}{a} = a + \frac{b}{10^n}, \text{ поэтому } 10^n(b - a^2) = ab. \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что  $b > a^2 \geq a$ . Так как числа  $a$  и  $b$  взаимно простые, числа  $b - a^2$  и  $ab$  тоже взаимно простые. (Действительно, пусть  $p$  — общий простой делитель этих чисел. Тогда если  $p$  — делитель, то  $p$  будет делителем  $b$ . Если же  $p$  — делитель  $b$ , то  $p$  будет делителем  $a^2$ , значит,  $p$  — делитель  $a$ . Противоречие.)

Поэтому  $b - a^2 = 1$  и, следовательно,  $ab = 10^n$ . Последнее равенство при взаимно простых  $a$  и  $b$  возможно только в двух случаях:

1)  $b = 10^n$ ,  $a = 1$ , но в этом случае не выполняется равенство  $b - a^2 = 1$ .

2)  $b = 5^n$ ,  $a = 2^n$ . В этом случае равенство  $b - a^2 = 1$  принимает вид

$$5^n - 4^n = 1, \text{ откуда } \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Функция  $f(n) = \left(\frac{5}{4}\right)^n$  возрастает, а функция  $g(n) = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$  — убывает. Поэтому уравнение  $f(n) = g(n)$  имеет не более одного корня, и так как  $f(1) = g(1)$ , единственным корнем уравнения является  $n = 1$ .

Ответ:  $a = 2$ ,  $b = 5$ .

Возможны другие формы записи ответа. Например:

А) (2; 5);

Б)  $\frac{5}{2} = 2,5$ ;

В)  $\begin{cases} a = 2, \\ b = 5. \end{cases}$

<b>Баллы</b>	<b>Критерии оценки выполнения задания С6</b>
<b>4</b>	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
<b>3</b>	Получена система необходимых и достаточных условий на пару искомых чисел и найдено ее решение, но недостаточно обоснована его единственность.
<b>2</b>	Составлено верное уравнение в натуральных числах, из которого сделаны какие-либо существенные выводы для нахождения искомой пары чисел, уравнение до конца не решено, но верный ответ приведен.
<b>1</b>	Составлено, но не решено верное уравнение в натуральных числах, верный ответ приведен.
<b>0</b>	Ответ не найден, или ответ неверен, или в решении отсутствует верное уравнение в натуральных числах.
<b>4</b>	<i>Максимальный балл</i>

## Примеры заданий с кратким ответом

### Задания типа В1

**В1.1.** Железнодорожный билет для взрослого стоит 590 рублей. Стоимость билета школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 14 школьников и 3 взрослых. Сколько стоят билеты на всю группу? Ответ выразите в рублях.

**В1.2.** Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 140 руб. за штуку. Торговая наценка составляет 20%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1110 рублей?

**В1.3.** Теплоход рассчитан на 600 пассажиров и 20 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

**В1.4.** Железнодорожный билет для взрослого стоит 820 рублей. Стоимость билета школьника составляет 60% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 25 школьников и 4 взрослых. Сколько стоят билеты на всю группу? Ответ выразите в рублях.

**В1.5.** В пачке бумаги 250 листов формата А4. За неделю в офисе расходуется 400 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 8 недель?

**В1.6.** Сырок стоит 5 руб. 70 коп. Какое наибольшее число сырков можно купить на 50 рублей?

**В1.7.** До снижения цен футболка стоила 1200 руб., а после снижения цен стала стоить 960 руб. На сколько процентов была снижена цена? Знак % в ответе не пишете.



**В1.8.** Теплоход рассчитан на 1000 пассажиров и 30 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

**В1.9.** Цена на электрический чайник была повышена на 22% и составила 3050 руб. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

**В1.10.** Шариковая ручка стоит 10 руб. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 400 рублей после повышения цены на 15%?

**В1.11.** Сырок стоит 5 руб. 40 коп. Какое наибольшее число сырков можно купить на 60 рублей?

**В1.12.** В супермаркете проходит рекламная акция: покупая 4 шоколадки, 5-ю шоколадку покупатель получает в подарок. Шоколадка стоит 20 руб. Какое наибольшее число шоколадок можно получить за 390 руб.?

**В1.13.** В пачке бумаги 250 листов формата А4. За неделю в офисе расходуется 1600 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 4 недели?

**В1.14.** Цена на электрический чайник была повышена на 18% и составила 1770 руб. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

**В1.15.** Теплоход рассчитан на 650 пассажиров и 20 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

**В1.16.** Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 11 г лимонной кислоты. Хозяйка готовит 7 литров маринада. В магазине продаются пачки лимонной кислоты по 10 г. Какое наименьшее число пачек достаточно купить хозяйке для приготовления маринада?

**В1.17.** Розничная цена учебника 354 руб., она на 18% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 7000 рублей?

**В1.18.** Цена на электрический чайник была повышена на 21% и составила 2420 руб. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

**В1.19.** Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 130 руб. за штуку. Торговая наценка составляет 15%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1100 рублей?

**В1.20.** Розничная цена учебника 345 руб., она на 15% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 5000 рублей?

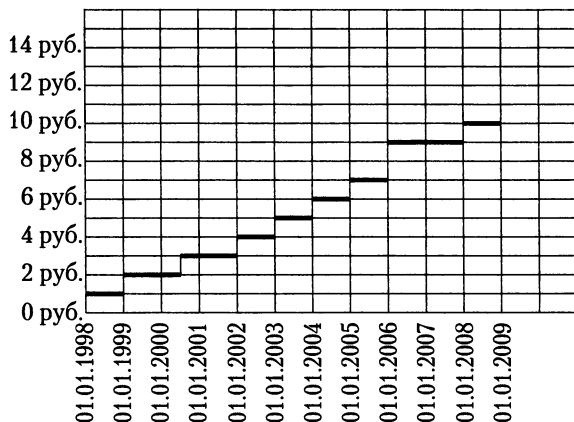
### Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	5900	6	11	15580	13	8	20	18	2500	34

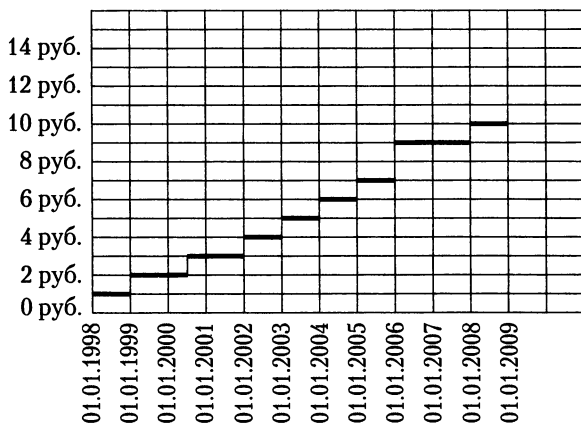
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	11	23	26	1500	12	8	23	2000	7	16

## Задания типа В2

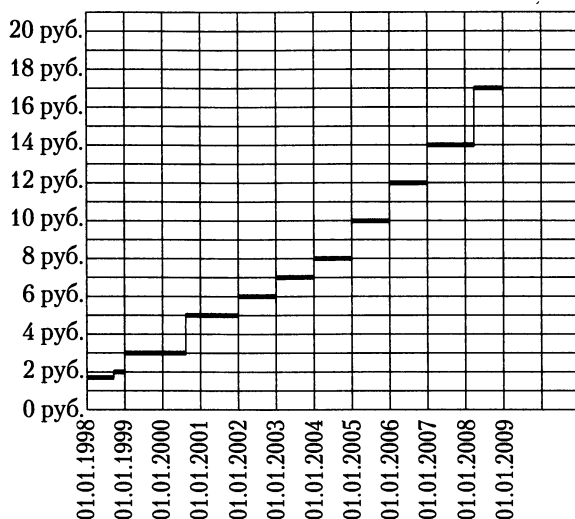
**В2.1.** На графике показано изменение цены билета на одну поездку в Самарском метрополитене в период с 1 января 1998 по 1 января 2009 года. Определите по графику стоимость в рублях одной поездки на метро 1 июля 2003 года.



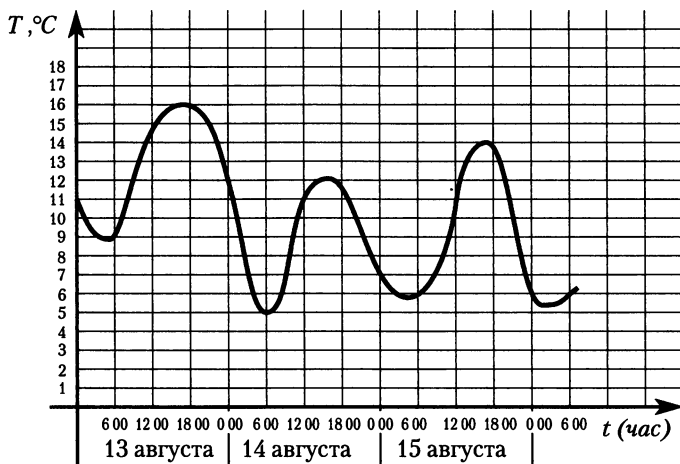
**В2.2.** На графике показано изменение цены билета на одну поездку в Самарском метрополитене в период с 1 января 1998 по 1 января 2009 года. Во сколько раз увеличилась стоимость поездки на метро с 1 января 2001 года по 1 марта 2007 года?



**В2.3.** На графике показано изменение стоимости разового проезда в Петербургском метрополитене в период с 1 января 1998 по 1 января 2009 года. На сколько рублей увеличилась стоимость разового проезда на метро с 1 мая 1999 года по 1 мая 2008 года?

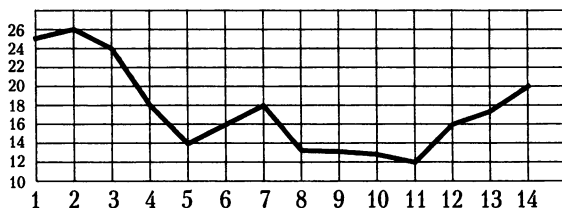


**В2.4.** На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток, начиная с 0 ч. 13 августа. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику, до какой наибольшей температуры прогрелся воздух 14 августа. Ответ дайте в градусах цельсия.



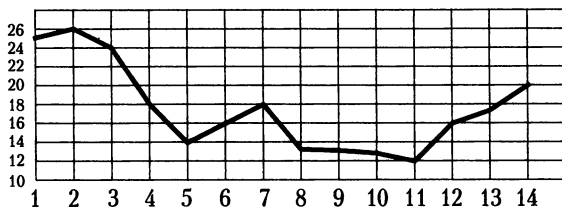
**В2.5.** На графике показана среднесуточная температура воздуха в течение первых двух недель июля 1991 года в Ижевске. Определите температуру в градусах цельсия в Ижевске 6 июля 1991 года.

Ижевск, июль 1991 г.



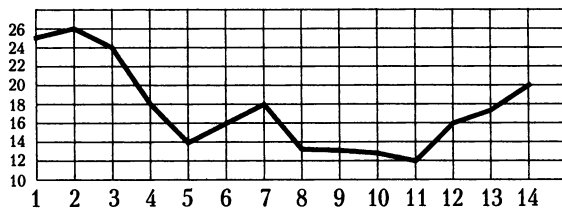
**В2.6.** На графике показана среднесуточная температура воздуха в течение первых двух недель июля 1991 года в Ижевске. Какого числа (в наблюдаемый период) температура впервые упала до 18 градусов?

Ижевск, июль 1991 г.



**В2.7.** На графике показана среднесуточная температура воздуха в течение первых двух недель июля 1991 года в Ижевске. Определите в градусах разность максимальной и минимальной температур в наблюдаемый период времени.

Ижевск, июль 1991 г.



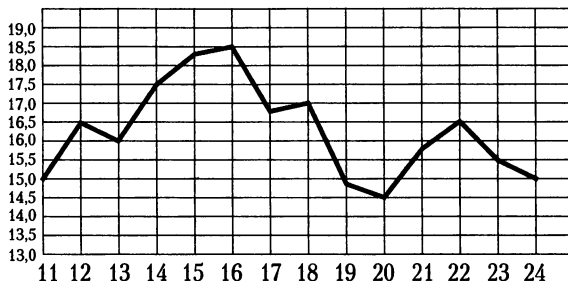
**В2.8.** На графике показана среднесуточная температура воздуха в течение двух недель августа 1993 года в Иркутске. Какого числа из наблюдаемого периода температура была максимальной?

Иркутск, август 1993 г.



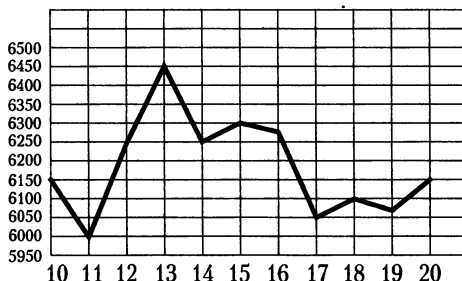
**В2.9.** На графике показана среднесуточная температура воздуха в течение двух недель августа 1993 года в Иркутске. Какой была минимальная температура (в градусах) в течение наблюдаемого периода?

Иркутск, август 1993 г.

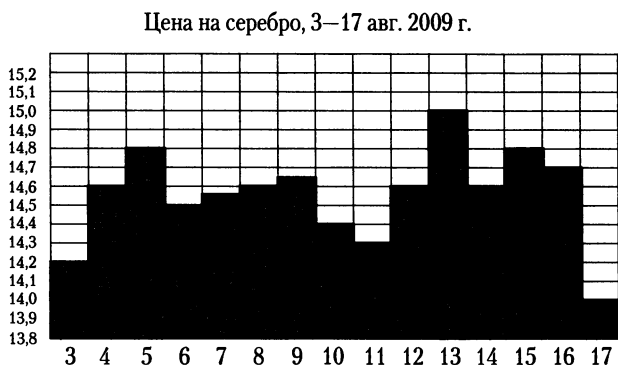


**В2.10.** На графике показано изменение цены на медь во второй декаде августа 2009 года. Определите наименьшую цену на медь в период с 15 по 20 августа 2009 года. (В долларах за тонну.)

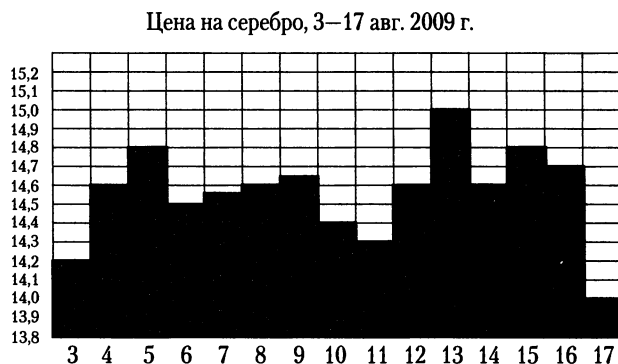
Цена на медь, 10–20 авг. 2009 г.



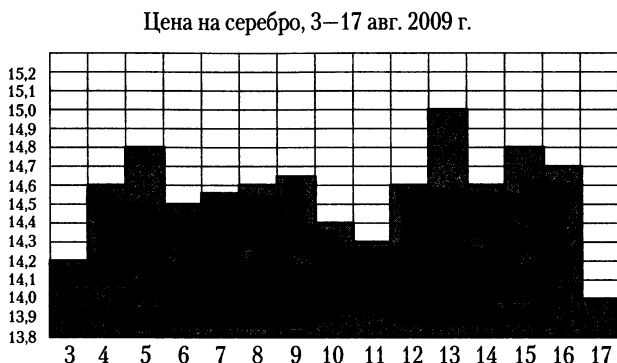
**В2.11.** На диаграмме показано изменение цены на серебро в период с 3 по 17 августа 2009 года. Какой была цена 15 августа 2009 года? (В долларах за унцию.)



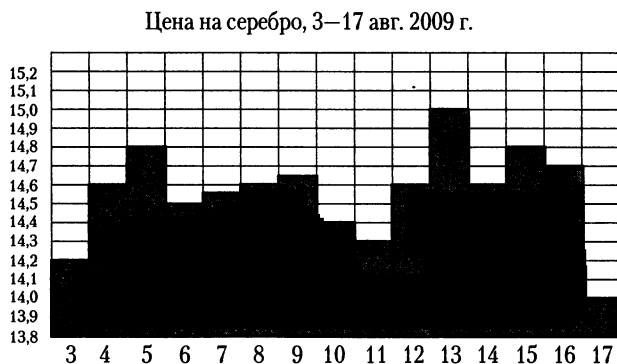
**В2.12.** На диаграмме показано изменение цены на серебро в период с 3 по 17 августа 2009 года. Какого числа цена была равна 14,4 доллара за унцию? (В долларах за унцию.)



**В2.13.** На диаграмме показано изменение цены на серебро в период с 3 по 17 августа 2009 года (в долларах за унцию). Сколько дней из этого периода цена была равна 14,6 доллара за унцию?



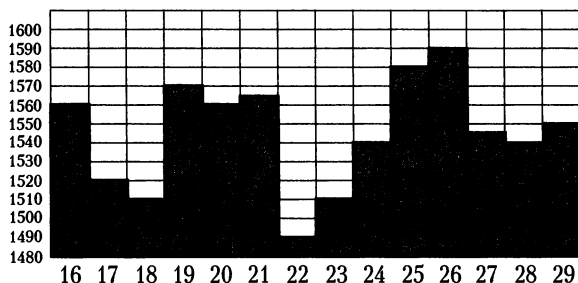
**В2.14.** На диаграмме показано изменение цены на серебро в период с 3 по 17 августа 2009 года (в долларах за унцию). Сколько дней за рассматриваемый период времени цена превышала 14,5 долларов за унцию?





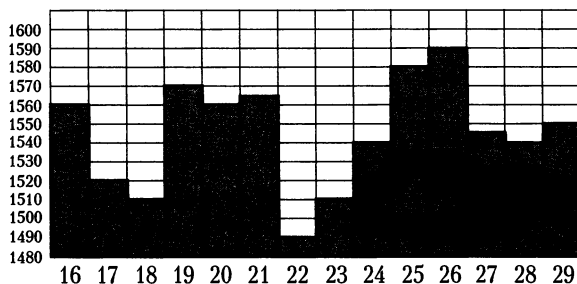
**В2.15.** На диаграмме показано изменение цены на цинк в период с 16 по 29 июня 2009 года (в долларах за тонну). На сколько долларов упала цена 23 июня по сравнению с 19 июня 2009 года?

Цена на цинк, 16–29 июня 2009 г.



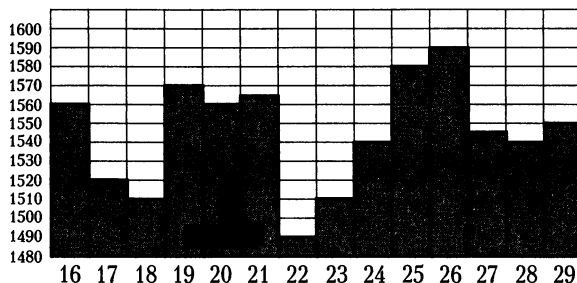
**В2.16.** На диаграмме показано изменение цены на цинк в период с 16 по 29 июня 2009 года (в долларах за тонну). Определите наибольшую цену на цинк за первую неделю рассматриваемого периода.

Цена на цинк, 16–29 июня 2009 г.



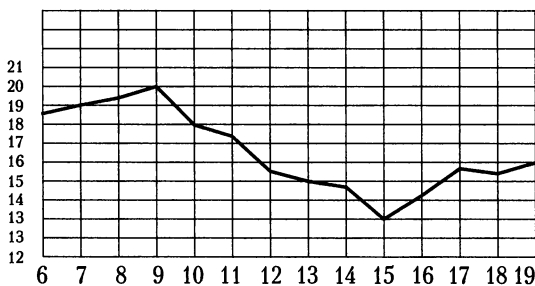
**В2.17.** На диаграмме показано изменение цены на цинк в период с 16 по 29 июня 2009 года (в долларах за тонну). Определите разницу между наибольшей и наименьшей ценой за рассматриваемый период времени.

Цена на цинк, 16–29 июня 2009 г.



**В2.18.** На графике показано среднесуточная температура воздуха с 6 по 19 сентября 1990 года в Керчи. Определите в градусах разность максимальной и минимальной температур в наблюдаемый период времени.

Керчь, 6–19 сентября 1990 г.



### Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	5	13	14	12	16	4	14	16	14,5

Номер задания	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ответ	6050	14,8	10	4	10	60	1570	100	7

### Задания типа В3

**В3.1.** Найдите корень уравнения  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-13} = \frac{1}{9}$ .

**В3.2.** Найдите корень уравнения  $\log_4(x+5) = \log_4(4x-10)$ .

**В3.3.** Найдите корень уравнения  $\log_5(12-3x) = 2 + \log_5 3$ .

**В3.4.** Найдите корень уравнения  $4^{5x-13} = \frac{1}{64}$ .

**В3.5.** Найдите корень уравнения  $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-11} = \frac{1}{32}$ .

**В3.6.** Найдите корень уравнения  $\log_9(x+3) = \log_9(2x-16)$ .

**В3.7.** Найдите корень уравнения  $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-11} = 2$ .

**В3.8.** Найдите корень уравнения  $\sqrt{2x+7} = 5$ .

**В3.9.** Найдите корень уравнения  $\left(\frac{1}{81}\right)^{x-8} = 3$ .

**В3.10.** Найдите корень уравнения  $\log_5(9-3x) = 2 + \log_5 3$ .

**В3.11.** Найдите корень уравнения  $\log_6(x+4) = \log_6(4x-2)$ .

**В3.12.** Найдите корень уравнения  $\log_2(6-x) = 4$ .

**В3.13.** Найдите корень уравнения  $\log_2(8-x) = 4$ .

**В3.14.** Найдите корень уравнения  $\sqrt{\frac{2x+53}{7}} = 11$ .

**В3.15.** Найдите корень уравнения  $\log_9(x+6) = \log_9(6x-9)$ .

**В3.16.** Найдите корень уравнения  $\sqrt{x+15} = 7$ .

**В3.17.** Найдите корень уравнения  $\sqrt{\frac{11}{3x-25}} = \frac{1}{5}$ .

**В3.18.** Найдите корень уравнения  $\sqrt{\frac{6}{5x-34}} = \frac{1}{11}$ .

**В3.19.** Найдите корень уравнения  $\log_{\frac{1}{4}}(12-x) = -3$ .

**В3.20.** Найдите корень уравнения  $32^{x-6} = \frac{1}{2}$ .

### Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	15	5	-21	2	4	19	10,5	9	7,75	-22

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	2	-10	-8	397	3	34	100	152	-52	5,8

#### Задания типа В4

**В4.1.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{1}{7}$ ,  $AC = 4\sqrt{3}$ . Найдите  $AB$ .

**В4.2.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{5}{6}$ ,  $AC = 5\sqrt{11}$ . Найдите  $AB$ .

**В4.3.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 182$ ,  $AC = 70$ . Найдите  $\operatorname{tg} A$ .

**В4.4.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $BC = 28$ ,  $AB = 35$ . Найдите  $\sin B$ .

**В4.5.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\cos B = \frac{3}{5}$ ,  $AB = 5$ . Найдите  $AC$ .

**В4.6.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 45$ ,  $\cos B = \frac{3}{5}$ . Найдите  $AC$ .

**В4.7.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  боковая сторона  $AB$  равна 10, а высота, проведенная к основанию, равна 8. Найдите косинус угла  $A$ .

**В4.8.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $BC = \sqrt{21}$ ,  $AB = 5$ . Найдите  $\sin B$ .

**В4.9.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 13$ ,  $AC = 5$ . Найдите  $\operatorname{tg} A$ .

**В4.10.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 25$ ,  $\cos B = \frac{4}{5}$ . Найдите  $AC$ .

**В4.11.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 15$ ,  $AC = 12$ . Найдите  $\operatorname{tg} A$ .

**В4.12.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\cos A = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ ,  $BC = 3$ . Найдите  $AB$ .

**В4.13.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $BC = 2$ . Найдите  $AB$ .

**В4.14.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 30$ ,  $AC = 6\sqrt{21}$ . Найдите  $\sin A$ .

**В4.15.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 20$ ,  $AC = 12$ . Найдите  $\sin A$ .

**В4.16.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 70$ ,  $AC = 56$ . Найдите  $\operatorname{tg} A$ .

**В4.17.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 169$ ,  $AC = 65$ . Найдите  $\operatorname{tg} A$ .

**В4.18.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 10$ ,  $AC = \sqrt{91}$ . Найдите  $\sin A$ .

**В4.19.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 30$ ,  $BC = 24$ . Найдите  $\cos A$ .

**В4.20.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 75$ ,  $AC = 60$ . Найдите  $\operatorname{tg} A$ .

#### Ответы

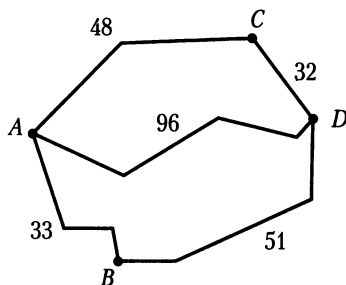
Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	7	30	2,4	0,6	4	36	0,6	0,4	2,4	15

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	0,75	7	6	0,4	0,8	0,75	2,4	0,3	0,6	0,75

### Задания типа В5

**В5.1.** Из пункта  $A$  в пункт  $D$  ведут три дороги. Через пункт  $B$  едет грузовик со средней скоростью 42 км/ч, через пункт  $C$  едет автобус со средней скоростью 32 км/ч. Третья дорога — без промежуточных пунктов, и по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 64 км/ч. На рисунке показана схема дорог и расстояние между пунктами по дорогам. Все три автомобиля одновременно выехали из  $A$ . Какой автомобиль добрался до  $D$  позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.



**В5.2.** Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	2,5 руб. за 1 Мб
План «500»	600 руб. за 500 Мб трафика в месяц	2 руб. за 1 Мб сверх 500 Мб
План «800»	850 руб. за 800 Мб трафика в месяц	1,5 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

Пользователь планирует, что его трафик составит 600 Мб и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей должен заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 600 Мб?

**В5.3.** Строительной фирме нужно приобрести 73 кубометра пенобетона. У нее есть 3 поставщика. Сколько рублей придется заплатить

за самую дешевую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м³)	Стоимость доставки в рублях	Дополнительные условия
А	2650	4600	
Б	3000	5600	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	2680	3600	При заказе более 75 м³ доставка бесплатно

**В5.4.** Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	3,5 руб. за 1 Мб
План «700»	750 руб. за 700 Мб трафика в месяц	3 руб. за 1 Мб сверх 700 Мб
План «1000»	1050 руб. за 1000 Мб трафика в месяц	2,5 руб. за 1 Мб сверх 1000 Мб

Пользователь планирует, что его трафик составит 900 Мб и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей должен заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 900 Мб?

**В5.5.** Семья из трех человек едет из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд стоит 940 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 10 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 19 руб. за литр. Сколько придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих? Ответ выразите в рублях.



**В5.6.** Семья из трех человек едет из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд стоит 650 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 13 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 18,5 руб. за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

**В5.7.** Для остекления веранды требуется заказать 30 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,15 м<sup>2</sup>. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м <sup>2</sup> )	Резка стекла (руб. за одно стекло)
А	340	15
Б	330	20
В	400	10 Бесплатно, если сумма заказа превышает 1600 рублей

**В5.8.** Семья из трех человек едет из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд стоит 790 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 13 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 19 руб. за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

**В5.9.** Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 4 кубометра пеноблоков и 2 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 4 тонны щебня и 40 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2550 рублей, щебень стоит 660 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 190 рублей. Сколько рублей придется заплатить за материалы, если выбрать самый дешевый вариант?

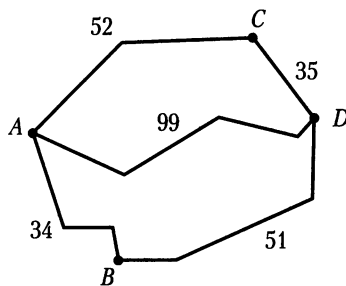
**В5.10.** При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 11 тонн природного камня и 12 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 9 тонн щебня и 64

мешка цемента. Тонна камня стоит 1550 рублей, щебень стоит 740 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 200 рублей. Сколько рублей придется заплатить за материалы для фундамента, если выбрать самый дешевый вариант?

**В5.11.** Для остекления веранды требуется заказать 30 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла  $0,25 \text{ м}^2$ . В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за $1 \text{ м}^2$ )	Резка стекла (руб. за одно стекло)
А	310	10
Б	300	15
В	370	5 Бесплатно, если сумма заказа превышает 2500 рублей

**В5.12.** Из пункта  $A$  в пункт  $D$  ведут три дороги. Через пункт  $B$  едет грузовик со средней скоростью 34 км/ч, через пункт  $C$  едет автобус со средней скоростью 58 км/ч. Третья дорога — без промежуточных пунктов, и по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 44 км/ч. На рисунке показана схема дорог и расстояние между пунктами по дорогам. Все три автомобиля одновременно выехали из  $A$ . Какой автомобиль добрался до  $D$  позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.



**В5.13.** Семья из трех человек едет из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд стоит 680 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 13 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 19 руб. за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

**В5.14.** При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 7 тонн природного камня и 7 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 6 тонн щебня и 43 мешка цемента. Тонна камня стоит 1550 рублей, щебень стоит 730 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 200 рублей. Сколько рублей придется заплатить за материалы для фундамента, если выбрать самый дешевый вариант?

**В5.15.** Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяженностью 600 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива на 100 км	Арендная плата за 1 сутки
1	Дизельное	4	3500
2	Бензин	7	3100
3	Газ	12	3100

Цена дизельного топлива 18 руб. за литр, бензина 21 руб. за литр, газа 17 руб. за литр.

**В5.16.** Для изготовления книжных полок требуется заказать 50 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,25 м<sup>2</sup>. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

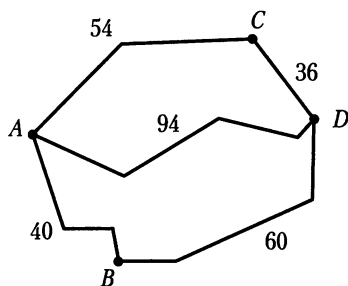
Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м <sup>2</sup> )	Резка стекла (руб. за одно стекло)
А	420	75
Б	440	65
В	470	55

**В5.17.** Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	2,5 руб. за 1 Мб
План «500»	750 руб. за 500 Мб трафика в месяц	2 руб. за 1 Мб сверх 500 Мб
План «800»	1000 руб. за 800 Мб трафика в месяц	1,5 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

Пользователь планирует, что его трафик составит 700 Мб и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей должен заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 700 Мб?

**В5.18.** Из пункта  $A$  в пункт  $D$  ведут три дороги. Через пункт  $B$  едет грузовик со средней скоростью 40 км/ч, через пункт  $C$  едет автобус со средней скоростью 40 км/ч. Третья дорога — без промежуточных пунктов, и по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 47 км/ч. На рисунке показана схема дорог и расстояние между пунктами по дорогам. Все три автомобиля одновременно выехали из  $A$ . Какой автомобиль добрался до  $D$  позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.



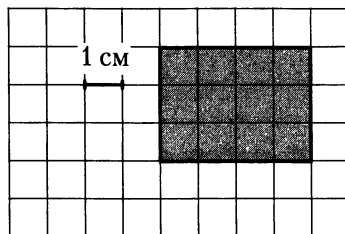
### Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	2,5	800	198050	1050	1330	1683,5	1800	1729	10240

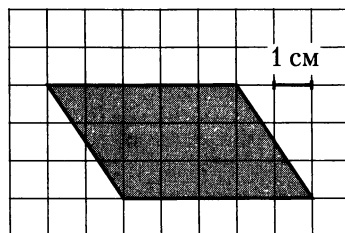
Номер задания	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ответ	19450	2625	2,5	1729	12250	3932	8625	1000	2,5

### Задания типа В6

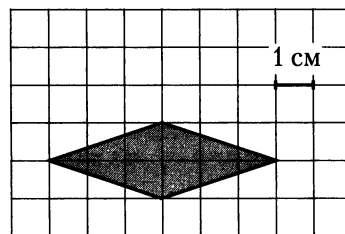
**В6.1.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



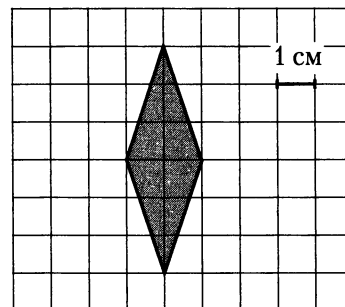
**В6.2.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



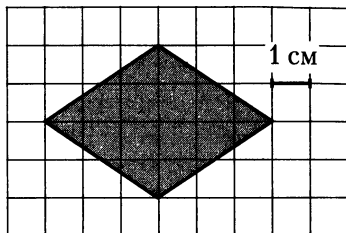
**В6.3.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



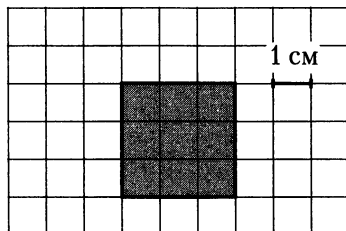
**В6.4.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



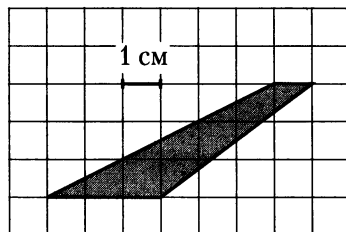
**В6.5.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



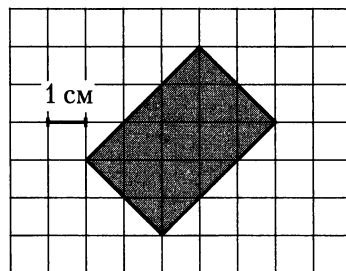
**В6.6.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



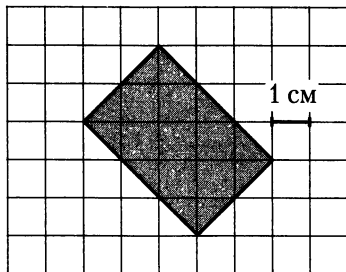
**В6.7.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



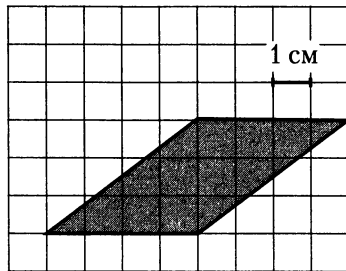
**В6.8.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



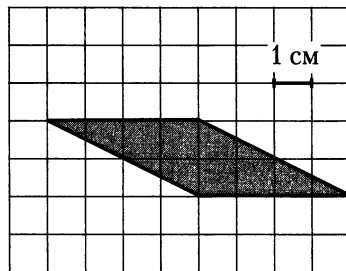
**В6.9.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



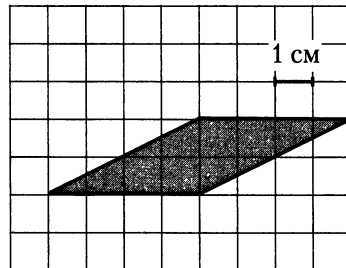
**В6.10.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



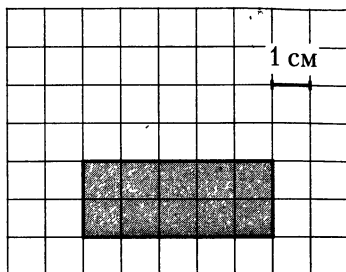
**В6.11.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



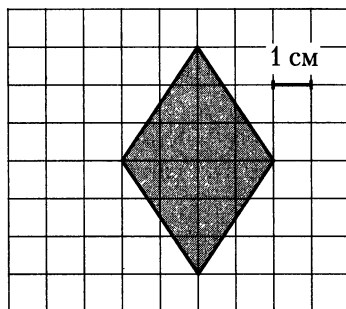
**В6.12.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



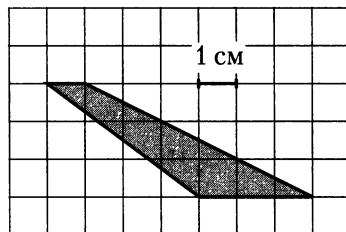
**В6.13.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



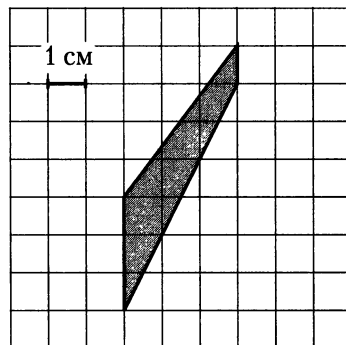
**В6.14.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



**В6.15.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



**В6.16.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.





### Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	12	15	6	6	12	9	12	12

Номер задания	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	12	12	8	8	10	12	12	12

### Задания типа В7

**В7.1.** Найдите значение выражения  $511\log_7 \sqrt[3]{7}$ .

**В7.2.** Найдите значение выражения  $25^{\log_5 \sqrt{17}}$ .

**В7.3.** Найдите значение выражения  $\log_3 7 \cdot \log_7 81$ .

**В7.4.** Найдите значение выражения  $\frac{\log_9 \sqrt{22}}{\log_9 22}$ .

**В7.5.** Найдите значение выражения  $\frac{\log_5 \sqrt{11}}{\log_5 11}$ .

**В7.6.** Найдите значение выражения  $\frac{18}{8^{\log_8 3}}$ .

**В7.7.** Найдите значение выражения  $36^{\log_6 \sqrt{7}}$ .

**В7.8.** Найдите значение выражения  $25^{\log_5 \sqrt{18}}$ .

**В7.9.** Найдите значение выражения  $\frac{52}{5^{\log_5 4}}$ .

**В7.10.** Найдите значение выражения  $\log_{\frac{1}{22}} \sqrt{22}$ .

**В7.11.** Найдите значение выражения  $\frac{18}{3^{\log_3 2}}$ .

**В7.12.** Найдите значение выражения  $7^{\log_{49} 16}$ .

**В7.13.** Найдите значение выражения  $\log_{\frac{1}{20}} \sqrt{20}$ .

**В7.14.** Найдите значение выражения  $30\log_6 \sqrt[6]{6}$ .

**В7.15.** Найдите значение выражения  $\log_{16} \log_3 81$ .

**В7.16.** Найдите значение выражения  $3^{\log_9 36}$ .

**В7.17.** Найдите значение выражения  $\log_7 13 \cdot \log_{13} 49$ .

**В7.18.** Найдите значение выражения  $14 \cdot 10^{\log_{10} 7}$ .

**В7.19.** Найдите значение выражения  $\log_{\frac{1}{17}} \sqrt{17}$ .

**В7.20.** Найдите значение выражения  $\log_{16} \log_5 25$ .

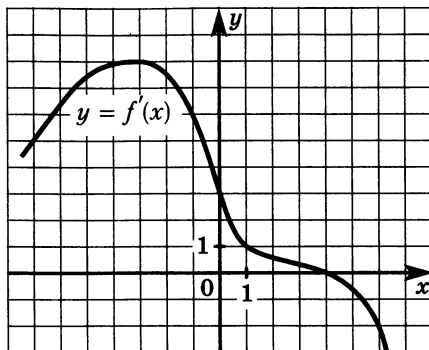
### Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	17	17	4	0,5	0,5	6	7	18	13	−0,5

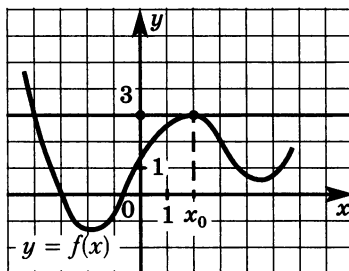
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	9	4	−0,5	5	0,5	6	2	98	−0,5	0,25

### Задания типа В8

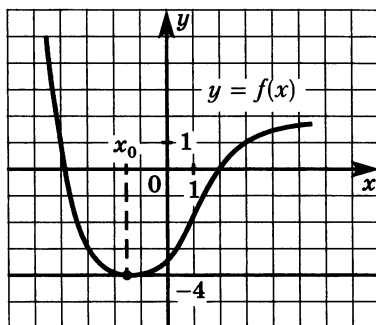
**В8.1.** На рисунке изображен график производной функции  $f$ .  
Найдите точку максимума функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[-6; 6]$ .



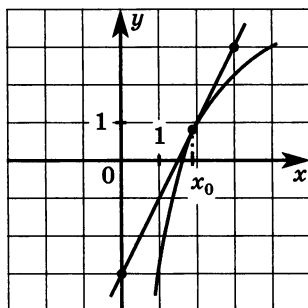
**В8.2.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



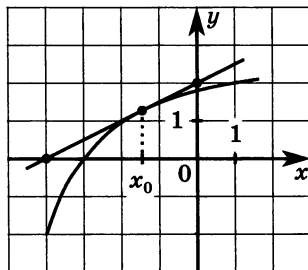
**В8.3.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



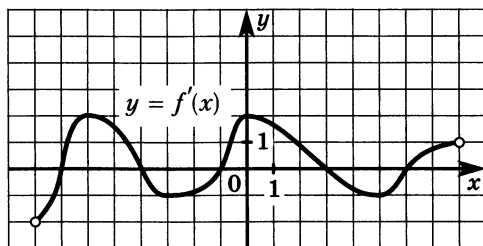
**В8.4.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



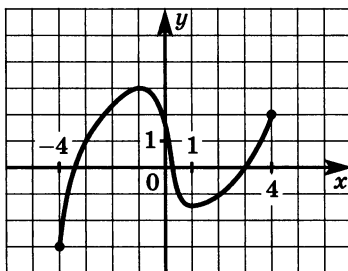
**В8.5.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



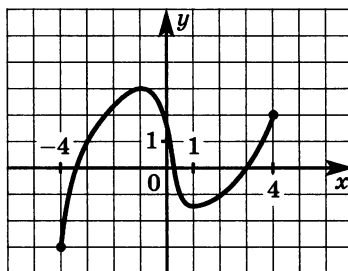
**В8.6.** Функция  $f(x)$  определена на интервале  $(-8; 8)$ . На рисунке изображен график ее производной. Найдите длину наибольшего промежутка возрастания функции  $y = f(x)$ .



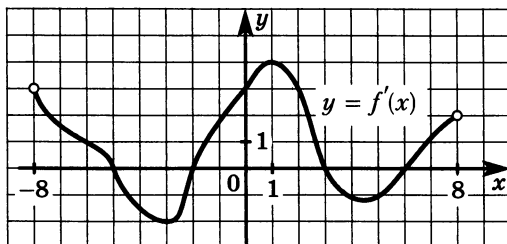
**В8.7.** Функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[-4; 4]$ . На рисунке изображен ее график. Найдите точку минимума этой функции на интервале  $(-3; 3)$ .



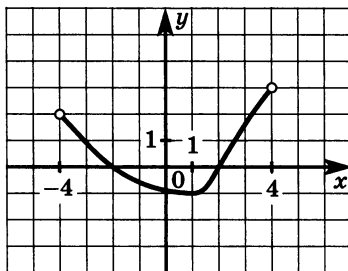
**В8.8.** Функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[-4; 4]$ . На рисунке изображен ее график. В какой точке она принимает свое наименьшее значение?



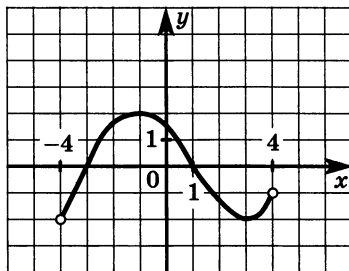
**В8.9.** Функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[-8; 8]$ . На рисунке изображен график ее производной  $y = f'(x)$ . Найдите сумму точек экстремума этой функции.



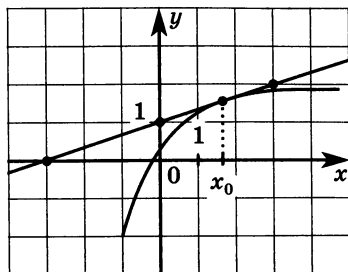
**В8.10.** Функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[-4; 4]$ . На рисунке изображен график ее производной  $y = f'(x)$ . Найдите точку минимума этой функции.



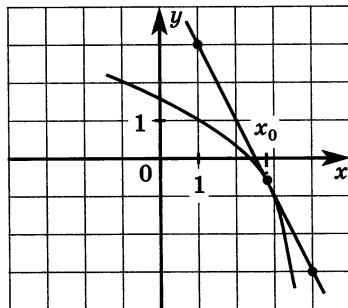
**В8.11.** Функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[-4; 4]$ . На рисунке изображен график ее производной  $y = f'(x)$ . Найдите точку максимума этой функции.



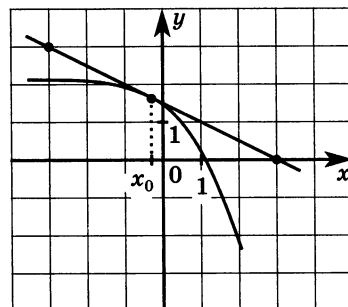
**В8.12.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



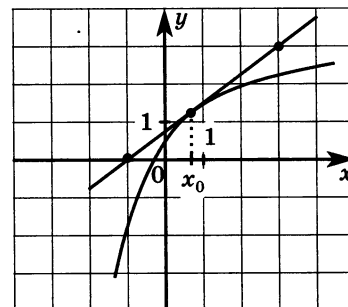
**В8.13.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



**В8.14.** На рисунке изображен график функции и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

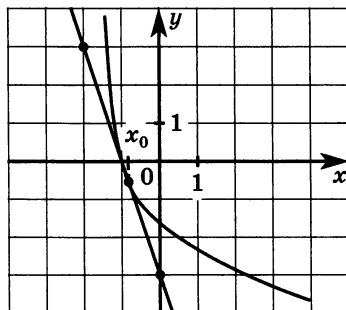


**В8.15.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

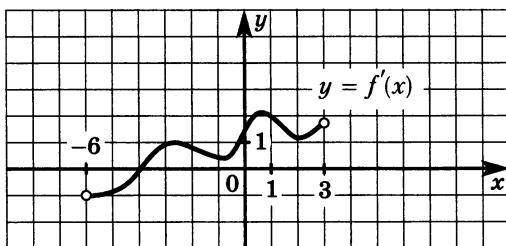




**В8.16.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции в точке  $x_0$ .



**В8.17.** Функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[-6; 3]$ . На рисунке изображен график ее производной. В какой точке отрезка  $[-3; 2]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?



### Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	4	0	0	2	0,5	4	1	-4

Номер задания	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Ответ	2,5	2	1	$\frac{1}{3}$	-2	-0,5	0,75	-3	2

### Задания типа В9

**В9.1.** Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 0,5. Найдите его объем.

**В9.2.** Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 27.

**В9.3.** Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 39.

**В9.4.** Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 22.

**В9.5.** В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 10. Боковые ребра равны  $\frac{3}{\pi}$ . Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

**В9.6.** В цилиндрический сосуд налили 1800 см<sup>3</sup> воды. Уровень воды при этом достиг высоты 16 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 2 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см<sup>3</sup>.

**В9.7.** В цилиндрическом сосуде уровень жидкости равен 9 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

**В9.8.** Объем конуса равен 176. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

**В9.9.** В цилиндрический сосуд налили 2900 см<sup>3</sup> воды. Уровень воды при этом достиг высоты 10 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 8 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см<sup>3</sup>.

**В9.10.** В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1000 см<sup>3</sup> воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 24 см до отметки 27 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в см<sup>3</sup>.

**В9.11.** В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 12 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее всю перелить в другой сосуд той же формы, у которого сторона основания в 2 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.

**В9.12.** В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 7 и 8. Боковые ребра равны  $\frac{8}{\pi}$ . Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

**В9.13.** В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 36 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой сосуд той же формы, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.

**В9.14.** В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 5. Боковые ребра равны  $\frac{7}{\pi}$ . Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

**В9.15.** В цилиндрический сосуд налили 1200 см<sup>3</sup> воды. Уровень воды при этом достигает высоты 10 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см<sup>3</sup>.

**В9.16.** В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 20 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее всю перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого? Ответ выразите в сантиметрах.

### Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	1	81	13	66	150	225	1	22

Номер задания	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	2320	125	3	226	4	87,5	360	5

### Задания типа В10

**В10.1.** В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 90 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  их общее сопротивление задается

формулой  $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ , а для нормального функционирования электросети, общее сопротивление в ней должно быть не меньше 40 Ом.

**В10.2.** Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию  $q$  (единиц в месяц) от ее цены  $p$  (тыс. руб.) задается формулой:  $q = 180 - 10p$ . Определите максимальный уровень  $p$  цены (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц  $r = q \cdot p$  составит не менее 720 тыс. руб.

**В10.3.** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением  $T(t) = T_0 + at + bt^2$ , где  $T_0 = 980$  К,  $a = 30$  К/мин,  $b = -0,2$  К/мин<sup>2</sup>. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1500 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

**В10.4.** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением  $T(t) = T_0 + at + bt^2$ , где  $T_0 = 280$  К,  $a = 26$  К/мин,  $b = -0,2$  К/мин<sup>2</sup>. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1000 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

**В10.5.** Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию  $q$  (единиц в месяц) от ее цены  $p$  (тыс. руб.) задается формулой:  $q = 40 - 5p$ . Определите максимальный уровень  $p$  цены (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц  $r = q \cdot p$  составит не менее 75 тыс. руб.

**В10.6.** Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$ . При каком наименьшем значении температуры нагревателя  $T_1$  КПД этого двигателя будет не меньше 70%, если температура холодильника  $T_2 = 150^\circ$ ?

**В10.7.** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением  $T(t) = T_0 + at + bt^2$ , где  $T_0 = 700$  К,  $a = 48$  К/мин,  $b = -0,4$  К/мин<sup>2</sup>. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1500 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

**В10.8.** Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$ . При каком наименьшем значении температуры нагревателя  $T_1$  КПД этого двигателя будет не меньше 20%, если температура холодильника  $T_2 = 400^\circ$ ?

**В10.9.** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением  $T(t) = T_0 + at + bt^2$ , где  $T_0 = 120$  К,  $a = 30$  К/мин,  $b = -0,2$  К/мин<sup>2</sup>. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1000 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

**В10.10.** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением  $T(t) = T_0 + at + bt^2$ , где  $T_0 = 1200$  К,  $a = 48$  К/мин,  $b = -0,4$  К/мин<sup>2</sup>. Известно, что при температурах нагревателя свыше 2000 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

**B10.11.** Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$ . При каком наименьшем значении температуры нагревателя  $T_1$  КПД этого двигателя будет не меньше 90%, если температура холодильника  $T_2 = 50$ ?

**B10.12.** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением  $T(t) = T_0 + at + bt^2$ , где  $T_0 = 340$  К,  $a = 28$  К/мин,  $b = -0,2$  К/мин<sup>2</sup>. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1000 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

**B10.13.** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением  $T(t) = T_0 + at + bt^2$ , где  $T_0 = 520$  К,  $a = 22$  К/мин,  $b = -0,2$  К/мин<sup>2</sup>. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1000 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

**B10.14.** В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 60 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  их общее сопротивление дается формулой  $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ , а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 10 Ом.

**B10.15.** В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем меняется по закону  $h(t) = 3,2 - 1,44t + 0,16t^2$  ( $h$  — высота в метрах), где  $t$  — время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

**В10.16.** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением  $T(t) = T_0 + at + bt^2$ , где  $T_0 = 50$  К,  $a = 48$  К/мин,  $b = -0,3$  К/мин<sup>2</sup>. Известно, что при температурах нагревателя свыше 500 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

**Ответы**

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	72	12	20	600	5	500	20	500	40	20

Номер задания	11	12	13	14	15	16
Ответ	500	30	30	12	4	10

### Задания типа В11

**В11.1.** Найдите наименьшее значение функции  $y = (x - 15)e^{x-14}$  на отрезке  $[13; 15]$ .

**В11.2.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 12 \operatorname{tg} x - 12x + 3\pi - 7$$

на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ .

**В11.3.** Найдите наименьшее значение функции

$$y = 8x - \ln(x + 5)^8$$

на отрезке  $[-4,5; 0]$ .

**В11.4.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 10\sqrt{2} \cos x + 10x - \frac{5\pi}{2} + 6$$

на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**В11.5.** Найдите точку минимума функции  $y = (15 - x)e^{15-x}$ .

**В11.6.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 16 \operatorname{tg}(x - 16x + 4\pi - 3)$$

на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ .

**В11.7.** Найдите наибольшее значение функции  $y = 3x^2 - 6x - 9$

на отрезке  $\left[\frac{1}{7}; \frac{8}{7}\right]$ .

**В11.8.** Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3 \sin x + \frac{36}{\pi}x + 5$$

на отрезке  $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$ .



**В11.9.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = \ln(x+2)^8 - 8x$$

на отрезке  $[-1,5; 0]$ .

**В11.10.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5\operatorname{tg}x - 5x + 9$$

на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ .

**В11.11.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{26\sqrt{3}}{3} \cos x + \frac{13\sqrt{3}}{3} x - \frac{13\sqrt{3}}{18} \pi + 11$$

на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**В11.12.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 28\operatorname{tg}x - 28x + 7\pi - 7$$

на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ .

**В11.13.** Найдите точку минимума функции

$$y = (2x^2 - 34x + 34)e^{x-34}.$$

**В11.14.** Найдите наименьшее значение функции

$$y = 7x - \ln(x+6)^7$$

на отрезке  $[-5,5; 0]$ .

**В11.15.** Найдите точку минимума функции  $y = (19-x)e^1$

**В11.16.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 6\cos x + 14x - 5$$

на отрезке  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .

**B11.17.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2\sqrt{2} \cos x + 2x - \frac{\pi}{2} + 5$$

на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**B11.18.** Найдите точку максимума функции  $y = (x - 11)^2 e^{x-4}$ .

**B11.19.** Найдите точку максимума функции  $y = (5 - x) e^{x+5}$ .

**B11.20.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 17x - 5 \sin x + 7$$

на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ .

### Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	-1	5	-32	16	16	13	-12	-26,5	8	9

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	24	21	15	-35	20	1	7	9	4	7

## Задания типа В12

**В12.1.** Первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй рабочий, и заканчивает работу над заказом, состоящим из 192 деталей, на 4 часа раньше, чем второй рабочий выполняет заказ, состоящий из 224 таких же деталей. Сколько деталей делает в час второй рабочий?

**В12.2.** Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 437 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если собственная скорость теплохода равна 21 км/ч, стоянка длится 4 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 46 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

**В12.3.** От пристани *A* к пристани *B*, расстояние между которыми равно 420 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью на 1 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт *B* оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

**В12.4.** Два велосипедиста одновременно отправляются в 168-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

**В12.5.** Первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй рабочий, и заканчивает работу над заказом, состоящим из 117 деталей, на 4 часа раньше, чем второй рабочий выполняет заказ, состоящий из 143 таких же деталей. Сколько деталей делает в час первый рабочий?

**В12.6.** Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города *A* в город *B*, расстояние между которыми равно 180 км. На следующий день он отправился обратно в *A* со скоростью на 3 км/ч большей, чем в предыдущий день. Через некоторое время ему пришлось сделать остановку на 3 часа, в результате чего он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из *A* в *B*. Найдите скорость велосипедиста на пути из *A* в *B*. Ответ дайте в км/ч.

**В12.7.** Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 504 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна

23 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 56 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

**В12.8.** Первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй рабочий, и заканчивает работу над заказом, состоящим из 352 деталей, на 6 часов раньше, чем второй рабочий выполняет заказ, состоящий из 418 таких же деталей. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

**В12.9.** Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 320 литров она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?

**В12.10.** Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 240 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 224 литра?

**В12.11.** Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 624 литра она заполняет на 2 минуты быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 650 литров?

**В12.12.** Моторная лодка прошла против течения реки 70 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

**В12.13.** Два велосипедиста одновременно отправляются в 100-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 5 км/ч большей, чем второй и прибывает к финишу на 1 час раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

**В12.14.** Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 270 литров она заполняет на 3 минуты дольше, чем вторая труба?

**B12.15.** Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 783 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 28 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 58 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

**B12.16.** Первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй, и заканчивает работу над заказом, состоящим из 143 деталей, на 2 часа раньше, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

**B12.17.** Два велосипедиста одновременно отправляются в 70-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 3 км/ч большей, чем второй и прибывает к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

**B12.18.** Два велосипедиста одновременно отправляются в 80-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

**B12.19.** Первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй, и заканчивает работу над заказом, состоящим из 340 деталей, на 3 часа раньше, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

**B12.20.** Из  $A$  в  $B$  одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 14 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью 84 км/ч, в результате чего прибыл в  $B$  одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 52 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

### Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	14	2	20	12	13	12	5	19	16	15

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	26	12	20	15	1	11	7	8	17	56

## Примеры заданий с развернутым ответом

### Задания типа C1

Решите систему:

$$\text{C1.1.} \quad \begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x, \\ \cos x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{C1.2.} \quad \begin{cases} \cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x, \\ 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\text{C1.3.} \quad \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$$\text{C1.4.} \quad \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 1, \\ \frac{2 \cos 7x}{\cos 3 + \sin 3} > 2^{\cos 2x}. \end{cases}$$

$$\text{C1.5.} \quad \begin{cases} \cos(x - y) = \frac{1}{2}, \\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{C1.6.} \quad \begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2. \end{cases}$$

$$\text{C1.7.} \begin{cases} x + y = \frac{3\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2. \end{cases}$$

$$\text{C1.8.} \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ 0 < x < \pi, \\ 0 < y < \pi. \end{cases}$$

$$\text{C1.9.} \begin{cases} \sin(x + \sin y) = \sin(x + y), \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$$

$$\text{C1.10.} \begin{cases} \operatorname{ctg} \sqrt{x} = 1, \\ \cos \sqrt{x} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

### Ответы

Номер задания	1	2	3
Ответ	$\frac{\pi + 2\pi n, \pi(12k \pm 5)}{6}n, n, k \in \mathbf{Z}$	$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}$	$\left(\pi \frac{6n+6k+1}{6}; \pi \frac{6n-6k+1}{6}\right);$ $\left(\pi \frac{6n+6k-1}{6}; \pi \frac{6n-6k-1}{6}\right);$ $n, k \in \mathbf{Z}$

Номер задания	4	5
Ответ	$\pi \frac{8n+3}{4}, n \in \mathbf{Z}$	$\left(\pi \frac{6k+6n+1}{6}; \pi \frac{2k-2n-1}{2}\right);$ $\left(\pi \frac{2k+2n+1}{2}; \pi \frac{6k-6n+1}{6}\right);$ $\left(\pi \frac{6k+6n-1}{6}; \pi \frac{2k-2n-1}{2}\right);$ $\left(\pi \frac{2k+2n-1}{2}; \pi \frac{6k-6n-1}{6}\right); n, k \in \mathbf{Z}$

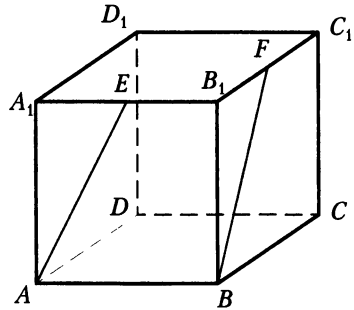
Номер задания	6	7
Ответ	$\left(\pi \frac{2n+1}{2}; \pi \frac{1-6n}{6}\right);$ $n \in \mathbf{Z}$	$\left(\pi \frac{5-12n}{12}; \pi \frac{3n+1}{3}\right);$ $\left(\pi \frac{1-12n}{12}; \pi \frac{3n+2}{3}\right); n \in \mathbf{Z}$

Номер задания	8	9	10
Ответ	$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right);$ $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right);$ $(1; 0); (-1; 0);$ $(0; 1); (0; -1)$	$\left(\frac{\pi(8n-3)}{4}\right)^2, n \in \mathbf{N}$

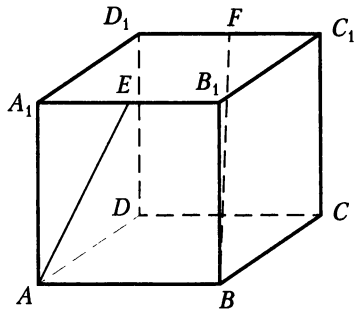


## Задания типа С2

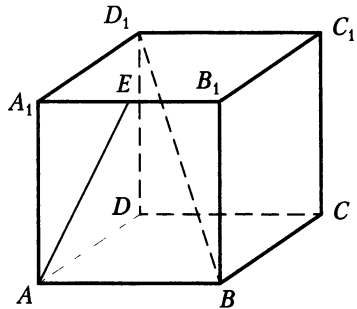
**С2.1.** В кубе  $A...D_1$  точки  $E, F$  — середины ребер соответственно  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$ . Найдите косинус угла между прямыми  $AE$  и  $BF$ .



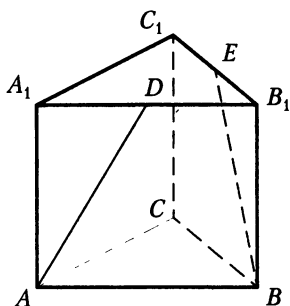
**С2.2.** В кубе  $A...D_1$  точки  $E, F$  — середины ребер соответственно  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$ . Найдите косинус угла между прямыми  $AE$  и  $BF$ .



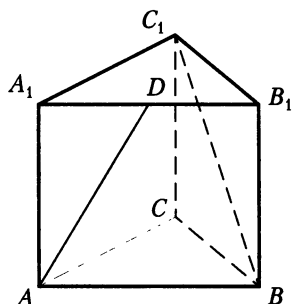
**С2.3.** В кубе  $A...D_1$  точка  $E$  — середина ребра  $A_1B_1$ . Найдите косинус угла между прямыми  $AE$  и  $BD_1$ .



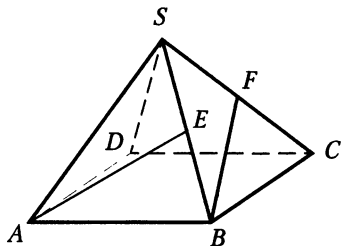
**С2.4.** В правильной треугольной призме  $A...C_1$ , все ребра которой равны 1, точки  $D, E$  — середины ребер соответственно  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$ . Найдите косинус угла между прямыми  $AD$  и  $BE$ .



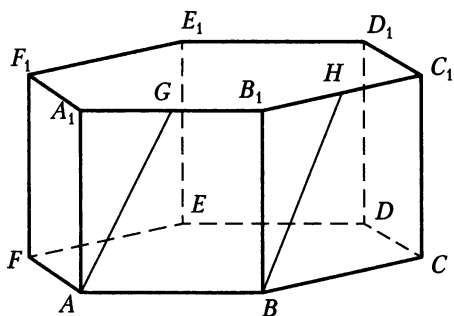
**С2.5.** В правильной треугольной призме  $A...C_1$ , все ребра которой равны 1, точка  $D$  — середина ребра  $A_1B_1$ . Найдите косинус угла между прямыми  $AD$  и  $BC_1$ .



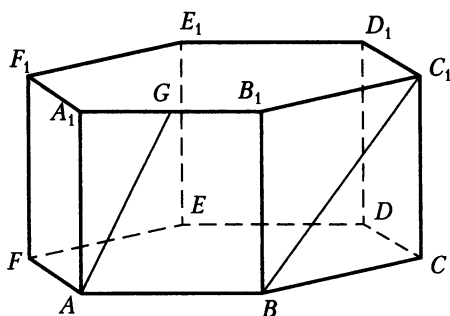
**С2.6.** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, точки  $E, F$  — середины ребер соответственно  $SB$  и  $SC$ . Найдите косинус угла между прямыми  $AE$  и  $BF$ .



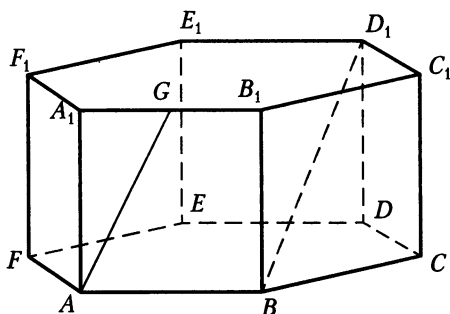
**С2.7.** В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, точки  $G$  и  $H$  — середины ребер соответственно  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$ . Найдите косинус угла между прямыми  $AG$  и  $BH$ .



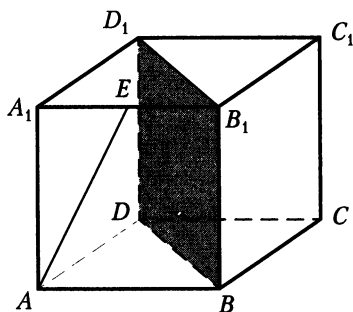
**С2.8.** В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, точка  $G$  — середина ребра  $A_1B_1$ . Найдите косинус угла между прямыми  $AG$  и  $BC_1$ .



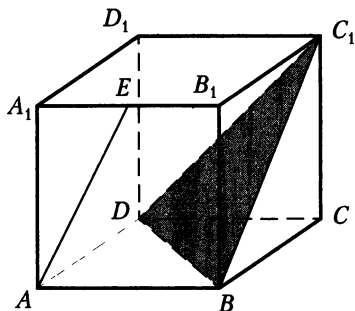
**С2.9.** В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, точка  $G$  — середина ребра  $A_1B_1$ . Найдите косинус угла между прямыми  $AG$  и  $BD_1$ .



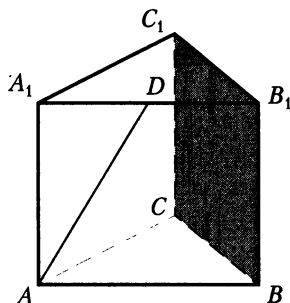
**С2.10.** В кубе  $A...D_1$  точка  $E$  — середина ребра  $A_1B_1$ . Найдите синус угла между прямой  $AE$  и плоскостью  $BDD_1$ .



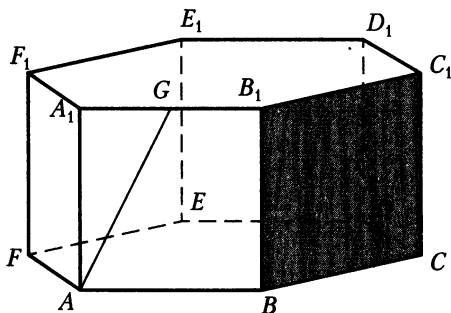
**С2.11.** В кубе  $A...D_1$  точка  $E$  — середина ребра  $A_1B_1$ . Найдите синус угла между прямой  $AE$  и плоскостью  $BDC_1$ .



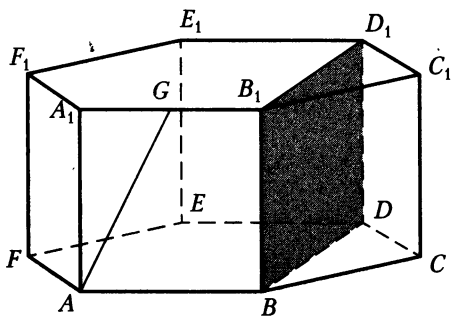
**С2.12.** В правильной треугольной призме  $A...C_1$ , все ребра которой равны 1, точка  $D$  — середина ребра  $A_1B_1$ . Найдите синус угла между прямой  $AD$  и плоскостью  $BCC_1$ .



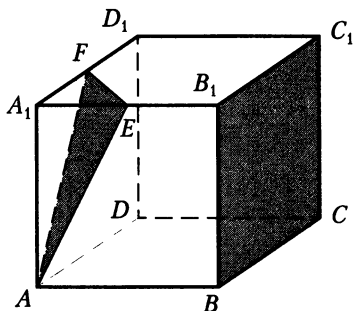
**С2.13.** В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, точка  $G$  — середина ребра  $A_1B_1$ . Найдите синус угла между прямой  $AG$  и плоскостью  $BCC_1$ .



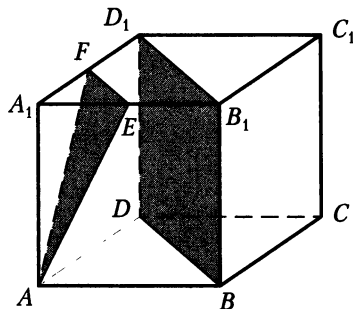
**С2.14.** В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, точка  $G$  — середина ребра  $A_1B_1$ . Найдите синус угла между прямой  $AG$  и плоскостью  $BDD_1$ .



**С2.15.** В кубе  $A...D_1$  точки  $E, F$  — середины ребер соответственно  $A_1B_1$  и  $A_1D_1$ . Найдите тангенс угла между плоскостями  $AEF$  и  $BCC_1$ .



**С2.16.** В кубе  $A...D_1$  точки  $E, F$  — середины ребер соответственно  $A_1B_1$  и  $A_1D_1$ . Найдите тангенс угла между плоскостями  $AEF$  и  $BDD_1$ .



**С2.17.** В правильной треугольной призме  $A...C_1$ , все ребра которой равны 1, точки  $D, E$  — середины ребер соответственно  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$ . Найдите тангенс угла между плоскостями  $ADE$  и  $BCC_1$ .

**С2.18.** Какие значения принимает угол между образующими конуса, если его образующая в два раза больше радиуса основания.

**С2.19.** Найдите угол между непересекающимися медианами грани правильного тетраэдра.

**С2.20.** Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с плоскостью его основания углы  $\varphi$  и  $\psi$ . Найдите угол между этими диагоналями.

**С2.21.** Найдите радиус сферы, внутри которой расположены четыре шара радиуса  $r$ . Каждый из этих шаров касается трех других и поверхности сферы.

**С2.22.** Плоскость пересекает боковые ребра  $SA$ ,  $SB$  и  $SC$  треугольной пирамиды  $SABC$  в точках  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если известно, что  $\frac{SK}{KA} = \frac{SL}{LB} = 2$ , а медиану  $SN$  треугольника  $SBC$  эта плоскость делит пополам.

### Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	0,8	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	0,7	$\frac{3\sqrt{10}}{20}$	$\frac{1}{6}$	0,9	$\frac{\sqrt{10}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$

Номер задания	10	11	12	13	14	15	16	17
Ответ	$\frac{\sqrt{10}}{10}$	$\frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$

Номер задания	18	19	20	21	22
Ответ	$(0; 60^\circ]$	$\arccos \frac{1}{6},$ $\arccos \frac{2}{3}$	$\arccos(\sin \varphi \cdot \sin \psi)$	$r \left( 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$	$\frac{8}{37}$

### Задания типа С3

Решите неравенство:

**С3.1.**  $(0,3)^{2x^2-3x+6} < 0,00243.$

**С3.2.**  $8^{\sqrt{8^x}} > 4096.$

**С3.3.**  $\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) > -1.$

**С3.4.**  $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \geq -1.$

**С3.5.**  $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}.$

**С3.6.**  $8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$

**С3.7.**  $3^{72} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1.$

**С3.8.**  $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(x-2).$

**С3.9.**  $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} < 100.$

**С3.10.**  $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2} - x - 1) \geq 1.$

### Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Ответ	$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$	$\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$	$(1; 2) \cup (3; 4)$	$\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$
Номер задания	5		6	7
Ответ	$\left(-\infty; \log_2(\sqrt{2}-1)\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$		$\left(0; \log_2\left(\frac{1}{3}\right)\right)$	$[0; 64)$
Номер задания	8	9	10	
Ответ	$\left(2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$	$(1; 1000)$	$[-\sqrt{8}; -1) \cup \left[\frac{-2+\sqrt{44}}{5}; +\infty\right)$	

### Задания типа C4

**C4.1.** Боковая сторона  $AB$  трапеции  $ABCD$  равна  $l$ , а расстояние от середины  $CD$  до прямой  $AB$  равно  $m$ . Найдите площадь трапеции.

**C4.2.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника  $AED$  равна 9, а точка  $E$  делит одну из диагоналей в отношении  $1:3$ .

**C4.3.** В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $\alpha$ , сторона  $BC$  равна  $a$ ,  $H$  — точка пересечения высот. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $BHC$ .

**C4.4.** В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $\alpha$ , сторона  $BC$  равна  $a$ ,  $J$  — точка пересечения биссектрис. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $BJC$ .

**C4.5.** На сторонах выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , площадь которого равно единице, взяты точки  $K \in AB$ ,  $L \in BC$ ,  $M \in CD$  и  $N \in DA$ . При этом  $\frac{AK}{KB} = 2$ ,  $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{CM}{MD} = 1$ ,  $\frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}$ . Найти площадь шестиугольника  $AKLCMN$ .

**C4.6.** Около трапеции  $ABCD$  описана окружность радиуса 6 с центром на основании  $AD$ . Найдите площадь трапеции, если основание  $BC$  равно 4.

**C4.7.** В треугольнике  $ABC$ , площадь которого равна  $S$ , биссектриса  $CE$  и медиана  $BD$  пересекаются в точке  $F$ . Найдите площадь четырехугольника  $ADEF$ , если  $BC = a$ ,  $AC = b$ .

**C4.8.** В трапеции  $ABCD$  биссектриса угла  $A$  пересекает боковую сторону  $BC$  в точке  $E$ . Найдите площадь треугольника  $ABE$ , если площадь трапеции равна  $S$ ,  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $CD = c$  ( $c < a$ ).

**C4.9.** Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ , а медианы, проведенные из вершин  $A$  и  $B$ , перпендикулярны.

**C4.10.** Найдите площадь общей части двух ромбов, диагонали которых равны 2 и 3, а один из ромбов получен из другого поворотом на  $90^\circ$  вокруг его центра.



### Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6
Ответ	$lm$	16 или 144	$\frac{a}{2 \sin \alpha}$	$\frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$	$\frac{11}{2}$	$32\sqrt{2}$

Номер задания	7	8	9	10
Ответ	$\frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}$	$\frac{a^2 S}{(a+c)(a+b-c)}$	$\sqrt{11}$	$\frac{12}{5}$

### Задания типа C5

**C5.1.** Найдите все значения  $a$ , для каждого из которых неравенство

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$

выполняется для всех  $x$ .

**C5.2.** Найдите все значения  $a$ , для каждого из которых неравенство

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$

выполняется для всех  $x > 0$ .

**C5.3.** Найдите все значения  $a$ , для каждого из которых неравенство

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$

выполняется для всех  $x < 0$ .

**C5.4.** Найдите все значения  $a$ , для каждого из которых неравенство

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$

выполняется для всех  $-1 < x < 0$ .

**C5.5.** Найдите все значения  $p$ , при каждом из которых для любого  $q$  система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = q|x| + p \end{cases}$$

имеет решения.

**C5.6.** Найдите все значения  $p$ , при каждом из которых найдется  $q$  такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = q|x| + p \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**C5.7.** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых неравенство  $\left| \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$  выполняется при всех  $x$ .

**C5.8.** Найдите все такие целые  $a$  и  $b$ , для которых один из корней уравнения  $3x^2 + ax^2 + bx + 12 = 0$  равен  $1 + \sqrt{3}$ .

**C5.9.** При всех  $a$  решить уравнение  $x - \sqrt{a - x^2} = 1$ .

**С5.10.** Найти все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  
 $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$   
имеет ровно три корня.

**Ответы**

Номер задания	1	2	3	4	5	6
Ответ	$a > 1$	$a > 1$	$a \geq 0$	$a \geq -\frac{1}{3}$	$-1 \leq p \leq 1$	$p = -1,$ $p = 1$

Номер задания	7	8	9	10
Ответ	$-5 < a < 1$	$a = -12,$ $b = 6$	Если $a < 1$ , то решений нет; если $a \geq 1$ , то $x = \frac{\sqrt{2a-1}+1}{2}$	$a = 5$

### Задания типа С6

**С6.1.** Найдите все пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 78, а наибольший общий делитель равен 13.

**С6.2.** Найдите все пары натуральных чисел, разность которых 66, а их наименьшее общее кратное равно 360.

**С6.3.** Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.

**С6.4.** Найдите все пары таких чисел, для которых их сумма, произведение и разность квадратов одинаковы.

**С6.5.** Найдите двузначное число, которое на 19 больше суммы квадратов его десятичных цифр и на 44 больше удвоенного произведения его цифр.

**С6.6.** Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 2430. Найдите все такие числа.

**С6.7.** Найдите все натуральные значения  $n$ , удовлетворяющие уравнению

$$2008 \left[ n \sqrt{1004^2 + 1} \right] = n \left[ 2008 \sqrt{1004^2 + 1} \right],$$

где  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**С6.8.** Натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $\text{НОК}(a, b) = 60$ ,  $\text{НОК}(a, c) = 270$  ( $\text{НОК}(x, y)$  — наименьшее общее кратное чисел  $x$  и  $y$ ). Найдите  $\text{НОК}(b, c)$ .

**С6.9.** На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник с вершинами в узлах сетки клеток, причем числа  $m$  и  $n$  взаимно простые и  $m < n$ . Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 клеток из этого прямоугольника. Найдите все возможные значения  $m$  и  $n$ .

**С6.10.** Существуют ли рациональные числа  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$ , которые удовлетворяют уравнению  $(x + y\sqrt{2})^6 + (u + v\sqrt{2})^6 = 7 + 5\sqrt{2}$ ?

**С6.11.** Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел  $m$  и  $n$ , если при увеличении числа  $m$  на 6 он увеличивается в четыре раза?

**С6.12.** Натуральные числа  $a, b, c, d$  удовлетворяют условию  $ab = cd$ . Может ли число  $a + b + c + d$  быть простым?

**С6.13.** Найдите все натуральные числа, не представимые в виде суммы двух взаимно простых чисел.

### Ответы

Номер задания	12	3	3	4
Ответ	78 и 13 или 26 и 39	90 и 24	28 и 27 или 8 и 3	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ или 0 и 0

Номер задания	5	6	7	8
Ответ	72	54 и 45	$n = 1, 2, 3, \dots 2008$	108 или 540

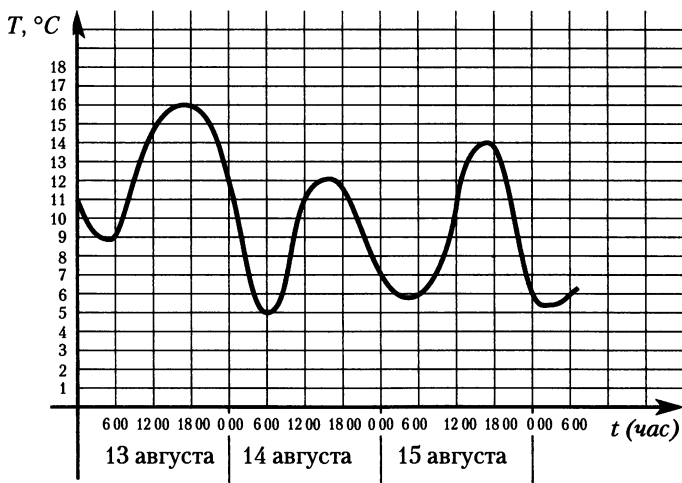
Номер задания	9	10	11	12	13
Ответ	(2; 117) и (3; 59)	таких чисел нет	2 или 6	не может	1, 2, 3, 4 и 6

## ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ ЕГЭ 2010 ГОДА

## Тренировочный вариант 1

## Часть 1

- В1** Железнодорожный билет для взрослого стоит 610 руб. Стоимость билета школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 3 взрослых. Сколько стоят билеты на всю группу? Ответ выразите в рублях.
- В2** На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток, начиная с 0 часов 13 августа. На оси абсцисс откладывается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику разницу максимальной и минимальной температур 14 августа.



- В3** Найдите корень уравнения  $\log_4(2x+7) = \log_4(3x-2)$ .

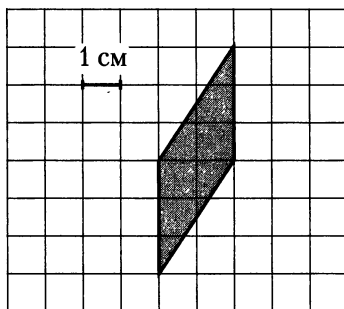
- B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{2}{7}$ ,  $AC = 12\sqrt{5}$ .  
Найдите  $AB$ .

- B5** Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	2,5 руб. за 1 Мб
План «500»	600 руб. за 500 Мб трафика в месяц	2 руб. за 1 Мб сверх 500 Мб
План «800»	850 руб. за 800 Мб трафика в месяц	1,5 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

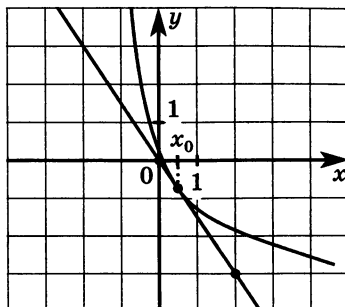
Пользователь планирует, что его трафик составит 700 Мб и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей должен заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 700 Мб?

- B6** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



- B7** Найдите значение выражения  $\frac{\log_{13} \sqrt{63}}{\log_{13} 63}$ .

- B8** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



- B9** Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 21.
- B10** Камень брошен вниз с высоты 12 м. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой  $h(t) = 12 - 4t - 5t^2$  ( $h$  — высота в метрах,  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента броска). Сколько секунд камень будет падать?
- B11** Найдите точку минимума функции  $y = -\frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + 12$ .
- B12** Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой 300 м, за 30 с. Найдите длину поезда (в метрах).

## Часть 2

- C1** Решите систему: 
$$\begin{cases} \sin x = \sin 2y, \\ \cos x = \sin y, \\ 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases}$$
- C2** Три сферы, попарно касаясь друг друга, касаются плоскости треугольника в его вершинах. Найти радиусы сфер, если стороны треугольника равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ .
- C3** Решите неравенство:  $\log_{\sqrt{2x^2 - 7x + 6}}\left(\frac{x}{3}\right) > 0$ .



**C4** В параллелограмме со сторонами  $a$  и  $b$  и острым углом  $\alpha$  проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного этими биссектрисами.

**C5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$  имеет ровно три различных корня.

**C6** Десятичная запись натурального числа состоит из различных цифр, среди которых нет 0. Какое максимальное число цифр может содержать это число, если оно делится нацело на каждую из своих цифр?

### Ответы к тренировочному варианту 1

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6
Ответ	6710	7	9	28	850	6

Номер задания	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	0,5	-1,5	63	1,2	5	450

Номер задания	C1	C2	C3
Ответ	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right), \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{ab}{2c}, \frac{bc}{2a}, \frac{ca}{2b}$	$1 < x < \frac{3}{2}, 2 < x < \frac{5}{2}, 3 < x$

Номер задания	C4	C5	C6
Ответ	$\frac{1}{2}(a-b)^2 \sin \alpha$	$a = -1$	7, например 7198632

## Тренировочный вариант № 2

### Часть 1

**B1** Железнодорожный билет для взрослого стоит 780 руб. Стоимость билета школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 23 школьников и 4 взрослых. Сколько стоят билеты на всю группу? Ответ выразите в рублях.

**B2** На графике показано изменение температуры воздуха в некотором населенном пункте на протяжении трех суток, начиная с 0 часов субботы. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику минимальную температуру воздуха в ночь с субботы на воскресенье (в градусах).



**B3** Найдите корень уравнения  $\log_9(7x + 12) = \log_9(2x - 9)$ .

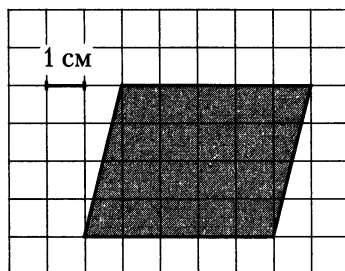
**B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{2}{5}$ ,  $AC = 3\sqrt{21}$ .  
Найдите  $AB$ .

- B5** Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	3,5 руб. за 1 Мб
План «700»	750 руб. за 700 Мб трафика в месяц	3 руб. за 1 Мб сверх 700 Мб
План «1000»	1050 руб. за 1000 Мб трафика в месяц	2,5 руб. за 1 Мб сверх 1000 Мб

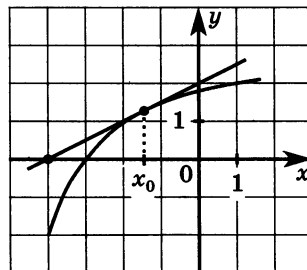
Пользователь планирует, что его трафик составит 850 Мб и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей должен заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 850 Мб?

- B6** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см  $\times$  1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



- B7** Найдите значение выражения  $\frac{\log_7 \sqrt{43}}{\log_7 43}$ .

- B8** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



- B9** Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 17.
- B10** Камень брошен вниз с высоты 36 м. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой  $h(t) = 36 - 3t - 5t^2$  ( $h$  — высота в метрах,  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента броска). Сколько секунд камень будет падать?
- B11** Найдите точку максимума функции  $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 12x + 7$ .
- B12** Маша и Настя могут вымыть окно за 20 мин. Настя и Лена могут вымыть это же окно за 15 мин, а Маша и Лена — за 12 мин. За какое время девочки могут вымыть окно, работая втроем? Ответ дайте в минутах.

## Часть 2

- C1** Решите систему: 
$$\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2. \end{cases}$$
- C2** Найти угол при вершине в осевом сечении конуса, если на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.
- C3** Решите неравенство:  $x^{\lg x} > 10x^{-\lg x} + 3$ .
- C4** Сторона  $AD$  прямоугольника  $ABCD$  в три раза больше стороны  $AB$ ; точки  $M$  и  $N$  делят  $AD$  на три равные части. Найдите  $\sin(\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB)$ .
- C5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система 
$$\begin{cases} y - x^2 = a, \\ x - y^2 = a \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.
- C6** Одно из двух двузначных натуральных чисел в два раза больше другого. Найдите все пары таких чисел, если цифры меньшего из них равны сумме и разности цифр большего.

### Ответы к тренировочному варианту 2

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6
Ответ	12090	10	-4,2	15	1050	16

Номер задания	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	0,5	-0,5	51	2,4	-2	10

Номер задания	C1	C2
Ответ	$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} - k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$	$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$

Номер задания	C3	C4	C5	C6
Ответ	$0 < x < 10^{-\sqrt{\lg 5}}, 10^{\sqrt{\lg 5}} < x$	1	$-\frac{3}{4} \leq a < \frac{1}{4}$	17 и 34