ИНТЕНСИВНАЯ ПОДГОТОВКА

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ 2009

МАТЕМАТИКА

СДАЕМ БЕЗ ПРОБЛЕМ!

ЭКСМО
издательство

ИНТЕНСИВНАЯ ПОДГОТОВКА
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ 2009

О.А. Креславская, В.В. Крылов, В.И. Снегурова, В.Е. Ярмо

МАТЕМАТИКА

СДАЕМ БЕЗ ПРОБЛЕМ!

МОСКВА ЭКСМО 2009

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
К 80

Рецензенты:
Евдокимова Л. В. — *заведующая кабинетом математики Ленинградского областного института развития образования;*

Стефанова Н. Л. — *заведующая кафедрой методики обучения математике Российского государственного университета им. А. И. Герцена*

Пособие подготовлено литературным агентством «Сага» (г. Санкт-Петербург)

Креславская О. А.
К 80 ЕГЭ—2009. Математика : Сдаем без проблем! / О. А. Креславская, В. В. Крылов, В. И. Снегурова, В. Е. Ярмолюк. — М. : Эксмо, 2009. — 192 с.

ISBN 978-5-699-30461-5

Книга адресована *абитуриентам*, поступающим в высшие учебные заведения, а также *учащимся старших классов средних школ, гимназий, лицеев, техникумов* для подготовки к ЕГЭ по математике.

Данное издание включает:

- более 400 заданий в форме ЕГЭ с ответами и комментариями;
- итоговые задания для самопроверки;
- краткий справочный материал.

Книга окажет помощь *учителям* при организации систематической подготовки учащихся к сдаче ЕГЭ по математике.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-699-30461-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике — серьезное испытание в жизни каждого выпускника школы и абитуриента. Количество регионов, сдающих ЕГЭ по математике, от года к году увеличивается. Книга, которую вы держите в руках, предназначена для повторения школьных курсов алгебры, начал анализа и геометрии, систематизации знаний учащегося. Цель издания — помочь выпускнику и абитуриенту, его родителям и учителям в подготовке к сдаче ЕГЭ по математике.

Тематика глав построена в соответствии с содержанием ЕГЭ последних лет. Степени, радикалы, логарифмы традиционно включаются в любой экзамен по математике. Тригонометрическая часть в настоящих материалах достаточно объемна, что и понятно — тригонометрия обычно вызывает у школьников наибольшие затруднения.

Отметка экзамена по алгебре и началам анализа за курс средней школы не зависит от успешности выполнения заданий по геометрии. Баллы за эти задания учитываются только при оценке результатов ЕГЭ как вступительного.

В книгу не вошли как отдельные главы материалы, посвященные решению задач с модулем, с параметрами, хотя названные задания, безусловно, присутствуют в различных разделах. Решение задач с модулем и параметром выходит за рамки базового курса математики, поэтому авторы не сочли возможным изложить эти разделы в настоящем пособии в виде материалов обобщающего характера.

Для самостоятельной работы над этими темами мы можем рекомендовать следующие пособия:

Фельдман Я. С., Жаржевский А. Я. Математика. Решение задач с модулями. — СПб.: «Оракул», 1997. — 304 с.

Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. — М.: «Илекса»; Харьков: «Гимназия», 1999. — 336 с.

Каждый раздел настоящей книги содержит минимальное количество необходимого для решения задач теоретического материала (определения, формулы, алгоритмы и др.), подробное решение (с комментариями) типичных заданий, рубрики: «Заполни пропуски!», «Проверь себя!», «Реши сам!»

Представленные материалы имеют разноуровневый характер. Рубрика ***«Заполни пропуски!»*** адресована в первую очередь учащимся, которые испытывают затруднения при изучении математики. Авторы предполагали, что, выполняя пошагово алгоритм, на который нацеливает имеющийся в этих упражнениях текст, учащиеся будут овладевать приемами решения задач, предложенными в теоретической части и ***«Примерах»*** с решениями. Под рубрикой ***«Проверь себя!»*** приведены эти же задания с заполненными пропусками. В книге содержится более 400 разнообразных задач для самостоятельного решения (***«Реши сам!»***). Работа над ними предполагает, что элементарными действиями ученик уже овладел. Ответы ко всем заданиям для самостоятельного решения приведены в конце книги.

В отличие от заданий, включенных в экзаменационную работу, задания в предлагаемой книге не требуют определенной формы их выполнения — с выбором готового ответа, с кратким ответом или с развернутым ответом. Авторы предполагают, что, научившись решать предложенные задания, учащиеся, оказавшись на экзамене, не растеряются и оформят предлагаемые им задания в соответствующем виде.

Обращаем ваше внимание на то, что часто задания с различными формулировками предполагают одинаковое (или очень близкое) содержание. Например, выполнение следующих неодинаковых внешне заданий сводится к решению одного и того же простейшего логарифмического уравнения:

а) решить уравнение $\log_2(x+1)=4$;

б) найти нули функции $y=\log_2(x+1)-4$;

в) найти значение x, при котором значение функции $f(x)=\log_2(x+1)$ равно 4;

г) найти точки пересечения графиков $f(x)=\log_2(x+1)$ и $g(x)=4$.

Выяснить уровень своей подготовленности к ЕГЭ можно, выполнив примерный, так называемый демонстрационный, вариант экзамена.

Представленные материалы могут использоваться также выпускниками, абитуриентами, учителями и при подготовке к экзаменам, проходящим в традиционной форме.

Авторы выражают благодарность доценту Н. В. Кочуренко за чтение рукописи и высказанные замечания в ее адрес и доценту В. П. Радченко за предоставленные им материалы, использованные в главе 4.

Авторы желают выпускникам и абитуриентам успехов при написании ЕГЭ по математике.

Раздел I
ВЫРАЖЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА

ГЛАВА 1. СТЕПЕНИ И РАДИКАЛЫ

Основные свойства степеней и корней

$$a^x a^y = a^{x+y}; \qquad (1.1)$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \text{ при } a \neq 0; \qquad (1.2)$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \qquad (1.3)$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x; \qquad (1.4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \text{ при } b \neq 0; \qquad (1.5)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } a > 0; m, n \in \mathbb{N}; \qquad (1.6)$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ при четном } n \in \mathbb{N}; \qquad (1.7а)$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ при нечетном } n \in \mathbb{N}; \qquad (1.7б)$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \text{ при } a \neq 0; \qquad (1.8)$$

$$a^0 = 1 \text{ при } a \neq 0. \qquad (1.9)$$

1.1. Вычисление значений выражений, содержащих степени

Произвести вычисления можно намного скорее, если знать значения наиболее часто употребляемых степеней чисел 2, 3, 4, 5, 6 (*табл. 1*)

Таблица 1. Значения степеней

Основание степени	Показатель степени					
	2	3	4	5	6	7
2	4	8	16	32	64	128
3	9	27	81	243	729	
4	16	64	256	1024	4096	
5	25	125	625	3125		
6	36	216				

Пример 1. Вычислить $81^{\frac{1}{4}}$.

Используя данные таблицы, представим $81=3^4$. Тогда по свойству (1.3) $81^{\frac{1}{4}}=\left(3^4\right)^{\frac{1}{4}}=3^{4\cdot\frac{1}{4}}=3^1=3$.

Пример 2. $125^{\frac{1}{6}}=\left(5^3\right)^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{3}{6}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$.

Пример 3. $8^{-\frac{2}{3}}=(2^3)^{-\frac{2}{3}}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$.

Заполни пропуски

Упражнение 1. $32^{\frac{1}{5}}=(\ldots)^{\frac{1}{5}}=\ldots$

Упражнение 2. $16^{-\frac{3}{4}}=(\ldots)^{-\frac{3}{4}}=(\ldots)^{-\ldots}=\frac{1}{\ldots}=\ldots$

Упражнение 3. $27^{\frac{2}{3}}=\ldots$

Упражнение 4. $\left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{1}{18}}=\ldots$

Упражнение 5. $243^{-\frac{3}{5}}=\ldots$

Проверь себя

1) $32^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2$.

2) $16^{-\frac{3}{4}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.

3) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$.

4) $\left(\dfrac{64}{729}\right)^{\frac{1}{18}} = \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^6\right]^{\frac{1}{18}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

5) $243^{-\frac{3}{5}} = \left(3^5\right)^{-\frac{3}{5}} = 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$.

При извлечении корней часто используют формулы (1.7а), (1.7б).

Пример 4. $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$.

Пример 5. $\sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$.

Пример 6. $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$.

Пример 7. $\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{32 \cdot 3} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = 2\sqrt[5]{3}$.

Заполни пропуски

Упражнение 6. $\sqrt[5]{32^3} = \sqrt[5]{(\ldots^5)^3} = \ldots = \ldots$.

Упражнение 7. $\sqrt{125} = \sqrt{5^{\cdots}} = \sqrt{\ldots} \cdot \sqrt{\ldots} = \ldots$.

Упражнение 8. $\sqrt[6]{27^2} = \ldots$.

Упражнение 9. $\sqrt[7]{2^8} = \ldots$.

Упражнение 10. $\sqrt[3]{216^2} = \ldots$.

Проверь себя

6) $\sqrt[5]{32^3} = \sqrt[5]{(2^5)^3} = \sqrt[5]{(2^3)^5} = 2^3 = 8$.

7) $\sqrt{125} = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.

8) $\sqrt[6]{27^2} = \sqrt[6]{(3^3)^2} = \sqrt[6]{3^6} = 3$.

9) $\sqrt[7]{2^8} = \sqrt[7]{2^7 \cdot 2} = 2\sqrt[7]{2}$.

10) $\sqrt[3]{216^2} = \sqrt[3]{(6^3)^2} = 6^2 = 36$.

При наличии в примере нескольких корней преобразуют каждый из них.

Пример 8.

$$\sqrt[3]{625}+\sqrt{16}-\sqrt[3]{40}-\sqrt{25}=\sqrt[3]{5^3\cdot 5}+4-\sqrt[3]{2^3\cdot 5}-5=5\sqrt[3]{5}-1-2\sqrt[3]{5}=$$
$$=3\sqrt[3]{5}-1.$$

Пример 9. $\dfrac{5^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{225}}=\dfrac{5^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5^2\cdot 3^2}}=\dfrac{5^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}}=5^{-\frac{5}{12}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}.$

Реши сам

1.1. $\sqrt[3]{0{,}25}\left(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{32}-4\sqrt[3]{108}\right).$

1.2. $3\sqrt[3]{40}-2\sqrt{45}+2\sqrt{20}+\sqrt[3]{320}.$

1.3. $\sqrt[4]{648\cdot 1250}-\sqrt[3]{256\cdot 54}-\sqrt[5]{7\dfrac{19}{32}}.$

1.4. $\sqrt{3}\,\sqrt[3]{-3}\,\sqrt{27}\,\sqrt[3]{9}-\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{-64}}.$

1.5. $81^{0,75}\cdot 32^{-0,4}-8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}+256^{0,5}.$

1.6. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{16}\right)^{\frac{9}{2}}\cdot 32^{-0,2}}{2^4}.$

1.7. $\dfrac{3\cdot 9^{-1}+\left(16^{-\frac{1}{2}}\right)^5\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-5}}{32^{-\frac{1}{5}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\sqrt{6}\right)^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}}.$

1.2. Преобразование алгебраических выражений, содержащих степени с рациональными показателями

Нередко приходится представлять одночлен, содержащий только одну букву, в виде степени.

Пример 1. Представить в виде степени $(a^{\frac{1}{4}})^3\sqrt[8]{a}$.

Воспользуемся формулами (1.3) и (1.6), тогда $(a^{\frac{1}{4}})^3\sqrt[8]{a}=$ $=a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{1}{8}}$. По формуле (1.1) $a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{7}{8}}$.

Ответ: $a^{\frac{7}{8}}$.

Реши сам

1.8. $a^{\frac{5}{4}}:\sqrt[4]{a}$.

1.9. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{4}{3}}}$.

1.10. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^2\sqrt[6]{a}}{a\cdot a^{-\frac{1}{6}}}$.

1.11. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6 a}{a^{-\frac{3}{4}}\sqrt[3]{a}}$.

1.12. $x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$.

1.13. $\dfrac{x^2\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^2}}}{\sqrt[15]{x^4}}$.

При преобразовании алгебраического выражения, содержащего степени с дробными показателями, полезно использовать метод замены переменной, сводя тем самым данное выражение к выражению, содержащему степени только с целыми показателями.

Пример 2. Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-16}{a^{\frac{1}{3}}-4}-a^{\frac{1}{3}}$.

Степень с наименьшим показателем обозначим новой переменной $a^{\frac{1}{3}}=x$. Тогда $a^{\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2=x^2$; $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-16}{a^{\frac{1}{3}}-4}-a^{\frac{1}{3}}=\dfrac{x^2-16}{x-4}-$

$-x=\dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4}-x=x+4-x=4$.

Пример 3. Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$.

Введем две новые переменные: $a^{\frac{1}{4}}=x$; $b^{\frac{1}{4}}=y$. Тогда $a^{\frac{3}{4}}=x^3$, $a^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2=x^2$; $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{x^3+x^2y}{x+y}=\dfrac{x^2(x+y)}{x+y}=x^2=$ $=\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2=a^{\frac{1}{2}}$.

Заполни пропуски

Упражнение 1. Пусть $a^{\frac{1}{3}}=t$. Тогда $a^{\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\cdots}=t^{\cdots}$; $a=\ldots$; $a^2=\ldots$.

Упражнение 2. Пусть $y^{\frac{3}{4}}=a$. Тогда $y^{\frac{3}{2}}=\ldots$; $y^3=\ldots$.

Упражнение 3. Пусть $a^{\frac{1}{3}}=x$, $b^{\frac{1}{3}}=y$. Тогда $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=\ldots$.

Проверь себя

1) Пусть $a^{\frac{1}{3}}=t$. Тогда $a^{\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2=t^2$; $a=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3=t^3$; $a^2=$ $=(t^3)^2=t^6$.

2) Пусть $y^{\frac{3}{4}}=a$. Тогда $y^{\frac{3}{2}}=\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^2=a^2$; $y^3=\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^4=a^4$.

3) Пусть $a^{\frac{1}{3}}=x$, $b^{\frac{1}{3}}=y$. Тогда $a^{\frac{4}{3}}=x^4$, $b^{\frac{4}{3}}=y^4$, $a=x^3$, $b=y^3$;

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=\frac{x^4y^3+x^3y^4}{x+y}=\frac{x^3y^3(x+y)}{x+y}=x^3y^3=ab.$$

Реши сам

1.14. Сократите дроби:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}$; б) $\dfrac{a\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt[6]{b}}$; в) $\dfrac{a^{0,75}-b^{0,5}}{a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{12}}}$.

1.15. Упростите выражения: а) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$, найдите значение выражения при $a=1{,}2$ и $b=0{,}6$;

б) $\dfrac{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{2}}-z}{y^{\frac{2}{3}}-z}+\dfrac{y}{y+y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{2}}}$; в) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$; г) $\dfrac{\sqrt{a}-a^{-\frac{1}{2}}b}{1-\sqrt{a^{-1}b}}-$ $-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a}+a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}$.

1.3. Показательные уравнения

Уравнение, содержащее неизвестную в показателе степени, называется *показательным*.

Если левая часть уравнения представляет собой степень положительного не равного единице числа, а правая часть является положительным числом, то можно представить обе части в виде степеней с одинаковым основанием, затем приравнять показатели степеней и решить полученное уравнение.

Пример 1. Решить уравнение $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{0,5x-1}=4$.

Представим левую и правую части уравнения таким образом: $\left(2^{-3}\right)^{0,5x-1}=2^2$. Приравняем показатели степеней: $2^{-1,5x+3}=2^2$. Отсюда $-1{,}5x+3=2$.

Ответ: $x=\dfrac{2}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $5^{2x+3}=1$.

Пусть $5^{2x+3}=5^0$. Тогда $2x+3=0$.

Ответ: $x=-\dfrac{3}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение $64^{2x}-\dfrac{1}{4}=0$.

$64^{2x}=\frac{1}{4}$. Преобразуем левую и правую части уравнения: $4^{6x}=4^{-1}$. Тогда $6x=-1$.

Ответ: $x=-\frac{1}{6}$.

Заполни пропуски

Упражнение 1. $7^{x\sqrt{3}}=\sqrt{7}$.

$7^{x\sqrt{3}}=7^{\dots}$ ...

Упражнение 2. $\left(\sqrt{2}\right)^x=2\sqrt{2}$.

$\left(2^{\dots}\right)^x=2^{\dots}$ ...

Упражнение 3. $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3}=1$ ...

Упражнение 4. $\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^x-\sqrt[3]{5}=0$ ...

Проверь себя

1) $7^{x\sqrt{3}}=\sqrt{7}$.

$7^{x\sqrt{3}}=7^{\frac{1}{2}}$. Тогда $x\sqrt{3}=\frac{1}{2}$. Отсюда $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

2) $\left(\sqrt{2}\right)^x=2\sqrt{2}$.

$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x=2^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{x}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$, $\frac{x}{2}=\frac{3}{2}$, $x=3$.

3) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3}=1$.

$\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3}=\left(2\frac{1}{3}\right)^0$, $-x^2-2x+3=0$, $x_1=-3$; $x_2=1$.

4) $\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^x-\sqrt[3]{5}=0$.

$\left(5^{-\frac{3}{2}}\right)^x=5^{\frac{1}{3}}$, $-\frac{3}{2}x=\frac{1}{3}$, $x=-\frac{2}{9}$.

Реши сам

1.16. $0{,}3^{5-2x}=0{,}09$.

1.17. $(2\sqrt[3]{4})^x=8$.

1.18. $225\cdot 15^{2x+1}=1$.

1.19. $\sqrt{2^x}=8^{-\frac{2}{3}}$.

1.20. $\frac{1}{9}\sqrt{3^{3x-1}}=81^{-\frac{3}{4}}$.

1.21. $\sqrt{7^{2x+6}}=\frac{7}{\sqrt[4]{7}}$.

1.22. $\sqrt[3]{4^{x+2}}=\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$.

1.23. $3^{x^2-4x-0,5}=81\sqrt{3}$.

Если одна из частей уравнения представляет собой алгебраическую сумму, то его целесообразно решать методом замены переменной. Преобразованное уравнение обычно является или линейным (тип А), или квадратным (тип Б), или показательным (тип В).

Пример 4. Решить уравнение (тип А) $3^{2x-1}+3^{2x}=108$.

Пусть $3^{2x}=t$, тогда $3^{2x-1}=3^{2x}:3^1=\frac{t}{3}$. $\frac{t}{3}+t=108$; $t=81$. $3^{2x}=81$; $3^{2x}=3^4$; $2x=4$.

Ответ: $x=2$.

Пример 5. Решить уравнение (тип Б) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$.

Пусть $3^x=t$, тогда $9^x=(3^2)^x=(3^x)^2=t^2$. $t^2-4t+3=0$. Отсюда $t_1=1$, $t_2=3$ или $3^x=1$, $3^x=3$.

Ответ: $x=0$; $x=1$.

Пример 6. Решить уравнение (тип В). $3^{x+3}+3^x=7^{x+1}+$ $+5\cdot 7^x$.

Пусть $3^x=a$, $7^x=b$. Тогда $3^{x+3}=3^x\cdot 3^3=27a$, $7^{x+1}=7b$. $27a+$ $+a=7b+5b$; $28a=12b$; $\frac{a}{b}=\frac{12}{28}$; $\frac{a}{b}=\frac{3}{7}\cdot\frac{3^x}{7^x}=\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^x=\left(\frac{3}{7}\right)^1$.

Ответ: $x=1$.

Заполни пропуски

Упражнение 5. Пусть $2^x = t$. Выразите через t:
$2^{x+1} = 2^x \cdot 2 = \dots$.
$2^{x+2} = \dots$.
$2^{x+5} = \dots$.
$2^{x-1} = \dots$.
$2^{2x} = (2^x)^2 = \dots$.
$2^{3x} = \dots$.
$2^{\frac{x}{2}} = \dots$.
$2^{2x+1} = \dots$.
$8^x = \dots$.

Упражнение 6. Решите уравнение $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$.
Это уравнение типа А. Поэтому обозначим через $t = \dots$
Тогда ... . Получим уравнение ...

Упражнение 7. Решите уравнение $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.
Это уравнение типа ... . Поэтому ... .

Проверь себя

5) $2^{x+1} = 2^x \cdot 2 = 2t$.
$2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4t$.
$2^{x+5} = 2^x \cdot 2^5 = 32t$.
$2^{x-1} = 2^x : 2 = \frac{t}{2}$.
$2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$.
$2^{3x} = (2^x)^3 = t^3$.
$2^{\frac{x}{2}} = (2^x)^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}}$.
$2^{2x+1} = 2^{2x} \cdot 2 = 2t^2$.
$8^x = (2^3)^x = 2^{3x} = (2^x)^3 = t^3$.

6) $t = 2^x$. Тогда $2^{x+1} = 2t$, $2^{x-1} = 2^x : 2 = \frac{t}{2}$.

$2t + \frac{t}{2} + t = 28$; $7t = 56$; $t = 8$.
$2^x = 8$.
Ответ: $x = 3$.

7) Это уравнение типа Б. Поэтому обозначим $5^x = t$. Тогда $25^x = t^2$.
$t^2 - 6t + 5 = 0$. Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = 5$. $5^x = 1$, $5^x = 5$.
Ответ: $x = 0$; $x = 0$.

Реши сам

1.24. $4^{x-3} + 4^x = 65$.
1.25. $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$.
1.26. $9 - 2^x = 2^{3-x}$.
1.27. $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.
1.28. $36^x - 204 \cdot 6^{x-1} - 72 = 0$.
1.29. $2 \cdot 5^{2x+1} - 245 \cdot 5^{x-1} - 5 = 0$.
1.30. $4 \cdot 6^{3x+2} - 5^{3x+3} + 6^{3x+1} - 5^{3x+2} = 0$.

1.4 Показательные неравенства

При решении показательных неравенств:

1) их сводят к простейшим неравенствам вида $a^x > a^p$, $a^x < a^p$, используя те же приемы, что и при решении показательных уравнений (описаны в предыдущем разделе);
2) учитывают, что при переходе от неравенства степеней с одинаковыми основаниями к неравенству показателей при $a > 1$ знак неравенства сохраняется,

при $0 < a < 1$ знак неравенства меняется на противоположный.

Пример 1. Решить неравенство $5^{x-1} < \sqrt{5}$.

Представим это неравенство в следующем виде: $5^{x-1} < 5^{\frac{1}{2}}$.

Так как $5 > 1$, то $x - 1 < \frac{1}{2}$. Отсюда $x < 1\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty; 1\frac{1}{2}\right)$.

Пример 2. Решить неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} > \frac{1}{16}$.

Проведем преобразование $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} > \left(\frac{1}{4}\right)^2$.

Так как $0<\frac{1}{4}<1$, то $x-3<2$. Отсюда $x<5$.

Ответ: $(-\infty;\ 5)$.

Пример 3. Решить неравенство $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}\geq 448$.

Пусть $2^{2x-3}=t$. Тогда $2^{2x-2}=2t$, $2^{2x-1}=4t$. $4t+2t+t\geq 448$; $t\geq 64$. $2^{2x-3}\geq 64$. $2^{2x-3}\geq 2^6$.

Так как $2>0$, то $2x-3\geq 6$. Отсюда $x\geq 4{,}5$.

Ответ: $(4{,}5;+\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство $3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^x-10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3<0$.

Пусть $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$. Тогда $\left(\frac{1}{9}\right)^x=t^2$. $3t^2-10t+3<0$; $\frac{1}{3}<t<3$.

$\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$. Отсюда $-1<x<1$.

Ответ: $(-1;1)$.

Реши сам

1.31. $\left(\frac{2}{3}\right)^x>1\frac{1}{2}$.

1.32. $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-9}\leq 1$.

1.33. $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x}\leq 81$.

1.34. $2^{3x}<\sqrt[5]{2}$.

1.35. $3^{\frac{2x+1}{5}}<\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

1.36. $\sqrt{32}\cdot 2^{-4x^2}\geq 8^{3x}$.

1.37. $4^x+2^{x+3}>20$.

1.38. $9^x-7\cdot 3^x-18<0$.

1.39. $147\cdot 7^{x-2}-3\cdot 7^{2-x}\leq 0$.

1.40. $2^{2x+1}-3^{2x+1}<3^{2x}-7\cdot 2^{2x}$.

1.41. $5^{2x+1}-5^{x+2}\leq 5^x-5$.

1.5. Иррациональные уравнения

Иррациональное уравнение — уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня.

Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения — все те значения переменной, при которых имеют смысл левая и правая части уравнения. Например, иррациональное уравнение $\sqrt{x+2}=x$ имеет своей областью допустимых значений все те x, которые удовлетворяют условию $x+2\geq 0$.

При решении иррациональных уравнений методом возведения в степень возможно появление посторонних корней. Важно помнить, что для исключения посторонних корней одного учета ОДЗ недостаточно. Необходимы проверка или указание дополнительного условия.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x+2}=x$.

Способ 1. Возводим обе части уравнения в квадрат: $x+2=x^2$.

Решаем уравнение $x^2-x-2=0$.

$x_1=2$; $x_2=-1$.

Проверка. При $x_1=2$ получаем $\sqrt{2+2}=2$ — верно, следовательно, $x=2$ — корень уравнения.

При $x_2=-1$ получаем $\sqrt{-1+2}=-1$ — неверно, следовательно, $x=-1$ — посторонний корень (заметим, что $x=-1$ удовлетворяет ОДЗ, но корнем не является).

Ответ: 2.

Способ 2. Возводим обе части уравнения в квадрат: $x+2=x^2$ и решаем его с учетом дополнительного условия $x\geq 0$ (*). $x^2-x-2=0$.

Отсюда $x_1=2$; $x_2=-1$ — не удовлетворяет условию (*).

Ответ: 2.

Иногда нахождение ОДЗ в иррациональных уравнениях оказывается полезным и дает более рациональный способ решения.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-2}+2\sqrt{2-x}+x^2=4$.

ОДЗ: $\begin{cases} x-2\geq 0, \\ 2-x\geq 0. \end{cases}$

ОДЗ состоит из единственного числа $x=2$.

Следовательно, 2 — единственное число, которое может оказаться корнем данного уравнения. Выполнив проверку, устанавливаем, что 2 — корень уравнения.

Ответ: 2.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x-4}+3x=\sqrt{12-3x}$.

ОДЗ: $\begin{cases} x-4\ge 0, \\ 12-3x\ge 0; \end{cases}$ $x=4$.

Проверка: $\sqrt{4-4}+12=\sqrt{12-12}$ — неверно.

Ответ: корней нет.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-2x}=8$.

ОДЗ: $\begin{cases} x-3\ge 0, \\ 1-2x\ge 0; \end{cases}$ решений нет.

Ответ: корней нет.

Рассмотрим уравнения, содержащие сумму или разность квадратных корней.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{2x+6}=4-\sqrt{x-2}$.

$\sqrt{2x+6}+\sqrt{x-2}=4$, ОДЗ $x\ge 2$. Возведем обе части уравнения в квадрат. Это преобразование будет равносильным, так как обе части уравнения положительны. $2x+6+$ $+2\sqrt{2x^2-4x+6x-12}+x-2=16$. $2\sqrt{2x^2+2x-12}=12-3x$.

При дальнейшем возведении в квадрат необходимо учесть дополнительное условие $12-3x\ge 0$, то есть $x\le 4$. $4(2x^2+2x-12)=144-72x+9x^2$; $x^2-80x+192=0$. Отсюда $x_{1,2}=$ $=40\pm 8\sqrt{22}$.

Оценка корней показывает, что промежутку $[2;4]$ принадлежит только корень $40-8\sqrt{22}$.

Ответ: $40-8\sqrt{22}$.

Заметим, что в последнем уравнении непосредственную проверку корней подстановкой было бы сделать затруднительно.

Если возводить в квадрат обе части исходного уравнения сразу, без предварительного перехода к сумме корней, то дополнительное условие будет сложнее.

Рассмотрим иррациональные уравнения, содержащие корни третьей степени.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt[3]{2x-1}=1-\sqrt[3]{x-1}$.

$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Возведем обе части уравнения в третью степень: $2x-1+$ $+3\sqrt[3]{(2x-1)^2}\sqrt[3]{x-1}+3\sqrt[3]{(2x-1)}\sqrt[3]{(x-1)^2}+x-1=1$;

$3\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{(2x-1)}+\sqrt[3]{x-1})=3-3x$.

Заметим, что выражение в скобках совпадает с левой частью преобразованного исходного уравнения, поэтому заменим его на 1. Разделим обе части уравнения на 3.

$\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}=1-x$. Возведем обе части уравнения в третью степень: $2x^2-3x+1=1-3x+3x^2-x^3$; $x^3-x^2=0$; $x^2(x-1)=0$. Отсюда $x_1=0$, $x_2=1$.

Проверка показывает, что $x=0$ — посторонний корень.

Ответ: 1.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-17}=1$.

$\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x-17}$.

$x+2=1+3\sqrt[3]{x-17}+3\sqrt[3]{(x-17)^2}+x-17$.

$3\sqrt[3]{(x-17)^2}+3\sqrt[3]{x-17}-18=0$; $\sqrt[3]{(x-17)^2}+\sqrt[3]{x-17}-6=0$.

Решим полученное уравнение методом замены переменной. $t=\sqrt[3]{x-17}$. $t^2+t-6=0$. Отсюда $t_1=-3$, $t_2=2$. $\sqrt[3]{x-17}=-3$ или $\sqrt[3]{x-17}=2$. $x_1=-10$; $x_2=25$.

Проверка показывает, что -10 и 25 являются корнями уравнения.

Ответ: -10; 25.

Часто иррациональные уравнения решают методом замены переменной. Рассмотрим примеры характерных замен.

$\sqrt{2x-1}-2\sqrt[4]{2x-1}=3$. $t=\sqrt[4]{2x-1}$. Тогда $\sqrt{2x-1}=t^2$.

$x^2-6x=5\sqrt{x^2-6x+12}-16$. $t=\sqrt{x^2-6x+12}$. Тогда $t^2=x^2-$ $-6x+12$, $x^2-6x=t^2-12$.

$\sqrt{\dfrac{3x+1}{x-1}}+6\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}=5$. $t=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x-1}}$. Тогда $\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}=\dfrac{1}{t}$.

При решении некоторых иррациональных уравнений полезно использовать свойства монотонности и ограниченности функций.

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$.

Рассмотрим функции $f(x)=\sqrt{x+3}$, $g(x)=\sqrt{x+8}$. Они возрастающие, их сумма $y=f(x)+g(x)$ также возрастает. Так как всякая монотонная функция принимает каждое свое значение лишь при одном значении аргумента, то данное уравнение если и имеет корень, то только один. Подбором устанавливаем, что корень данного уравнения $x=1$.

Ответ: 1.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt[8]{x+2}=-2-3x$.

$f(x)=\sqrt[8]{x+2}$ – возрастающая функция, $g(x)=-2-3x$ – убывающая. Уравнение $f(x)=g(x)$ не может иметь более одного корня. Подбором устанавливаем, что корень уравнения $x=-1$.

Ответ: –1.

Пример 10. Решить уравнение $\sqrt{x^2-4x+5}+$ $+\sqrt{2x^2-8x+17}=4$.

Рассмотрим $f(x)=x^2-4x+5$ и $g(x)=2x^2-8x+17$. $f(x)$ достигает наименьшего значения 1 при $x=2$, $g(x)$ достигает наименьшего значения 9 также при $x=2$. Поэтому $\sqrt{f(x)}\geq 1$, $\sqrt{g(x)}\geq 3$, $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\geq 4$, причем $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=4$ только тогда, когда $\sqrt{f(x)}=1$ и $\sqrt{g(x)}=3$, то есть при $x=2$.

Ответ: 2.

Реши сам

1.42. $2\sqrt{x+5}=x+2$.

1.43. $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-2}=6$.

1.44. $\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+5x-2}=1$.

1.45. $x+12\sqrt{x}-64=0$.

1.46. $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$.

1.47. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$.

1.48. $\sqrt[3]{\dfrac{4x}{2x-3}}+6\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2x-3}{4x}}=5$.

1.49. $\sqrt[3]{20+x}-\sqrt[3]{x-8}=4$.

1.50. $\sqrt[3]{2x-3}-\sqrt[3]{2x-5}=2$.

ГЛАВА 2. ЛОГАРИФМЫ

Логарифмом положительного числа x по основанию a, где $a>0$, $a\neq 1$, называется показатель степени t, в которую нужно возвести число a, чтобы получить x.

$\log_a x=t$, если $a^t=x$.

Для некоторых логарифмов имеются специальные обозначения: десятичный $\log_{10} x=\lg x$, натуральный $\log_e x=\ln x$.

2.1. Вычисление значений логарифмических выражений

Для вычисления значений логарифмов полезно использовать таблицу значений степеней (см. табл. 1, с 8). Необходимо помнить правила возведения чисел в степень с отрицательным и дробным показателем.

Пример 1. $\log_3 243=5$, так как $3^5=243$.

Пример 2. $\log_4 \frac{1}{64}=-3$, так как $4^{-3}=\frac{1}{64}$.

В более сложных случаях можно перейти к решению показательных уравнений.

Пример 3. Вычислить $\log_{32} 64$.

Пусть $\log_{32} 64=t$. По определению логарифма $32^t=64$. Это простейшее показательное уравнение. $32=2^5$, $64=2^6$, поэтому $(2^5)^t=2^6$; $2^{5t}=2^6$, $t=\frac{6}{5}$.

Ответ: $\frac{6}{5}$.

Пример 4. Вычислить $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt{3}}=t$; $(\sqrt{3})^t=\frac{1}{3\sqrt{3}}$. По определениям степени с отрицательным и дробным показателем $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3\sqrt{3}}=3^{-1\frac{1}{2}}$, поэтому $3^{\frac{1}{2}t}=3^{-1\frac{1}{2}}$; $t=-3$.

Ответ: -3.

Заполни пропуски

Упражнение 1. $\log_3 \frac{1}{81} = \ldots$, так как $3^{\ldots} = \frac{1}{81}$.

Упражнение 2. $\log_{0,3} \frac{1}{0,09} = \ldots$, так как ... .

Упражнение 3. $\lg 0,01 = \ldots$.

Упражнение 4. $\log_{27} 9 = t$, $27^t = 9$, $(3^{\ldots})^t = 3^{\ldots}$, ...

Упражнение 5. $\log_4 32 = t$, $4^t = 32$, ... , $t = \ldots$.

Упражнение 6. $\log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}} = \ldots$.

Проверь себя

1) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$.

2) $\log_{0,3} \frac{1}{0,09} = -2$, так как $0,3^{-2} = \left(\frac{3}{10}\right)^{-2} = \frac{100}{9} = 1 : \frac{9}{100} = \frac{1}{0,09}$.

3) $\lg 0,01 = -2$, так как $10^{-2} = 0,01$.

4) $\log_{27} 9 = t$, $27^t = 9$, $(3^3)^t = 3^2$, $3t = 2$, $t = \frac{2}{3}$.

5) $\log_4 32 = t$, $4^t = 32$, $2^{2t} = 2^5$, $t = \frac{5}{2}$, $\log_4 32 = \frac{5}{2}$.

6) $\log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}} = t$, $5^t = \frac{1}{5\sqrt{5}}$, $5^t = 5^{-\frac{3}{2}}$, $t = -\frac{3}{2}$, $\log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}} = -\frac{3}{2}$.

2.2. Преобразование логарифмических выражений

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, p — любое действительное число. Тогда справедливы формулы:

$a^{\log_a x} = x$ — основное логарифмическое тождество; (2.1)

$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$; (2.2)

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2; \tag{2.3}$$

$$\log_a x^p = p\log_a x; \tag{2.4}$$

$$\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\log_a x; \tag{2.5}$$

$$\log_a x = \log_{a^p} x^p. \tag{2.6}$$

Формулы (2.2) и (2.3) можно применять к выражениям, содержащим логарифмы с одинаковыми основаниями.

Следующие формулы позволяют переходить от одного основания логарифмов к другому:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \tag{2.7}$$

в частности

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}. \tag{2.8}$$

Пример 1. Вычислить $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$.

На основе формул (2.2) и (2.3) преобразуем $\log_8 12 -$

$- \log_8 15 + \log_8 20 = \log_8 \frac{12 \cdot 20}{15} = \log_8 16$.

Используя формулы (2.4) и (2.5), представим основание логарифма и логарифмируемое число в виде степеней с одинаковым основанием: $\log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{1}{3} \cdot 4\log_2 2 = \frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Значение $\log_8 16$ можно было искать и как решение уравнения $8^t = 16$.

Пример 2. Вычислить $2\log_{\frac{1}{5}} 10 - \log_{\frac{1}{5}} 28 + \frac{3}{2}\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{49}$.

Перед двумя слагаемыми стоят коэффициенты, поэтому сначала воспользуемся формулой (2.4) и лишь потом форму-

лами (2.2) и (2.3): $\log_{\frac{1}{5}} 10^2 - \log_{\frac{1}{5}} 28 + \log_{\frac{1}{5}}\left(49^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{5}} \frac{100 \cdot 7}{28} =$
$= \log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$.

Ответ: -2.

Пример 3. Вычислить $3^{\log_{\sqrt{3}} 7}$.

Для применения основного логарифмического тождества (2.1) необходимо уравнять основание логарифма и основание степени.

Способ 1. Основание логарифма $\log_{\sqrt{3}} 7$ является степенью числа 3, по формуле (2.5) $\log_{\sqrt{3}} 7 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 7 = 2\log_3 7$. По свойству степеней (1.3) $3^{2\log_3 7} = (3^{\log_3 7})^2 = 7^2 = 49$.

Способ 2. Используя свойство (2.6), преобразуем $\log_{\sqrt{3}} 7 =$
$= \log_{(\sqrt{3})^2} 7^2 = \log_3 49$; $3^{\log_3 49} = 49$.

Способ 3. Основание степени представим степенью основания логарифма: $3 = (\sqrt{3})^2$. Тогда $3^{\log_{\sqrt{3}} 7} = \left((\sqrt{3})^2\right)^{\log_{\sqrt{3}} 7} =$
$= \left((\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}} 7}\right)^2 = 7^2 = 49$.

Ответ: 49.

Пример 4. Вычислить $9^{2\log_3 5}$.

$9^{2\log_3 5} = (3^2)^{2\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^4 = 5^4 = 625$.

Ответ: 625.

Пример 5. Вычислить $10^{3-2\lg 5}$.

$10^{3-2\lg 5} = \frac{10^3}{10^{2\lg 5}} = \frac{1000}{25} = 40$.

Ответ: 40.

Пример 6. Вычислить $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}$.

Способ 1. Применим формулу (2.7) перехода к новому основанию: $\frac{\log_3 8}{\log_3 16} = \log_{16} 8 = \log_{2^4} 2^3 = \frac{3}{4}\log_2 2 = \frac{3}{4}$.

Способ 2. Основания логарифмов одинаковые, логарифмируемые числа представим в виде степеней с равными основаниями, воспользуемся свойством (2.4): $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}=$ $=\frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^4}=\frac{3\log_3 2}{4\log_3 2}=\frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Пример 7. Зная, что $\log_2 a=14$, найти $\log_2 8a$.

$\log_2 8a=\log_2 8+\log_2 a=3+14=17$.

Ответ: 17.

Пример 8. Известно, что $\log_6 2=a$, $\log_6 5=b$. Найти $\log_3 5$.

Заметим, что в условии и требовании фигурируют логарифмы с разными основаниями. Воспользуемся формулой (2.7): $\log_3 5=\frac{\log_6 5}{\log_6 3}$. $\log_6 5=b$ по условию, а в выражении $\log_6 3$ представим 3 как $6:2$, тогда $\log_6 3=\log_6 \frac{6}{2}=\log_6 6-$ $-\log_6 2=1-a$. $\log_3 5=\frac{b}{1-a}$.

Ответ: $\frac{b}{1-a}$.

Заполни пропуски

Упражнение 1. $16^{\log_4 3+0{,}25\log_2 3}=16^{\cdots}\cdot 16^{\cdots}=4^{\cdots}\cdot 2^{\cdots}=\ldots$

Упражнение 2. $\frac{3}{7}\left(\log_2 32+27^{\log_3 4}\right)^{\log_{69} 14}=\frac{3}{7}\left(\ldots+3^{\cdots}\right)^{\log_{69} 14}=$ $=\frac{3}{7}(\ldots)^{\log_{69} 14}=\frac{3}{7}\ldots=\ldots$

Упражнение 3. $\log_3 b=9$. Найдите $\log_3 b^4$. $\log_3 b^4=\ldots\log_3 b=$ $\log_3 b^4=\ldots\log_3 b=\ldots$

Упражнение 4. $\log_2 m=9$, $\log_2 n=2$. Найдите $\log_2(mn^3)$.

$\log_2(mn^3)=\ldots+\ldots=\ldots$

Проверь себя

1) $16^{\log_4 3+0{,}25\log_2 3}=16^{\log_4 3}\cdot 16^{0{,}25\log_2 3}=4^{2\log_4 3}\cdot 2^{4\cdot 0{,}25\log_2 3}=9\cdot 3=27$.

2) $\frac{3}{7}\left(\log_2 32+27^{\log_3 4}\right)^{\log_{69}14}=\frac{3}{7}\left(5+3^{3\log_3 4}\right)^{\log_{69}14}=\frac{3}{7}(5+64)^{\log_{69}14}=$

$=\frac{3}{7}69^{\log_{69}14}=\frac{3}{7}14=6.$

3) $\log_3 b^4=4\log_3 b=4\cdot 9=36$.

4) $\log_2(mn^3)=\log_2 m+\log_2 n^3=9+3\cdot 2=15$.

Реши сам

2.1. $2\log_{0,3}3-\frac{1}{2}\log_{0,3}10000$.

2.2. $4^{\log_2 5+2\log_{0,25}3}$.

2.3. $\log_4\log_{11}121+\log_{16}\sqrt{2}$.

2.4. $\frac{2}{5}\left(\log_3 81+16^{\log_2 3}\right)^{\log_{85}25}$.

2.5. $\frac{5}{3}\log_{\frac{2}{3}}\sqrt[5]{8}-3\log_{\frac{2}{3}}3+\frac{1}{2}\log_{\frac{2}{3}}36$.

2.6. $(3\log_7 2-\log_7 24):(\log_7 3+\log_7 9)$.

2.7. $(\log_3 2^{5,1}-\log_3 2^{1,7}-\log_3 8)\log_2 3$.

2.8. $(16^{0,25-0,5\log_2 4}+25^{\log_{125}8})\cdot 49^{\log_2^{-1}7}$.

2.9. Найдите $\log_5\frac{\sqrt{a}}{b^2}$, если $\log_5 a=4$, $\log_5 b=7$.

2.10. Найдите $\log_6 16$, если $\log_3 2=a$.

2.3. Логарифмические уравнения

При решении логарифмических уравнений их обычно сводят к уравнению вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, используя свойства (2.1)—(2.8). Учитывая монотонность логарифмической функции, это уравнение заменяют уравнением вида $f(x)=g(x)$.

При использовании формул (2.2)—(2.4) справа налево происходит переход к уравнению-следствию, что может повлечь за собой появление посторонних корней. В этом случае необходимо сделать проверку или установить соответствие полученных корней ОДЗ.

При использовании формул (2.2)—(2.4) слева направо возможна потеря корней. Чтобы этого избежать, используют формулы

$$\log_a(x_1x_2)=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|\,; \qquad (2.2')$$

$$\log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a|x_1|-\log_a|x_2|\,; \qquad (2.3')$$

$$\log_a x^p=p\log_a|x|\,. \qquad (2.4')$$

Пример 1. Решить уравнение $\lg(2x+5)=0$.

Способ 1. Воспользуемся определением логарифма: $2x+5=10^0$; $2x+5=1$; $x=-2$.

Способ 2. Так как $0=\lg 1$, то $\lg(2x+5)=\lg 1$. Основания логарифмов равны, следовательно, $2x+5=1$; $x=-2$.

Ответ: -2.

Пример 2. Решить уравнение $\log_3(x-2)+\log_3(x+4)=3$.

ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0; \\ x+4>0; \end{cases}$ $x>2$.

$\log_3(x-2)(x+4)=3$; $x^2+2x-4=27$; $x_1=-7$ — посторонний корень, $x_2=5$.

Ответ: 5.

Пример 3. Решить уравнение $\lg(3-x)-\lg(x+2)=2\lg 2$.

ОДЗ: $\begin{cases} 3-x>0; \\ x+2>0; \end{cases}$ $-2<x<3$.

$\lg\dfrac{3-x}{x+2}=\lg 4$; $\dfrac{3-x}{x+2}=4$; $x=-1$.

Ответ: -1.

Пример 4. $\log_{x+2}(3x^2-12)=2$.

ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2-12>0; \\ x+2>0; \\ x+2\neq 1; \end{cases}$ $x>2$.

$(x+2)^2=3x^2-12$; $x_1=-2$ — посторонний корень, $x_2=4$.

Ответ: 4.

Пример 5. Решить уравнение $1-\log_9(x+1)^2=\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+5}{x+3}$.

ОДЗ: $\begin{cases} \dfrac{x+5}{x+3}>0; \\ (x+1)^2>0; \end{cases}$ $x\in(-\infty;-5)\cup(-3;-1)\cup(-1;+\infty)$.

При решении этого уравнения необходимо применить формулу (2.4?), в противном случае возможна потеря одного из корней уравнения: $1-2\log_9|x+1|=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\frac{x+5}{x+3}$.

Применяя формулу (2.5), получим $1-\log_3|x+1|=\log_3\frac{x+5}{x+3}$; $\log_3\frac{x+5}{x+3}+\log_3|x+1|=1$; $\log_3\frac{(x+5)|x+1|}{x+3}=1$; $\frac{(x+5)|x+1|}{x+3}=3$.

Последнее уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+1>0; \\ \frac{(x+5)|x+1|}{x+3}=3, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x+1<0; \\ \frac{-(x+5)|x+1|}{x+3}=3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1>0; \\ x^2+3x-4=0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x+1<0; \\ x^2+9x+14=0. \end{cases}$$

Отсюда $x=1$ или $x_1=-7$, $x_2=1$; $x\in\{-7;\ -2;\ 1\}$.

Ответ: $-7;\ -2;\ 1$.

Заполни пропуски

Упражнение 1. $\log_3(2x-1)=2$. $2x-1=\ldots$; $\ldots\ \ldots$.

Упражнение 2. $\lg(3x-2)=3-\lg 25$. $\lg(3x-2)=\lg\ldots-\lg 25$; $\lg(3x-2)=\lg\ldots$; $\ldots\ \ldots$.

Упражнение 3. $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=3\frac{2}{3}$. Представим все слагаемые левой части уравнения в виде логарифмов с основаниями 3. ... ; ... .

Упражнение 4. $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$.

ОДЗ: ... . $\log_2(\ldots)=1$. ... ; ... .

Проверь себя

1) $\log_3(2x-1)=2$. $2x-1=3^2$; $x=5$.

Ответ: 5.

2) $\lg(3x-2)=3-\lg 25$. $\lg(3x-2)=\lg 1000-\lg 25$; $\lg(3x-2)=$ $=\lg 40$; $3x-2=40$. $x=14$.

Ответ: 14.

3) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=3\frac{2}{3}$. $\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{3}\log_3 x=3\frac{2}{3}$; $\log_3 x=2$; $x=9$.

Ответ: 9.

4) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$. ОДЗ: $x>3$. $\log_2(x-2)(x-3)=1$; $x^2-5x+6=2$; $x_1=1$ — посторонний корень; $x_2=4$.

Ответ: 4.

Реши сам

2.11. $\log_3\sqrt{2x+1}=1$.

2.12. $\log_2(4-x)+\log_2(1-2x)=2\log_2 3$.

2.13. $\log_2(x^2-3)+1=\log_2(6x-10)$.

2.14. $\log_7(2x^2-7x+6)-\log_7(x-2)=\log_7 x$.

2.15. $\log_3(x-1)+2\log_9(17+x)=7+\log_{\frac{1}{3}} 9$.

2.16. $1+\log_6\frac{x+3}{x+7}=\frac{1}{4}\log_{\sqrt{6}}(x-1)^2$.

2.17. $\log_{x^2}(x+1)^2=1$.

2.18. $\log_5(x-8)^2=2+2\log_5(x-2)$.

2.19. $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3+\log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$.

2.20. $\log_2(x+2)^2+\log_2(x+10)^2=4\log_2 3$.

2.21. $\log_2^2(x+1)^2+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)^7=2$.

2.22. $\log_{3x-3} 3+\log_{(x-1)^2} 27=2$.

2.4. Логарифмические неравенства

Решая логарифмические неравенства, следует помнить, что при переходе от неравенства логарифмов к неравенству подлогарифмических выражений знак неравенства сохраняется, если основание логарифма больше 1, и меняется на противоположный, если положительное основание меньше 1.

При переходе к неравенству подлогарифмических выражений необходимо учитывать ОДЗ.

Таким образом, неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно одной из двух систем неравенств:

при $a > 1$ $\begin{cases} f(x) > g(x); \\ g(x) > 0; \end{cases}$

при $0 < a < 1$ $\begin{cases} f(x) < g(x); \\ f(x) > 0. \end{cases}$.

Пример 1. Решить неравенство $\lg(3-2x) < 2$.

ОДЗ: $3-2x > 0$; $x < \frac{3}{2}$.

$lg(3-2x) < \lg 100$.

Так как $10 > 1$, то $3-2x < 100$. Отсюда $x > -48{,}5$. Учитывая ОДЗ, получаем $-48{,}5 < x < \frac{3}{2}$.

Ответ: $(-48{,}5; \frac{3}{2})$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{0,7}(7x-10) \le 2\log_{0,7} x$.

ОДЗ: $\begin{cases} 7x-10 > 0; \\ x > 0 \end{cases}$ $x > \frac{10}{7}$.

$\log_{0,7}(7x-10) \le \log_{0,7} x^2$.

Так как $0{,}7 < 1$, то $7x-10 \ge x^2$. Отсюда $2 \le x \le 5$ — удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $[2; 5]$.

Пример 3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x+8) > \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + \log_{\frac{1}{2}} 3x$.

ОДЗ: $\begin{cases} x+8 > 0; \\ x-3 > 0; \\ 3x > 0; \end{cases}$ $x > 3$.

$\log_{\frac{1}{2}}(x+8) > \log_{\frac{1}{2}}(3x^2 - 9x)$.

Так как $\frac{1}{2} < 1$, то $x+8 < 3x^2 - 9x$. Отсюда $x < -\frac{2}{3}$; $x > 4$.

Учитывая ОДЗ, получаем $x > 4$.

Ответ: $(4; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство $\log_{x+1}(5-x)>1$.

ОДЗ: $\begin{cases} 5-x>0; \\ x+1>0; \quad x\in(-1;\ 0)\cup(0;\ 5). \\ x+1\neq 1; \end{cases}$

$\log_{x+1}(5-x)>\log_{x+1}(x+1)$. Если $x+1>1$, то $5-x>x+1$.

Отсюда $\begin{cases} x>0; \\ x<2; \end{cases}$ $0<x<2$ — удовлетворяет ОДЗ.

Если $0<x+1<1$, то $5-x<x+1$. Отсюда $\begin{cases} -1<x<0; \\ x>2; \end{cases}$ решений нет.

Ответ: $(0;2)$.

Реши сам

2.23. $\log_2(1-2x)>0$.

2.24. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)>-2$.

2.25. $\log_3(3x-1)<\log_3(2x+3)$.

2.26. $\ln(4x-5)\le\ln(3x-6)$.

2.27. $\log_3\dfrac{5-x}{x-2}>0$.

2.28. $\log_{0,1}(5x-4)\le 2\log_{0,1}x$.

2.29. $\log_{\frac{3}{2}}(x+9)\le\log_{\frac{3}{2}}(x+3)^2$.

2.30. $\log_{0,1}x+\log_{0,1}(x-2)+1\ge\log_{0,1}0{,}3$.

2.31. $\log_2 x-2\log_x 2+1\ge 0$.

2.32. $\log_{2x+1}(3-2x)<1$.

2.33. $\lg^2(-x)+\lg x^2-3<0$.

2.34. $\log_{0,2}(x-1)^2\ge 4$.

2.35. $\log_{(x+1)^2}(x+2)^2\ge 1$.

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \tag{3.1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1. \tag{3.2}$$

Некоторые следствия из основных тригонометрических тождеств

$$\mathrm{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}; \tag{3.3}$$

$$\mathrm{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{3.4}$$

Формулы приведения

	$\beta=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ $\beta=90°\pm\alpha$	$\beta=\pi\pm\alpha$ $\beta=180°\pm\alpha$	$\beta=\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ $\beta=270°\pm\alpha$	$\beta=2\pi\pm\alpha$ $\beta=360°\pm\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\beta$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\beta$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$

Существует простой прием, позволяющий не заучивать все эти формулы, а понимать, каким образом они получаются.

Если β в формуле приведения содержит $\frac{k\pi}{2}$ (или $k\cdot 90°$), где k — нечетное число, то название функции изменяется на парную ей со-функцию. Если же число k — четное, то название функции не изменяется.

Чтобы выяснить, изменяется ли знак, определим четверть, в которую попадает β, если полагать, что $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ $(0°\le\alpha\le 90°)$.

Например: $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$. Поясним полученный результат.

Поскольку в записи присутствует $\frac{3\pi}{2}$ ($3\frac{\pi}{2}$ — нечетное число $\frac{\pi}{2}$), то название функции изменяется на $\sin\alpha$. Далее, если полагать, что $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, то угол $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ попадает в III четверть, в которой функция косинус имеет знак «минус», в то же время $\sin\alpha > 0$. Поэтому, для того чтобы выполнялось равенство, в правой части нужно поставить знак «минус».

Формулы сложения аргументов

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \qquad (3.5)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \qquad (3.6)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \qquad (3.7)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta; \qquad (3.8)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}; \qquad (3.9)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}; \qquad (3.10)$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}; \qquad (3.11)$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}. \qquad (3.12)$$

Формулы двойного аргумента

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha; \qquad (3.13)$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad (3.14)$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},$$

$$\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z, \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}, m\in Z\right); \qquad (3.15)$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}, \left(\alpha\neq\frac{\pi n}{2}, n\in Z\right); \qquad (3.16)$$

$$\sin2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}, \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\right); \qquad (3.17)$$

$$\cos2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}, \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\right). \qquad (3.18)$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}; \qquad (3.19)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}; \qquad (3.20)$$

$$(\cos\alpha\pm\sin\alpha)^2=1\pm\sin2\alpha. \qquad (3.21)$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}; \qquad (3.22)$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}; \qquad (3.23)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}}=\frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\frac{1-\cos2\alpha}{\sin2\alpha}. \qquad (3.24)$$

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right); \qquad (3.25)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right); \qquad (3.26)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right); \qquad (3.27)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right); \qquad (3.28)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad (3.29)$$

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha+\mathrm{arctg}\frac{b}{a}\right),(a>0). \qquad (3.30)$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]; \qquad (3.31)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]; \qquad (3.32)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]. \qquad (3.33)$$

3.1. Вычисление значений выражений, содержащих тригонометрические функции

Задания на вычисление значений тригонометрических выражений бывают различными по формулировке: а) на непосредственное вычисление; б) с учетом ограничений на углы; в) с косвенной характеристикой выражения. Рассмотрим эти типы заданий.

Задачи первого типа предполагают вычисление значений тригонометрических функций без дополнительного условия. Решение таких задач опирается в основном на знание табличных значений тригонометрических функций, свойств тригонометрических функций, в частности периодичности и четности-нечетности, и умение использовать формулы приведения и формулы кратных аргументов. Кроме этого полезными оказываются формулы сложения аргументов тригонометрических функций.

Пример 1. Вычислить: $\sin(4\pi-\frac{\pi}{6})-\cos(-\frac{\pi}{3})-\mathrm{tg}^2(3\pi-\frac{\pi}{4})-$ $-|\cos\pi|+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}$.

Обозначим выражение буквой A и сначала используем свойство периодичности синуса и тангенса, свойство нечетности функций синуса и тангенса и свойство четности функции косинуса: $A=-\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}-|\cos\pi|+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}$. Теперь используем табличные значения тригонометрических функций: $A=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-|-1|+0=-1-1-1=-3$.

Ответ: -3.

Пример 2. Вычислить $A=\sin810°\cos900°+\mathrm{tg}\,585°\times$ $\times\mathrm{ctg}\,1845°+\cos315°\sin45°$.

Сначала выделим полные периоды тригонометрических функций: $A=\sin(2\cdot360°+90°)\cos(2\cdot360°+180°)+\mathrm{tg}(3\cdot180°+45°)\times$ $\times\mathrm{ctg}(10\cdot180°+45°)+\cos(360°-45°)\sin45°$.

Далее используем свойства периодичности тригонометрических функций и свойство четности косинуса: $A=\sin90°\times$ $\times\cos180°+\mathrm{tg}\,45°\mathrm{ctg}\,45°+\cos45°\sin45°$. Подставим значения тригонометрических функций: $A=1\cdot(-1)+1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-1+1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 3. Вычислить $\operatorname{tg}105°$.

Используем сначала формулу приведения: $\operatorname{tg}105° = \operatorname{tg}(90°+15°) = -\operatorname{ctg}15°$.

Вариант 1. Далее воспользуемся формулой (3.24) половинного аргумента для (ко)тангенса и табличными значениями тригонометрических функций:

$$-\operatorname{ctg}15° = -\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{1-\cos 30°}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = -\sqrt{(2+\sqrt{3})^2} =$$

$= -(2+\sqrt{3})$.

Вариант 2. Воспользуемся формулой (3.12) котангенса разности аргументов и далее табличными значениями тангенса:

$$\operatorname{ctg}15° = \operatorname{ctg}(45°-30°) = \frac{\operatorname{ctg}45°\operatorname{ctg}30°+1}{\operatorname{ctg}30°-\operatorname{ctg}45°} = \frac{1\cdot\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2} =$$

$= \sqrt{3}+2$.

Ответ: $-(2+\sqrt{3})$.

Заполни пропуски

Упражнение 1. $\operatorname{ctg}\frac{23\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(\ldots+\frac{2\pi}{3}\right) = \ldots\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \ldots$.

Упражнение 2. $\operatorname{ctg}\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}(\ldots) = -\operatorname{ctg}(3\pi-\ldots) =$
$= -\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \ldots$.

Упражнение 3. $\operatorname{tg}435° + \operatorname{tg}390° = \operatorname{tg}(\ldots+75°) + \operatorname{tg}(\ldots+30°) =$
$= \ldots(45°+30°) + \ldots(30°) = \frac{\ldots45°+\ldots30°}{1-\ldots45°\cdot\ldots30°} + \ldots = \ldots$.

Упражнение 4. $(1+2\cos 240°)(1-2\cos 210°) = \left[1+2\cos(\ldots+60°)\right]\times$
$\times\left[1-2\cos(\ldots+30°)\right] = (1\ldots2\ldots60°)(1\ldots2\ldots30°) = = \ldots\cdot\ldots = \ldots$.

Проверь себя

1) $\operatorname{ctg}\frac{23\pi}{3}=\operatorname{ctg}\left(7\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{17\pi}{6}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{6}=-\operatorname{ctg}\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$.

3) $\operatorname{tg}435^\circ+\operatorname{tg}390^\circ=\operatorname{tg}(360^\circ+75^\circ)+\operatorname{tg}(360^\circ+30^\circ)=\operatorname{tg}(45^\circ+30^\circ)+$

$+\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}30^\circ}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{3}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

4) $(1+2\cos240^\circ)(1-2\cos210^\circ)=\left[1+2\cos(180^\circ+60^\circ)\right]\times$

$\left[1-2\cos(180^\circ+30^\circ)\right]=(1-2\cos60^\circ)(1+2\cos30^\circ)=$

$=0\cdot(1+\sqrt{3})=0.$

Реши сам

3.1. $\cos870^\circ$.

3.2. $\sin^2120^\circ+\sin210^\circ$.

3.3. $\operatorname{tg}405^\circ\sin750^\circ\cos120^\circ$.

3.4. $40\sin^2240^\circ+6\operatorname{tg}225^\circ\operatorname{ctg}315^\circ$.

3.5. $\sin135^\circ-\cos(-45^\circ)-\operatorname{tg}(-315^\circ)$.

3.6. $\frac{2+2\sin60^\circ\cos150^\circ}{\sin150^\circ}$.

Задачи второго типа предполагают вычисление значений тригонометрических функций с каким-либо дополнительным условием. При решении этих задач формулы сложения аргументов играют несколько бóльшую роль, чем в задачах первого типа. Кроме того, особое значение имеет учет знака тригонометрической функции. Заметим, что характер дополнительного условия может быть различным. Чаще всего предлагается вычислить значение тригонометрических функций, если известно значение одной из них (*пример 4*), дополнительной сложностью является изменение вида аргумента (*пример 5*).

Пример 4. Вычислить значения тригонометрических функций $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{15}{8}; \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Начнем с вычисления $tg\alpha$. Используя тригонометрическое тождество (3.2), получаем $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$. Таким образом, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{8}{15}$.

Применяя следствие (3.3) из основных тождеств, получаем $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$. Поскольку $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, то $\cos\alpha<0$. Учитывая это условие, имеем $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{8}{15}\right)^2}}=-\frac{15}{17}$.

Для вычисления $\sin\alpha$ можно, например, использовать основное тригонометрическое тождество. Так как с учетом аргумента $\sin\alpha<0$, получаем $\sin\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=-\frac{8}{17}$.

Ответ: $\mathrm{tg}\alpha=\frac{8}{15}$; $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$; $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$.

Другой, более простой способ нахождения $\sin\alpha$ опирается на определение $\mathrm{tg}\alpha$: $\sin\alpha=\mathrm{tg}\alpha\cos\alpha$. Таким образом, $\sin\alpha=-\frac{15}{17}\cdot\frac{8}{15}=-\frac{8}{17}$.

Пример 5. Вычислить $4\mathrm{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\sin(\pi-\alpha)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $0^\circ<\alpha<180^\circ$.

Прежде всего, воспользовавшись формулами приведения, преобразуем выражения: $4\mathrm{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=4\mathrm{tg}^2\alpha$ и $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$. Таким образом, нужно вычислить $4\mathrm{tg}^2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Используя следствие (3.3) из основных тождеств, получаем $4\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{4}{\cos^2\alpha}-4$. Далее, применив основное тригонометрическое тождество, окончательно получаем $\cos^2\alpha=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ и $4\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{4}{\frac{2}{3}}-4=6-4=2$.

Ответ: 2.

Условие для α в данной задаче оказывается лишним и не влияет на результат.

Реши сам

Вычислить:

3.7. $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{4}{5}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

3.8. $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

3.9. $\mathrm{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8; 2\pi<\alpha<\frac{5\pi}{2}$.

3.10. $\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{15}; 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

3.11. $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{15}; 360^\circ<\alpha<450^\circ$.

3.12. $\mathrm{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-0{,}8; \pi<\alpha<1{,}5\pi$.

3.13. $\mathrm{ctg}2\beta$, если $\sin2\beta=0{,}8; 0{,}25\pi<\beta<0{,}5\pi$.

3.14. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\cos(\pi-\alpha)=\frac{2}{\sqrt{5}}; \mathrm{tg}\alpha>0$.

3.15. $2\cos(\alpha+\pi)$, если $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}; 0^\circ<\alpha<180^\circ$.

3.16. $\sqrt{15}\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\sin(\pi+\alpha)=\frac{1}{4}; -90^\circ<\alpha<90^\circ$.

3.17. $\sqrt{2}\cos135^\circ\,\mathrm{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{4}{5}; -180^\circ<\alpha<0^\circ$.

3.18. $7\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\cos(\pi+2\alpha)=\frac{1}{7}; 0^\circ<\alpha<180^\circ$.

3.19. $6\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\mathrm{ctg}\alpha=2\sqrt{2}; -180^\circ<\alpha<0^\circ$.

Задачи третьего типа предполагают использование формул кратного аргумента (*примеры 6* и *7*) или формул сложения аргументов (*пример 8*), поскольку условие отражает именно такую зависимость.

Пример 6. Найти значение $50\cos2\alpha$, если $\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2$.

Используя формулу (3.13) косинуса двойного аргумента, получаем $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$. Теперь нужно найти значение $\cos\alpha$. Для этого воспользуемся формулой (3.18), выражающей косинус через тангенс половинного аргумента:

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Таким образом, получаем: $\cos\alpha=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}$. Значит, $\cos2\alpha=$ $=2\left(-\frac{3}{5}\right)^2-1=-0{,}28$. Окончательно получаем: $50\cos2\alpha=-14$.

Ответ: -14.

Пример 7. Вычислить $\frac{2\sin\alpha+\sin2\alpha}{2\sin\alpha-\sin2\alpha}$, если $\cos\alpha=\frac{1}{5}$.

Преобразуем данное выражение, используя формулу для синуса двойного аргумента: $\frac{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=$ $=\frac{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

Теперь, подставляя значение $\cos\alpha$, получаем окончательный результат:

$$\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: 1,5.

Реши сам

Вычислите:

3.20. $\mathrm{tg}^2\alpha$, если $\cos2\alpha=\frac{1}{3}$.

3.21. $\mathrm{tg}\alpha$, если $\cos2\alpha=-\frac{4}{5};\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$.

3.22. $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=0{,}6;0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

3.23. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{3}{4};\pi<2\alpha<2\pi$.

3.24. Вычислите наименьшее значение $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin2\alpha=-0{,}8$.

3.25. $\sqrt{26}\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12};\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

3.26. $\sin2\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}6;\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

3.27. $\cos(\pi+2\alpha)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

3.28. $\cos^2 2\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$.

3.29. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5};\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

3.30. $5\sin7\alpha$, если $\operatorname{ctg}\frac{7\alpha}{2}=-3$.

3.31. $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{12}{13};\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

3.32. Найдите все значения $\operatorname{tg}\alpha$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2};\operatorname{tg}4\alpha=\frac{24}{7}$.

3.33. Найдите $25\sin2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=3$.

Пример 8. Вычислить $\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Используем при решении формулу (3.7) сложения аргументов синуса, а затем основное тригонометрическое тождество (3.1) и табличные значения синуса и косинуса: $\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=A.$
Вычислим значение $\cos\alpha$, используя основное тригонометрическое тождество и учитывая промежуток для аргумента (в данном промежутке косинус положительный): $\cos\alpha=$ $=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Подставим найденное для косинуса значение и получим окончательный результат: $A=\frac{1}{6}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$.

Реши сам

Вычислите:

3.34. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$, если $\operatorname{tg}\beta=2$.

3.35. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\beta\right)$, если $\operatorname{tg}\beta=2$.

3.36. $\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=0{,}8; \cos\beta=-\frac{5}{13}; \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi; \frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

3.37. $\cos(\alpha-2\beta)$, $\operatorname{ctg}(2\alpha+2\beta)$, если $\sin\alpha=-0{,}6; \operatorname{tg}\beta=2; \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

3.2 Вычисление значений выражений, содержащих обратные тригонометрические функции

Особенно трудными оказываются задачи, связанные с вычислением значений обратных тригонометрических функций. Для решения таких задач наряду с табличными значениями обратных тригонометрических функций используются следующие тождества:

$\arcsin(-a)=-\arcsin a$, если $|a|\le 1$; (3.34)

$\arccos(-a)=\pi-\arccos a$, если $|a|\le 1$; (3.35)

$\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a$; (3.36)

$\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$; (3.37)

$\sin(\arcsin a)=a$, если $|a|\le 1$; (3.38)

$\cos(\arccos a)=a$, если $|a|\le 1$; (3.39)

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)=a$; (3.40)

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)=a$; (3.41)

$\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$, если $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$; (3.42)

$\arccos(\cos\alpha)=\alpha$, если $0\le\alpha\le\pi$; (3.43)

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha)=\alpha$, если $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$; (3.44)

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)=\alpha$, если $0<\alpha<\pi$, (3.45)

Также можно использовать следствия из основных тождеств, описывающих свойства обратных тригонометрических функций:

$\sin(\arccos a)=\sqrt{1-a^2}$, если $|a|\le 1$; (3.46)

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a)=\frac{1}{a}; \tag{3.47}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin a)=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \text{ если } |a|<1; \tag{3.48}$$

$$\operatorname{tg}(\arccos a)=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}, \text{ если } 0<|a|\le 1; \tag{3.49}$$

$$\sin(\operatorname{arctg} a)=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}; \tag{3.50}$$

$$\cos(\operatorname{arctg} a)=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}; \tag{3.51}$$

$$\cos(\arcsin a)=\sqrt{1-a^2}, \text{ если } |a|\le 1; \tag{3.52}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a)=\frac{1}{a}; \tag{3.53}$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin a)=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}, \text{ если } 0<|a|\le 1; \tag{3.54}$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos a)=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \text{ если } |a|<1; \tag{3.55}$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} a)=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}; \tag{3.56}$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} a)=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \tag{3.57}$$

Пример 1. Найти значение $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

При решении данной задачи будем пользоваться тождеством (3.34) и табличными значениями аркфункций:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\arcsin\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Вычислить $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}1+3\operatorname{arctg}0+\arcsin(-1))$.

При решении этой задачи используется только знание табличных значений тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{4}+3\cdot 0-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}0=0.$$

Ответ: 0.

Пример 3. Вычислить $\cos(\arcsin\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{2})$.

Данное выражение не содержит табличных значений тригонометрических функций, поэтому при вычислении будем использовать следствия из основных тождеств. Но сначала воспользуемся формулой косинуса суммы аргументов (3.5). Таким образом, получим:

$$\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)-\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)=$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{9}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}-\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}=\frac{2\sqrt{2}\cdot 3}{3\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{10}}$.

Пример 4. Вычислить $\arcsin\left(\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

Вариант 1. На первый взгляд, использование тождества (3.42) приводит к получению ответа $\frac{11\pi}{6}$. Но заметим, что аргумент синуса не принадлежит промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому указанный ответ является неверным. Нужно найти такое значение α, при котором $\sin\frac{11\pi}{6}=\sin\alpha, \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Таким значением является $\alpha=-\frac{\pi}{6}$, отличающееся на 2π от $\frac{11\pi}{6}$.

Значит, ответом является число $-\frac{\pi}{6}$.

Вариант 2. Вычисления проведем по порядку, по действиям. Сначала найдем численное значение $\sin\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{2}$, а затем определим $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6}$.

Вариант 2 решения возможен лишь в том случае, когда мы имеем дело с табличными значениями тригонометрических функций.

Пример 5. Вычислить $\arccos(\cos 10)$.

В этом примере возможен ход рассуждений только по первому варианту *примера 4*, так как мы имеем дело с внетабличным значением косинуса. Очевидно, что число 10 не является правильным ответом, поскольку оно не принадлежит промежутку $(0;\pi)$. Таким образом, нам нужно найти такое число α из промежутка $(0;\pi)$, косинус которого равен косинусу 10. Этим значением α является число $4\pi-10$, так как $3\pi<10<4\pi$ и тем самым $0<4\pi-10<\pi$, а также с учетом формул приведения $\cos(4\pi-10)=\cos 10$.

Ответ: $4\pi-10$.

Заполни пропуски

Упражнение 1. $2\arcsin 0{,}5-3\operatorname{arctg}\sqrt{3}=2\cdot\ldots-3\cdot\ldots=\ldots$.

Упражнение 2. $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\cos(\ldots-\ldots)=$
$=\cos\ldots=\ldots$.

Упражнение 3. $\arccos(\cos\frac{10\pi}{3})=\arccos(\cos\ldots)=\ldots$.

Упражнение 4. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2003\pi}{4}\right)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\ldots)=\ldots$.

Проверь себя

1) $2\arcsin 0{,}5-3\operatorname{arctg}\sqrt{3}=2\frac{\pi}{6}-3\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$.

2) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $\arccos\left(\cos\frac{10\pi}{3}\right)=\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)=\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

4) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2003\pi}{4}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right)=\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=-\frac{\pi}{4}$.

Реши сам

3.38. $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.39. $\cos\left(\mathrm{arcctg}\sqrt{3}\right)$.

3.40. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

3.41. $\mathrm{tg}^2\left(5\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-0{,}25\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.42. $3\sqrt{5}\,\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{2}{7}\right)$.

3.43. $\mathrm{tg}^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.

3.44. $\frac{4}{3}\mathrm{tg}\left(\pi-\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

3.45. $5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right)$.

3.46. $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}5+\mathrm{arctg}\frac{1}{7}\right)$.

3.3. Преобразование тригонометрических выражений

Сначала рассмотрим пример, при решении которого используются только формулы зависимости между тригонометрическими функциями одного аргумента.

Пример 1. Упростить выражение $\frac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

Представим числитель дроби в виде $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-1=$ $=\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)$, а затем используем основное тригонометрическое тождество, в результате чего получим:

$$\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

Ответ: $\sin\alpha+\cos\alpha$.

Заполни пропуски

Упражнение 1. $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha = \sin\alpha\cos\alpha\frac{\dots}{\dots} = \cos^2\alpha$.

Упражнение 2. $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 2-(\dots) = 2-\dots = 1$.

Упражнение 3. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha = \dots+\frac{\sin^2\alpha}{\dots} = \frac{\dots+\dots}{\dots} = \frac{1}{\dots}$.

Упражнение 4. $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^2\alpha(\dots+\dots)+$ $+\cos^2\alpha = \dots+\dots = 1$.

Проверь себя

1) $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha = \sin\alpha\cos\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos^2\alpha$.

2) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 2-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 2-1 = 1$.

3) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

4) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$
$\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+\cos^2\alpha = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$.

Теперь рассмотрим пример, при решении которого используются формулы приведения.

Пример 2. Упростить выражение и вычислить его значение при $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\alpha-2\pi)\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)\operatorname{tg}(3\pi+\alpha)}{\sin(\alpha-\pi)\sin(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}.$$

Заметим, что это задание содержит в себе два требования: упростить и вычислить при данном значении аргумента. Поэтому ответ к данному заданию должен содержать две части: результат упрощения и результат вычисления.

Сначала упростим данное выражение. Очевидно, что при этом прежде всего целесообразно использовать формулы приведения (это следует из вида данного выражения). В результате получим :

$$A = \frac{\sin\alpha\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}{-\sin\alpha(-\sin\alpha)\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Теперь сократим полученную дробь и получим $A = \operatorname{tg}\alpha$. Таким образом, в результате упрощения мы получили ответ $A = \operatorname{tg}\alpha$.

Теперь нужно вычислить его значение при $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Значение тангенса при данном значении аргумента равно 1.

Ответ: $A = \operatorname{tg}\alpha$; 1.

Использование формул кратного аргумента также часто встречается при преобразовании тригонометрических выражений.

Пример 3. Упростить выражение $\sqrt{1+\sin 2\alpha} - \sin\alpha$ при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

При решении этой задачи воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и формулой синуса двойного аргумента: $\sqrt{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha} - \sin\alpha$. Теперь воспользуемся формулой квадрата суммы и алгебраическим тождеством $\sqrt{a^2} = |a|$. В результате получим

$$\sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} - \sin\alpha = |\sin\alpha + \cos\alpha| - \sin\alpha.$$

Теперь используем условие для аргумента $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. При этом условии значения синуса и косинуса положительны, поэтому раскроем модуль и получим результат: $\sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha = \cos\alpha$. Это и есть окончательный ответ.

Ответ: $\cos\alpha$.

Для преобразования выражения в произведение можно использовать формулы суммы и разности аргументов различных тригонометрических функций, заменяя при этом число, являющееся табличным значением какой-нибудь тригонометрической функции, соответствующим выражением.

Пример 4. Преобразовать выражение $A = \frac{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$ в произведение.

Сначала используем в числителе и знаменателе формулу преобразования разности квадратов в произведение:

$$A=\frac{\left(\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha\right)\left(\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha\right)}{\left(1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\right)\left(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\right)}.$$

Теперь заменим $\sqrt{3}$ на $\operatorname{tg} 60^\circ$ и используем формулы тангенса суммы и тангенса разности:

$$A=\frac{(\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}\alpha)}{(1-\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}\alpha}=$$
$$=\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha).$$

Ответ: $A=\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)$.

Этот пример является более сложным, чем предыдущие, и поэтому подобный ему может встретиться скорее в третьей части экзамена. Рассмотрим еще один пример более сложного преобразования, в ходе которого используются различные формулы.

Пример 5. Преобразовать в произведение выражение $\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}$.

Сначала вынесем за скобку общий множитель $\sqrt{3}$ из второго и третьего слагаемых и используем формулу косинуса двойного аргумента (3.13): $\sin 6\alpha-\sqrt{3}(2\cos^2 3\alpha-1)=\sin 6\alpha-\sqrt{3}\cos 6\alpha$.

Теперь вынесем за скобку число 2 и воспользуемся табличными значениям синуса и косинуса: $2\left(\frac{1}{2}\sin 6\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6\alpha\right)=$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin 6\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\cos 6\alpha\right)=2\sin\left(6\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$$

В конце мы воспользовались формулой синуса разности аргументов.

Ответ: $2\sin\left(6\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

На втором этапе преобразований можно было применить формулу (3.30), что ускорило бы получение ответа.

При решении примеров на преобразование тригонометрических выражений часто имеет смысл использовать формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и обратно.

Пример 6. Упростить выражение
$(\cos\alpha-\cos2\beta)^2+(\sin\alpha+\sin2\beta)^2$.

Воспользуемся для выражений в каждой из скобок формулой преобразования суммы или разности одноименных тригонометрических функций в произведение и возведем их в квадрат:

$$4\sin^2\left(\frac{\alpha-2\beta}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)+4\cos^2\left(\frac{\alpha-2\beta}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)=$$

$$4\sin^2\left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)\left[\sin^2\left(\frac{\alpha-2\beta}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha-2\beta}{2}\right)\right]=4\sin^2\left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right).$$

При решении этой задачи можно было пойти другим путем — возвести в квадрат соответствующие выражения:

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos2\beta+\cos^2 2\beta+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin2\beta+\sin^2 2\beta=$$

$$=2-2(\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta)=2-2\cos(\alpha+2\beta)=4\sin^2\left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right).$$

Ответ: $4\sin^2\left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)$.

Реши сам

3.47. Упростите $\dfrac{\mathrm{tg}3\alpha}{\mathrm{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\dfrac{1-\mathrm{ctg}^2 3\alpha}{\mathrm{ctg}3\alpha}$.

3.48. Упростите $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$.

3.49. Упростите $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}2\alpha$.

3.50. Упростите $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

3.51. Упростите и вычислите без таблиц $18\mathrm{ctg}\,225^\circ\,\mathrm{tg}\,45^\circ+$ $+8\cos^2 300^\circ$.

3.52. Упростите и вычислите при $\beta=\dfrac{2}{3}\pi$:

$$A=\cos(2\beta-3\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\sin(\pi+\beta).$$

3.53. Преобразуйте выражение $\mathrm{tg}\,9^\circ-\mathrm{tg}\,27^\circ-\mathrm{tg}\,63^\circ+\mathrm{tg}\,81^\circ$.

3.54. Преобразуйте в произведение $A=1+\sin2\alpha+\cos2\alpha$.

3.55. Преобразуйте в произведение $2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin2\alpha-1$.

3.56. Преобразуйте в произведение $1+\sin\alpha+\cos(5\pi+\alpha)$.

3.57. Преобразуйте в произведение $\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha$.

3.58. Преобразуйте в произведение $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$.

3.59. Преобразуйте в произведение $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha$.

3.60. Преобразуйте в произведение

$$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)-1.$$

3.4. Тригонометрические уравнения

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся уравнения вида:

$\sin x=a;$

$\cos x=a;$

$\operatorname{tg} x=a;$

$\operatorname{ctg} x=a.$

Для каждого из простейших тригонометрических уравнений определены формулы, справедливость которых обосновывается с помощью тригонометрического круга и с учетом периодичности тригонометрических функций.

$\sin x=a, |a|>1$, решений нет;

$\sin x=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z;$

$\sin x=-1,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z;$

$$\sin x=a, |a|<1,\ \left[\begin{aligned}&x=\arcsin a+2\pi k;\\&x=\pi-\arcsin a+2\pi k;\end{aligned}\right.\quad k\in Z. \qquad (3.58)$$

В последнем случае для сокращения записи используют формулу:

$$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k, k\in Z. \qquad (3.58а)$$

$\cos x=a,\ |a|>1$, решений нет.

$\cos=1,\ x=2\pi k, k\in Z.$

$\cos=-1,\ x=\pi+2\pi k, k\in Z.$

$$\cos x=a,\ |a|<1,\ x=\pm\arccos a+2\pi k, k\in Z. \qquad (3.59)$$

Решения уравнений $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ записываются существенно проще:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in Z \tag{3.60}$$

и, соответственно,

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in Z . \tag{3.61}$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = \frac{2}{3}$.

Так как $\frac{2}{3} < 1$, воспользуемся формулой (3.58а).

Ответ: $x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{3} + \pi k, k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\cos x = \frac{5}{4}$.

Так как $\frac{5}{4} > 1$, то уравнение не имеет решения.

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

По формуле (3.61) $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Теперь рассмотрим несколько примеров более сложных задач.

Пример 4. Решить уравнение $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Это уравнение сводится к простейшему $\cos t = \frac{1}{2}$, где $t = 3x - \frac{\pi}{4}$. Тогда $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. Далее получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \\ 3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \end{array}\right. n \in Z; \quad \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi n; \\ 3x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n; \end{array}\right. n \in Z;$$

и окончательно:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3}; \\ x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3}; \end{array}\right. n \in Z.$$

Ответ: $\frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3}; -\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$.

Преобразования можно было выполнить и иным способом:

$$3x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ 3x=\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3},\ \text{где}\ n\in Z.$$

Тогда в ответе было бы записано: $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$.

Пример 5. Решить уравнение: $(3\operatorname{tg}2x-2)(2\sin^2 x-1)=0$.

Это уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}3\operatorname{tg}2x-2=0;\\ 2\sin^2 x-1=0;\end{array}\right.$

далее: $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}2x=\frac{2}{3};\\ \sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l}2x=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n, n\in Z;\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z,\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z;\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z.\end{array}\right.$

Однако полученный результат не является окончательным, поскольку не была учтена область определения данного уравнения. Из нее должны быть исключены числа, для которых не существует $\operatorname{tg}2x$. Очевидно, что проверке подлежат только решения второго уравнения. Если $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, то $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$, а это как раз те значения аргумента, при котором тангенс не определен. Таким образом, решения второго уравнения совокупности решениями исходного уравнения не являются.

Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Реши сам

Решите уравнения:

3.61. $4\cos^2 2x=3$.

3.62. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

3.63. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.64. $\operatorname{tg}^2 3x = 3$.

3.65. $\operatorname{tg}^3 x = \frac{1}{2}$.

3.66. $4\sin 3x \cos 3x = 1$.

3.67. $\sin 3x \cos 2x = 0$.

3.68. $\cos x(\operatorname{tg} x + 1) = 0$.

3.69. $\cos 2x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

3.70. $\sin 3x \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

3.71. $(2\operatorname{tg} x - 1)\left(4\cos^2 \frac{x}{3} - 3\right) = 0$.

3.72. $\left(3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cos x \sin x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 0$.

Часто предлагается решить тригонометрическое уравнение на некотором промежутке. Рассмотрим такой пример.

Пример 6. Решить уравнение $(\cos^2 x - 1)\left(2\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0$ на полуинтервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Сначала решим данное уравнение. Оно сводится к совокупности $\left[\begin{array}{l}\cos x = \pm 1;\\ \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2},\end{array}\right.$ решениями которой является

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z;\\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\\ \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z;\\ x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k;\\ x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Выбор тех значений x, которые принадлежат указанному промежутку, можно производить в уме, подставляя вместо n и k последовательно целые числа, а можно использовать для этого числовую прямую с нанесенным на нее данным промежутком и ближайшими к нему решениями данного уравнения.

Ответ: $0; \frac{\pi}{3}$.

Реши сам

Решите уравнения на указанных промежутках:

3.73. $2\sin x = -1$; $\left(-\frac{\pi}{6}; 2\pi\right)$.

3.74. $4\cos^2 2x = 1$; $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right]$.

3.75. $\mathrm{tg}^2 x = 1$; $\left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right)$.

3.76. $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2$; $[-\pi; \pi)$.

3.77. $\sin x \cos\frac{\pi}{8} + \cos x \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}$; $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

3.78. $\left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x + 1\right)(4\cos 2x + 3) = 0$; $[2\pi; 3\pi]$.

Большинство тригонометрических уравнений сводится к простейшим. При решении тригонометрических уравнений используются общие методы решения уравнений — метод разложения на множители и метод замены переменных. Кроме этого, можно выделить некоторые специфические частные приемы решения тригонометрических уравнений, например метод оценки. *Примеры 1* и *2* являются простыми примерами использования общих методов. Рассмотрим теперь более сложные примеры использования этих методов.

Пример 7. Решить уравнение $\sin 2x + \sin x = 2\cos x + 1$.

Применив в левой части данного уравнения формулу синуса двойного аргумента и вынеся за скобку общий множитель $\sin x$, получим: $\sin x(2\cos x + 1) = 2\cos x + 1$. Теперь в правой и левой частях уравнения мы имеем общий множитель $2\cos x+1$, который и выносим за скобки: $(2\cos x+1)(\sin x-1)=0$.

Это уравнение равносильно совокупности двух простейших тригонометрических уравнений $\left[\begin{array}{l}2\cos x+1=0;\\ \sin x-1=0,\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{2};\\ \sin x=1.\end{array}\right.$

Теперь, используя формулы для решения простейших тригонометрических уравнений, получаем окончательный результат:

$$\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z;\\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k; \dfrac{\pi}{2}+2\pi n, k,n\in Z$.

Пример 8. Решить уравнение $\sin^2 x+\cos^2 2x+\sin^2 3x=1$.

Перенеся единицу в левую часть, разложим выражение на множители. Для этого сначала домножим уравнение на 2 и понизим степени первого и третьего слагаемых, используя формулу (3.19) понижения степени: $1-\cos 2x+2\cos^2 2x+1-\cos 6x-2=0$; $2\cos^2 2x-(\cos 2x+\cos 6x)=0$.

Теперь используем формулу (3.25) преобразования суммы косинусов в произведение и, получив общий множитель, выносим его за скобку:

$$2\cos^2 2x-2\cos 4x\cos 2x=0;\ 2\cos 2x(\cos 2x-\cos 4x)=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0;\\ \cos 2x-\cos 4x=0.\end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности имеет решение $2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ или $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z$.

Для решения второго уравнения можно предложить по крайней мере три способа.

Способ 1 — использование формулы (3.26) преобразования разности косинусов в произведение: $-2\sin 3x\sin(-x)=0$.

Это уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\sin 3x=0;\\ \sin x=0,\end{array}\right.$ и далее $\left[\begin{array}{l}3x=\pi n, n\in Z;\\ x=\pi m, m\in Z;\end{array}\right.$, решением которой является $x=\frac{\pi n}{3}, n\in Z$.

Способ 2 — использование формулы косинуса двойного аргумента и решение квадратного уравнения относительно $\cos 2x$: $\cos 2x-2\cos^2 2x+1=0$.

В данном случае удобно ввести новую переменную $t=\cos 2x$ и решить вспомогательное уравнение $2t^2-t-1=0$, решениями которого являются $\left[\begin{array}{l}t=1;\\ t=-\frac{1}{2}.\end{array}\right.$

Таким образом, тригонометрические уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\cos 2x=1;\\ \cos 2x=-\frac{1}{2},\end{array}\right.$ решениями которой являются $\left[\begin{array}{l}2x=2\pi l, l\in Z;\\ 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi r, r\in Z;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\pi l, l\in Z;\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi r, r\in Z.\end{array}\right.$

Объединяя эти решения, получаем $x=\frac{\pi n}{3}, n\in Z$, что совпадает с решением, полученным первым способом.

Способ 3 — использование условия равенства значений косинуса: $\cos 2x=\cos 4x$. Это уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}2x=4x+2\pi m, m\in Z;\\ 2x=-4x+2\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$

Решая ее, получаем $\left[\begin{array}{l}x=-\pi m, m\in Z;\\ x=\frac{\pi n}{3}, n\in Z.\end{array}\right.$

Объединяя решения, имеем $x=\frac{\pi n}{3}, n\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$; $\frac{\pi n}{3}, n\in Z$.

В этом случае мы использовали способ введения новой переменной для решения уравнения вида $F(T(x))=0$, где $T(x)$ — какая-то тригонометрическая функция, а $F(t)$ — какая-то алгебраическая функция (в нашем примере она была квадратичной).

Способ введения новой переменной применяется также для решения уравнений вида $P(\cos x; \sin x)=0$, где левая часть представляет собой однородный многочлен относительно $\cos x$ и $\sin x$.

Достаточно часто используется универсальная тригонометрическая подстановка — выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента (формулы 3.15 – 3.18).

Пример 9. Решить уравнение $\operatorname{tg} 2x+\sin 2x=\frac{16}{15}\operatorname{ctg} x$.

Используя формулы (3.15) и (3.17), получим: $\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+$ $+\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{16}{15\operatorname{tg} x}$ (*).

Введем новую переменную $t=\operatorname{tg} x$ и получим: $\frac{2t}{1-t^2}+$ $+\frac{2t}{1+t^2}=\frac{16}{15t}$.

Разделим уравнение на 2 и приведем к общему знаменателю: $15t^2(1+t^2)+15t^2(1-t^2)=8(1-t^4)$; $15t^2+15t^4+15t^2-$ $-15t^4=8-8t^4$; $8t^4+30t^2-8=0$.

Это уравнение является биквадратным. Разделив его на 2 и решив, получим $t^2=\frac{1}{2}$ (второй вариант $t^2=-2$ не приводит к решению), поэтому $t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Таким образом, $\operatorname{tg} x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; эти значения не являются табличными для тангенса, и запись ответа будет содержать аркфункцию: $x=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

Однако следует помнить, что при использовании универсальной тригонометрической подстановки возможна потеря корней, поскольку область определения может сужаться. Проверим, не произойдет ли этого в данном случае.

Область определения исходного уравнения определяется системой неравенств $\begin{cases} \sin x \neq 0; \\ \cos 2x \neq 0, \end{cases}$ решением которой является $\begin{cases} x \neq \pi k; \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}; \end{cases}$ $k, n \in Z$.

Область определения уравнения (*) определяется системой неравенств $\begin{cases} \sin x \neq 0; \\ \cos x \neq 0; \\ \operatorname{tg} x \neq \pm 1, \end{cases}$ решением которой является

$$\begin{cases} x \neq \pi k; \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi l; \quad k, l, n \in Z. \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}; \end{cases}$$

Таким образом, область определения действительно сузилась, из исходной области определения в последнюю не вошли числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z$. Это значит, что возможна потеря корней. Поэтому нужно проверить подстановкой, не являются ли эти числа корнями исходного уравнения: $\operatorname{tg}\left[2(\frac{\pi}{2} + \pi l)\right] + \sin\left[2(\frac{\pi}{2} + \pi l)\right] = \frac{16}{15}\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \pi l)$; $\operatorname{tg}(\pi + 2\pi l) + \sin(\pi + 2\pi l) = \frac{16}{15}\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \pi l)$. Видим, что обе части этого уравнения равны 0, то есть проверенные числа являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, k \in Z$; $\frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z$.

Реши сам

3.79. $2\sin x+\operatorname{tg}x=0$.

3.80. $(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x$.

3.81. $1+\sin x\cos 2x=\sin x+\cos 2x$.

3.82. $\cos 2x-\cos 8x+\cos 6x=1$.

3.83. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

3.84. $\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x=0$.

3.85. $\cos 3x+\sin x\sin 2x=0$.

3.86. $\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=1-\sin 2x$.

3.87. $\cos 2x+3\sin x=2$.

3.88. $\sin 2x+2\operatorname{ctg}x=3$.

3.89. $\dfrac{\operatorname{ctg}2x}{\operatorname{ctg}x}+\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\operatorname{ctg}2x}+2=0$.

3.90. $\operatorname{tg}2x=3\operatorname{tg}x$.

3.91. $\cos x=1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

3.92. $\dfrac{1}{2}+\sin x=\cos x+\sin x\cos x$.

3.93. $\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

3.94. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=1+\sin x$.

3.95. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\cos x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}$.

3.96. $4\sin x+9\cos x=5$.

3.97. $\sin 4x=2\operatorname{tg}x$.

3.98. $|0{,}5-\sin x|=\sin x$.

ГЛАВА 4. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

При решении текстовых задач часто возникает потребность в использовании свойств арифметической и геометрической прогрессий.

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — числовая последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом,назваемым *разностью прогрессии.*

Обозначения: a_1 — первый член прогрессии, a_n — n-й член прогрессии, d — разность прогрессии, S_n — сумма первых n членов прогрессии.

$$a_{n+1} = a_n + d; \quad (4.1)$$

$$a_n = a_1 + d(n-1); \quad (4.2)$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ при } n \geq 2; \quad (4.3)$$

$$a_k + a_l = a_{k+m} + a_{l-m}; \quad (4.4)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad (4.5)$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \quad (4.6)$$

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия — числовая последовательность, первый член которой не равен нулю, а каждый последующий (начиная со второго) равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, называемое *знаменателем прогрессии.*

Обозначения: b_1 — первый член прогрессии, b_n — n-й член прогрессии, q – знаменатель прогрессии, S_n — сумма первых n членов прогрессии, S — сумма бесконечно убывающей прогрессии.

$$b_{n+1} = b_n q; \quad (4.7)$$

$$b_n = b_1 q^{n-1}; \quad (4.8)$$

$$b_n = \pm\sqrt{b_{n-1} b_{n+1}} \text{ при } n \geq 2; \quad (4.9)$$

$$b_k b_l = b_{k+m} b_{l-m}; \quad (4.10)$$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}; \quad (4.11)$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}; \quad (4.12)$$

$$S=\frac{b_1}{1-q} \text{ при } |q|<1; \qquad (4.13)$$

Пример 1. Найти седьмой член арифметической прогрессии, последний член которой равен 29, число членов равно произведению двух первых членов и сумма второго и предпоследнего членов равна 31.

Сумма первого и последнего членов равна сумме второго и предпоследнего членов, отстоящих на разность прогрессии от вышеназванных. Это свойство описывается формулой (4.4) при $k=1$, $m=1$ и количестве членов прогрессии l: $a_1+a_l=a_2+a_{l-1}$. Последний член и сумма известны, поэтому первый член равен 2.

Пусть второй член равен x, тогда по условию задачи в прогрессии $2x$ чисел, а ее разность равна a_2-a_1, то есть $x-2$. Согласно (4.2), последний член $a_{2x}=2+(x-2)(2x-1)$. Решая уравнение $2+(x-2)(2x-1)=29$, получаем $x_1=5$ и $x_2=-2{,}5$. $x_2=-2{,}5$ — не удовлетворяет условию задачи, так как количество членов прогрессии положительно. Следовательно, второй член равен 5, разность прогрессии — 3, седьмой член — 20.

Ответ: 20.

Уравнение можно составить и другим способом. $a_1=2$, $a_2=2+d$. По условию задачи, $n=a_1a_2=2\cdot(2+d)$. Согласно (4.2), $29=2+d[2(2+d)-1]$, откуда $d_1=-4{,}5$; $d_2=3$. Условию задачи удовлетворяет только положительное значение d, так как прогрессия возрастает ($a_1<a_n$).

Пример 2. Найти три целых положительных числа, составляющих геометрическую прогрессию, зная, что при увеличении второго из этих чисел на 18 прогрессия будет арифметической, но при увеличении первого члена получившейся арифметической прогрессии на 16 она снова станет геометрической.

Первый член исходной геометрической прогрессии обозначим b, а ее знаменатель q. Тогда b, bq, bq^2 образуют геометрическую прогрессию, b, $bq+18$, bq^2 — арифметическую, а $b+16$, $bq+18$ и bq^2 — вновь геометрическую. Используя свойства (4.3) и (4.9), составим систему: $\begin{cases} b+bq^2=2(bq+18); \\ (b+16)bq^2=(bq+18)^2. \end{cases}$

Из второго уравнения системы имеем $b=\dfrac{81}{4q^2-9q}$. Подставляя это выражение в первое уравнение, придем к квадратному: $7q^2-18q-9=0$. Отрицательный корень $q=-\dfrac{3}{7}$ не удовлетворяет условию задачи, так как исходные числа положительны. Значению $q=3$ соответствует $b=9$. Следовательно, целые числа, составляющие геометрическую прогрессию, — 9, 27, 81.

Ответ: 9, 27, 81.

Можно начать и с обозначения членов арифметической прогрессии, например: $a-d$, a, $a+d$. Тогда $a-d$, $a-18$, $a+d$ и $a-d+16$, a, $a+d$ — геометрические прогрессии, для которых выполняется свойство (4.9)

Пример 3. Букинистический магазин продал книгу со скидкой в 10% по сравнению с первоначально назначенной ценой и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально предполагал получить магазин?

Пусть магазин закупил книги по цене a единиц за штуку, первоначально предполагаемая прибыль $x\%$. Тогда первоначальная продажная цена равняется $a(1+\dfrac{x}{100})$. Цена со скидкой 10% равна $a(1+\dfrac{x}{100})\cdot 0{,}9$. При 8% прибыли цена книги становится $a\cdot 1{,}08$. Составляем уравнение $a(1+\dfrac{x}{100})\cdot 0{,}9=a\cdot 1{,}08$, из которого получаем $x=20$.

Ответ: 20%.

Задачу можно решить и без уравнения, по действиям:

1) $100\%+8\%=108\%$ — составляет продажная цена от закупочной.
2) $100\%-10\%=90\%$ — составляет действительная продажная цена от первоначально предполагаемой.
3) $100\%:90\cdot 100=120\%$ — составляет первоначально предполагаемая цена от закупочной.
4) $120\%-100\%=20\%$ — первоначально предполагаемая прибыль.

Приведенное решение затруднительно, так как в нем проценты выступают и как наименования, и как способ выражения части, составляемой одной величиной от другой.

Пример 4. Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие — 20%. Сколько сухих фруктов получается из 20 кг свежих?

Способ 1. В свежих фруктах не-вода составляет $100\%-72\%=28\%$. В 20 кг свежих фруктов не-воды $20\cdot 0{,}28=5{,}6$ (кг). В сухих фруктах не-вода составляет $100\%-20\%=80\%$. 5,6 кг не-воды будут в $5{,}6:0{,}8=7$ (кг) сухих фруктов.

Способ 2. Одно и то же количество не-воды до сушки составляет 28%, а после сушки — 80%, то есть процентное содержание не-воды увеличивается в $\frac{80\%}{28\%}=\frac{20}{7}$ (раза). Это происходит потому, что общая масса фруктов сокращается в $\frac{20}{7}$ раза. Исходное количество свежих фруктов 20 кг, из них получается $20:\frac{20}{7}=7$ (кг) сухих.

Ответ: 7 кг.

Пример 5. Дорога от A до B длиной 11,5 км идет сначала в гору, потом по ровному месту и потом под гору. Турист, направляясь из A в B, прошел всю дорогу за 2 ч 54 мин, а на обратную дорогу затратил 3 ч 6 мин. Скорость его ходьбы в гору 3 км/ч, по ровному месту — 4 км/ч, под гору — 5 км/ч. На каком протяжении дорога проходит по ровному месту?

Пусть длина ближнего к A участка равна x км, ближнего к B — y км. Длина ровного участка будет $11{,}5-x-y$ км. С учетом известных скоростей движения пешехода и общего времени движения получаем $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{11{,}5-x-y}{4}+\frac{y}{5}=2{,}9;\\ \frac{y}{3}+\frac{11{,}5-x-y}{4}+\frac{x}{5}=3{,}1.\end{cases}$ Сложим уравнения системы, получим $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)(x+y)+\frac{11{,}5-x-y}{2}=6$ или $16(x+y)+15(11{,}5-x-y)=180$; $x+y=7{,}5$. Средняя, ровная часть маршрута составляет $11{,}5-7{,}5=4$ (км).

Ответ: 4 км.

В приведенном решении составленная система двух уравнений не была решена. Другое решение задачи связано с предварительным решением системы уравнений ($x=3$; $y=4{,}5$).

Пример 6. Из Тулы по направлению к Вязьме вышел товарный поезд. Спустя 5 ч 5 мин по той же дороге из Вязьмы в Тулу вышел пассажирский поезд. Оба поезда встретились на промежуточной станции. От этой станции товарный поезд шел до Вязьмы 12 ч 55 мин, и от той же станции пассажирский поезд шел до Тулы 4 ч 6 мин. Сколько времени употребил каждый поезд на прохождение всего пути между Вязьмой и Тулой?

Пусть t ч — время, которое прошел пассажирский поезд до встречи с товарным, x км/ч — скорость пассажирского поезда, y км/ч — скорость товарного поезда. По условию задачи можно составить систему двух уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} xt = y\cdot 12\frac{55}{60}; \\ x\cdot 4\frac{6}{60} = y\left(t+5\frac{5}{60}\right). \end{cases}$

Разделив одно уравнение на другое, получим следствие системы — уравнение с одним неизвестным t:

$$\frac{t}{4\frac{6}{60}} = \frac{12\frac{55}{60}}{t+5\frac{5}{60}};\ 24t^2+122t-1271=0.$$

Положительным корнем этого уравнения является $t=5\frac{1}{6}$. Таким образом, время товарного поезда составляет 23 ч 10 мин, а пассажирского — 9 ч 16 мин.

Ответ: 23 ч 10 мин и 9 ч 16 мин.

Время движения обоих поездов найдено, несмотря на то что остались неизвестными их скорости. Скорости движения поездов и пройденные ими расстояния на основе данных задачи установить нельзя.

Пример 7. Найти трехзначное число, зная, что сумма его цифр составляет 13 и что цифра единиц в 3 раза больше цифры сотен. Кроме того известно, что если прибавить к искомому числу 396, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

Пусть x, y, z обозначают соответственно число сотен, десятков и единиц искомого числа. Тогда искомое число выражается как $100x+10y+z$, а записанное теми же цифрами в обратном порядке — $100z+10y+x$. Получаем систему $\begin{cases} x+y+z=13; \\ z=3x; \\ 100x+10y+z+396=100z+10y+x; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=13; \\ z=3x; \\ x-z+4=0. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x=2; \\ y=5; \\ z=6. \end{cases}$

Ответ: 256.

Пример 8. Бассейн можно наполнить водой из двух кранов. Если первый кран открыть на 10 мин, а второй — на 20 мин, то бассейн будет наполнен. Если первый кран открыть на 5 мин, а второй — на 15 мин, то заполнится $\frac{3}{5}$ бассейна. За какое время можно заполнить весь бассейн из каждого крана в отдельности?

Пусть x мин — время наполнения бассейна первым краном, y мин — время наполнения бассейна вторым краном. Тогда $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ части бассейна, заполняемые за 1 мин первым и вторым краном соответственно. Таким образом, можно составить по условию задачи систему уравнений:

$$\begin{cases} 10\frac{1}{x}+20\frac{1}{y}=1; \\ 5\frac{1}{x}+15\frac{1}{y}=\frac{3}{5}; \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{3}{50}; \\ \frac{1}{y}=\frac{1}{50}; \end{cases} \begin{cases} x=\frac{50}{3}; \\ y=50. \end{cases}$$

Ответ: 16 мин 40 с; 50 мин.

Пример 9. Иван, Петр и Егор живут вместе в общежитии и берут кофе из большой пачки, которая стоит 120 рублей. Если бы Егор не пил кофе, то Ивану и Петру пачки кофе хватило бы на 30 дней. Если бы не пил кофе Петр, то двум остальным хватило бы пачки на 15 дней. Если бы не пил кофе Иван, то его соседи по комнате исчерпали бы запас кофе за 12 дней. На сколько дней хватит пачки кофе всем троим и сколько каждый из них должен заплатить за кофе?

Способ 1. Обозначим через a, b и c доли общего запаса кофе, которые выпивают за день Иван, Петр и Егор. Тогда $a+b=\frac{1}{30}$, $a+c=\frac{1}{15}$, $b+c=\frac{1}{12}$. Складывая правые и левые части всех трех уравнений, получаем $a+b+c=\frac{11}{120}$. Комбинируя последнее уравнение по очереди с каждым из трех ранее выписанных уравнений, находим $a=\frac{1}{120}$, $b=\frac{3}{120}$, $c=\frac{7}{120}$.

Таким образом, всем троим пачки хватит на $1:\left(\frac{1}{120}+\frac{3}{120}+\frac{7}{120}\right)=\frac{120}{11}$ дней. Чтобы вычислить, сколько каждый из них должен заплатить за кофе, достаточно разделить 120 рублей на три части, относящиеся между собой, как $1:3:7$. Требуемыми частями являются $10\frac{10}{11}$ руб., $32\frac{8}{11}$ руб. и $76\frac{4}{11}$ руб.

Способ 2. Ту же задачу можно решить проще. Предположим, что Иван, Петр и Егор выпивают за день кофе на x, y и z рублей. Нетрудно рассчитать, что $x+y=4$, $x+z=8$, $y+z=10$. Решая эту систему уравнений, находим $x=1$, $y=3$, $z=7$. Таким образом, всем трем соседям хватит кофе на $120:(1+3+7)=\frac{120}{11}$ дней, а стоимость пачки они должны разделить между собой в отношении $1:3:7$.

Ответ: $\frac{120}{11}$ дней; $10\frac{10}{11}$ руб., $32\frac{8}{11}$ руб. и $76\frac{4}{11}$ руб.

Пример 10. Имеются два куска металла массой 1 кг и 2 кг. Если сплавить первый кусок с половиной второго, то получится слиток с содержанием меди 60% а если сплавить половину первого куска со вторым, то получится слиток, содержащий 72% меди. Каково процентное содержание меди в исходных кусках?

Пусть $x\%$ — первоначальное содержание меди в первом куске, $y\%$ — первоначальное содержание меди во втором куске. По условию задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 0{,}01x+0{,}01y=1{,}2; \\ 0{,}5\cdot 0{,}01x+2\cdot 0{,}01y=1{,}8; \end{cases} \begin{cases} x+y=120; \\ 0{,}5x+2y=180; \end{cases} \begin{cases} x=40; \\ y=80. \end{cases}$$

Ответ: 40%, 80%.

Реши сам

4.1. В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, произведение второго и предпоследнего членов равно 128, сумма всех членов равна 126. Сколько членов в прогрессии?

4.2. Сколько надо взять положительных членов арифметической прогрессии 72, 68, 64, ..., чтобы их сумма была в 1,4 раза больше суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первые два члена которой равны соответственно четвертому и седьмому членам данной арифметической прогрессии?

4.3. За изготовление и установку первого железобетонного кольца для колодца уплачено 10 долларов, а за каждый следующий платили на 2 доллара больше, чем за предыдущий. Кроме того, по окончании работы было уплачено еще 40 долларов. Средняя стоимость изготовления и установки одного кольца оказалась равной $22\frac{4}{9}$ доллара. Сколько колец было установлено?

4.4. Некоторое положительное число увеличили на 40%, после чего результат уменьшили тоже на 40%. Сколько процентов составляет окончательная величина от исходной?

4.5. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч. За какое время пройдет все расстояние каждый из них, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на $2\frac{1}{2}$ ч позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

4.6. Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 км, а затем поднимается против течения на расстояние 6 км. Скорость течения реки равна 1 км/ч. В каких пределах должна лежать собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 ч?

4.7. Найти трехзначное число, зная, что число его сотен составляет $\frac{3}{5}$ числа единиц и что число десятков равно полусумме единиц двух других разрядов. Наконец, если к искомому числу прибавить 198, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

4.8. Три землечерпалки углубляли фарватер при входе в гавань. Если бы работала только первая из них, то на работу потребовалось бы на 10 дней больше, а если бы только вторая, то на 20 дней больше. При работе одной лишь третьей землечерпалки углубление фарватера заняло бы в 6 раз больше времени, чем при одновременном действии всех трех машин. Сколько времени потребуется для выполнения всей работы каждой землечерпалкой в отдельности?

4.9. Величины процентного содержания кислоты в трех растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении $2:3:4$, то получится раствор, содержащий 32% кислоты. Если же смешать их в отношении $3:2:1$, то получится раствор, содержащий 22% кислоты. Сколько процентов кислоты содержит каждый раствор?

4.10. Маршрут велосипедиста состоит из двух частей: на подъеме он двигается со скоростью 12 км/ч, а затем поворачивает обратно и спускается со скоростью 20 км/ч. Определите среднюю скорость велосипедиста на данном маршруте.

Раздел II
ФУНКЦИИ

Говорят, что на некотором множестве чисел определена *числовая функция*, если каждому значению x этого множества поставлено в соответствие по некоторому правилу число y.

Функции часто задают с помощью формул и графиков.

Функции обладают разнообразными свойствами, которые можно определять и непосредственно по графику, и через исследование формулы, которой задана функция.

ГЛАВА 5. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

5.1 Графическая интерпретация основных свойств функции

Свойства функций

Таблица 2.

Свойство функции	**Определение**	**Отражение на графике**	**Пример (*рис. 1*)**
Область определения $D(y)$	Множество значений аргумента, которым сопоставлены значения функции	Проекция графика на ось OX	$D(y) = [1; 6]$

Окончание таблицы 2

Свойство функции	**Определение**	**Отражение на графике**	**Пример (рис. 1)**
Множество значений $E(y)$	Множество чисел, состоящее из всех значений функции	Проекция графика на ось OY	$E(y) = [-1; 2]$
Четность: а) четная; б) нечетная	$D(y)$ симметрична относительно 0, а) $y(-x) = y(x)$; б) $y(-x) = -y(x)$	а) симметрия относительно оси OY б) симметрия относительно начала координат	Не является ни четной, ни нечетной
Корни (нули)	Значения аргумента, при которых значение функции равно 0	Точки пересечения графика с осью OX	$x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = 6$
Промежутки постоянного знака	Значения аргумента, при которых значения функции положительны или отрицательны	Участки оси OX, соответствующие точкам графика, лежащим выше или ниже оси OX	$y > 0$ при $x \in (1; 2) \cup (4; 6)$; $y < 0$ при $x \in (2; 4)$
Монотонность на промежутке L: а) возрастание; б) убывание	Функция $y = f(x)$: а) возрастает на L, если для любых x_1, $x_2 \in L$ при условии $x_1 < x_2$ верно $y_1 < y_2$; б) убывает на L, если для любых x_1, $x_2 \in L$ при условии $x_1 < x_2$ верно $y_1 > y_2$	Участки оси OX, на которых график: а) идет вверх; б) идет вниз	y возрастает на [3; 5]; y убывает на [1; 3] и на [5; 6]
Периодичность	Функция $y = f(x)$ имеет период T, если: 1) в $D(y)$ вместе с каждым x также входят $x + T$ и $x - T$; 2) $f(x) = f(x + T)$	Состоит из повторяющихся фрагментов	Не является периодической

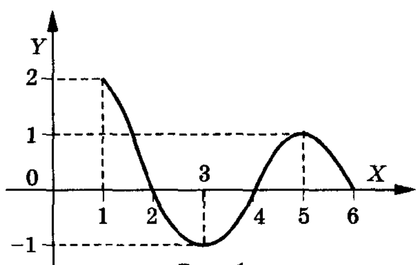


Рис. 1

Графики некоторых элементарных функций

Линейная функция $y = kx + b$

Графиком линейной функции является прямая (*рис. 2*). Для ее построения достаточно найти координаты двух точек.

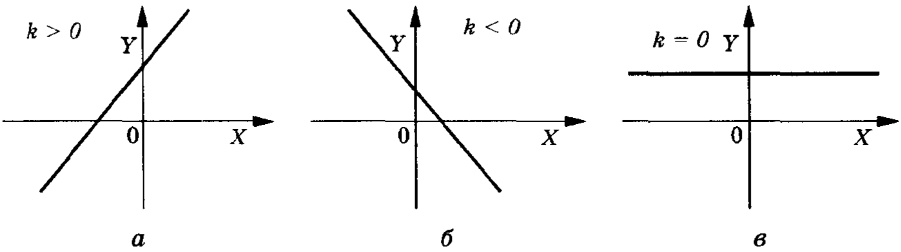


Рис. 2

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Графиком этой функции является парабола (*рис. 3*). Ее строят по следующему плану:

1) определяют направление ветвей параболы ($a>0$ — вверх, $a<0$ — вниз);

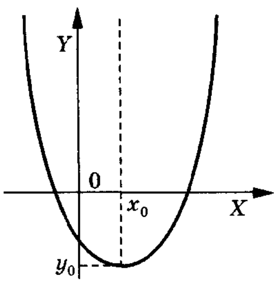


Рис. 3

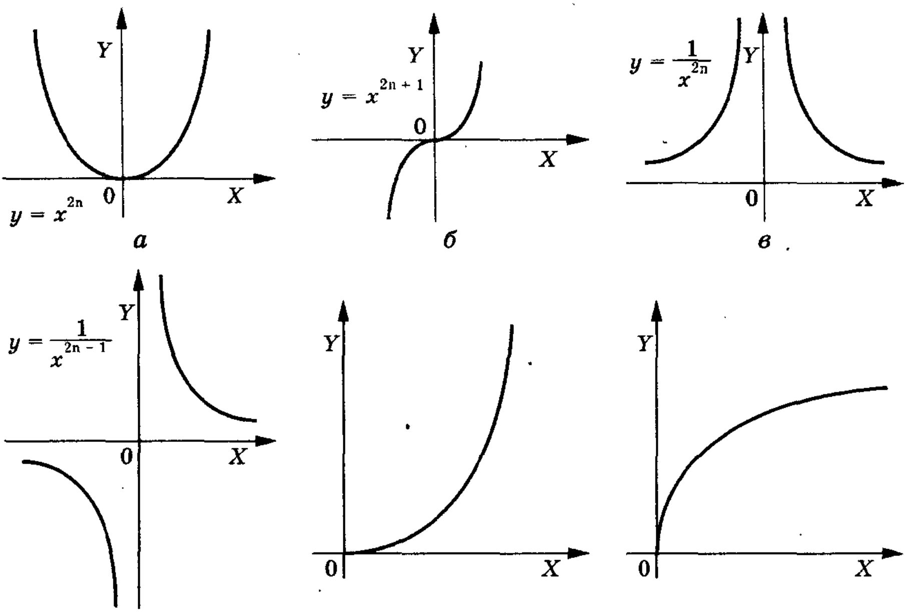
2) находят координаты вершины параболы: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$;

3) находят координаты дополнительных точек (чаще всего находят нули функции, решая уравнение $ax^2+bx+c=0$);

4) соединяют полученные точки, соблюдая симметрию относительно прямой $x = x_0$.

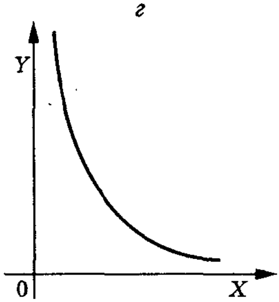
Функция $y = x^{\alpha}$

В каждом из приведенных случаев график функции $y=x^{\alpha}$ (*рис. 4*) проходит через точку с координатами $(1;1)$. В случаях *в*, *г*, *ж* прямые $x=0$ и $y=0$ являются соответственно вертикальными и горизонтальными асимптотами графиков степенных функций.



а *б* *в*

г *д* *е*



ж

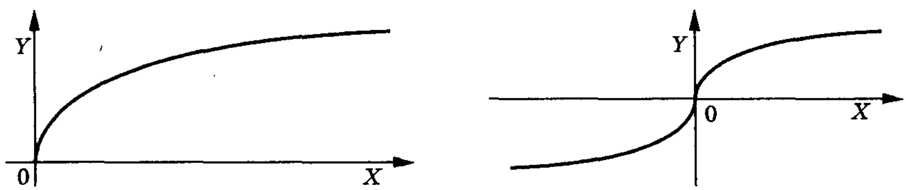
Рис. 4

а — α — четное натуральное число, $\alpha = 2n, n \in \mathbb{N}$; *б* — α — нечетное натуральное число, $\alpha = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$; *в* — α — отрицательное число вида $\alpha = -2n, n \in \mathbb{N}$; *г* — α — отрицательное число вида $\alpha = -2n+1, n \in \mathbb{N}$; *д* — α — нецелое, $\alpha > 1$; *е* — α — нецелое, $0 < \alpha < 1$; *ж* — α — нецелое отрицательное число

Функция $y = \sqrt[k]{x}, k \in \mathbb{N}$ **(*рис. 5*)**

а — k — четное число, $k = 2n, n \in \mathbb{N}$;

б — k — нечетное число, $k = 2n+1, n \in \mathbb{N}$

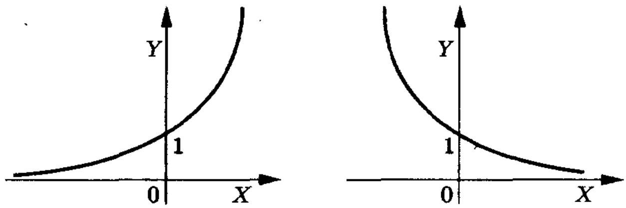


а *б*

Рис. 5

Показательная функция $y=a^x, a>0, a\neq 1$

График функции (*рис. 6*) проходит через точку $(0;1)$ при любом значении a. Прямая $y=0$ — горизонтальная асимптота графика.

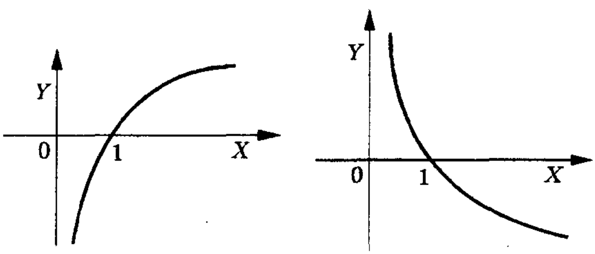


а *б*

Рис. 6

Логарифмическая функция $y=\log_a x, a>0, a\neq 1$

График функции (*рис. 7*) проходит через точку $(1;0)$ при любом значении a. Прямая $x=0$ — вертикальная асимптота графика.



а *б*

Рис. 7

Преобразования графиков функций

При построении графиков функций над ними часто приходится выполнять различные преобразования (параллельный перенос, растяжение, симметрию и т. д.), переходя от графика функции $y=f(x)$ к графикам других функций. Как производить подобные преобразования; показано в *таблице*.

Таблица 3. Преобразование графика функции $y = f(x)$

Переход к функции	**Действие**
$y=f(x)+a$, $a>0$	Сдвиг вдоль оси OY вверх на a единиц
$y=f(x)-a$, $a>0$	Сдвиг вдоль оси OY вниз на a единиц
$y=f(x+b)$, $b>0$	Сдвиг вдоль оси OX влево на b единиц
$y=f(x-b)$, $b>0$	Сдвиг вдоль оси OX вправо на b единиц
$y=kf(x)$, $k>0$	Растяжение вдоль оси OY в k раз при $k>1$ Сжатие к оси OY в $\frac{1}{k}$ раза при $0<k<1$
$y=f(kx)$, $k>0$	Сжатие к оси OX в k раз при $k>1$ Растяжение вдоль оси OX в $\frac{1}{k}$ раза при $0<k<1$
$y=-f(x)$	Симметрия относительно оси OX
$y=f(-x)$	Симметрия относительно оси OY
$y=\lvert f(x)\rvert$	Отображение части графика, расположенной ниже оси OX, симметрично относительно оси OX
$y=f(\lvert x\rvert)$	Удаление части графика, расположенной слева от оси OY; сохранение части графика, расположенной справа от оси OY, и отображение ее симметрично относительно оси OY

Рассмотрим задания, связанные с исследованием различных свойств функций.

Реши сам!

5.1. По графикам функций, изображенных на *рис. 8*, укажите свойства функции (область определения, множество значений, четность, нули, промежутки знакопостоянства и монотонности, периодичность). Обратитесь к табл. 3.

5.2. Среди функций, графики которых изображены на *рис. 9*, укажите: а) четные; б) нечетные.

5.3. Достройте, если это возможно, графики, представленные на *рис. 10*, до графиков: а) четных функций; б) нечетных функций; в) функций, не являющихся ни четными, ни нечетными.

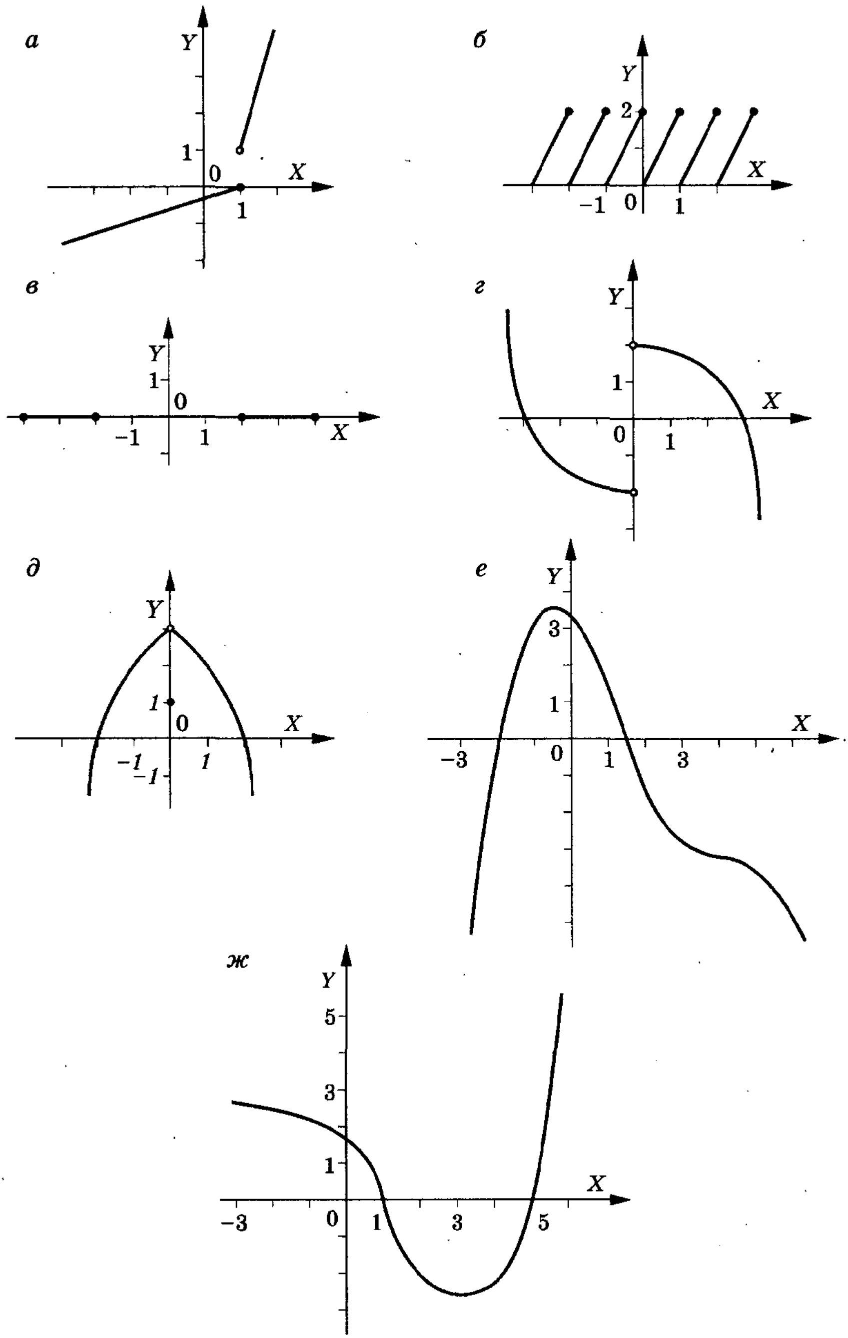


Рис. 8

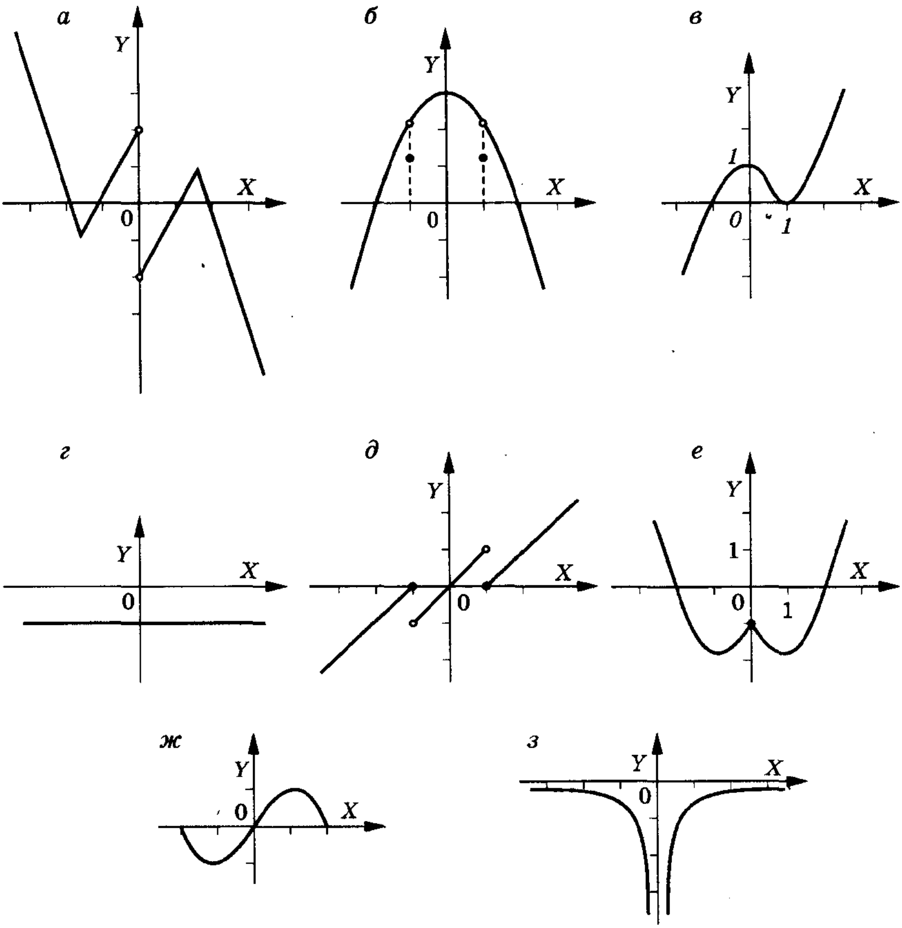


Рис. 9

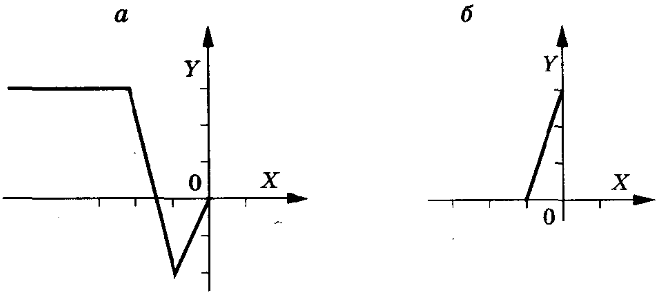


Рис. 10

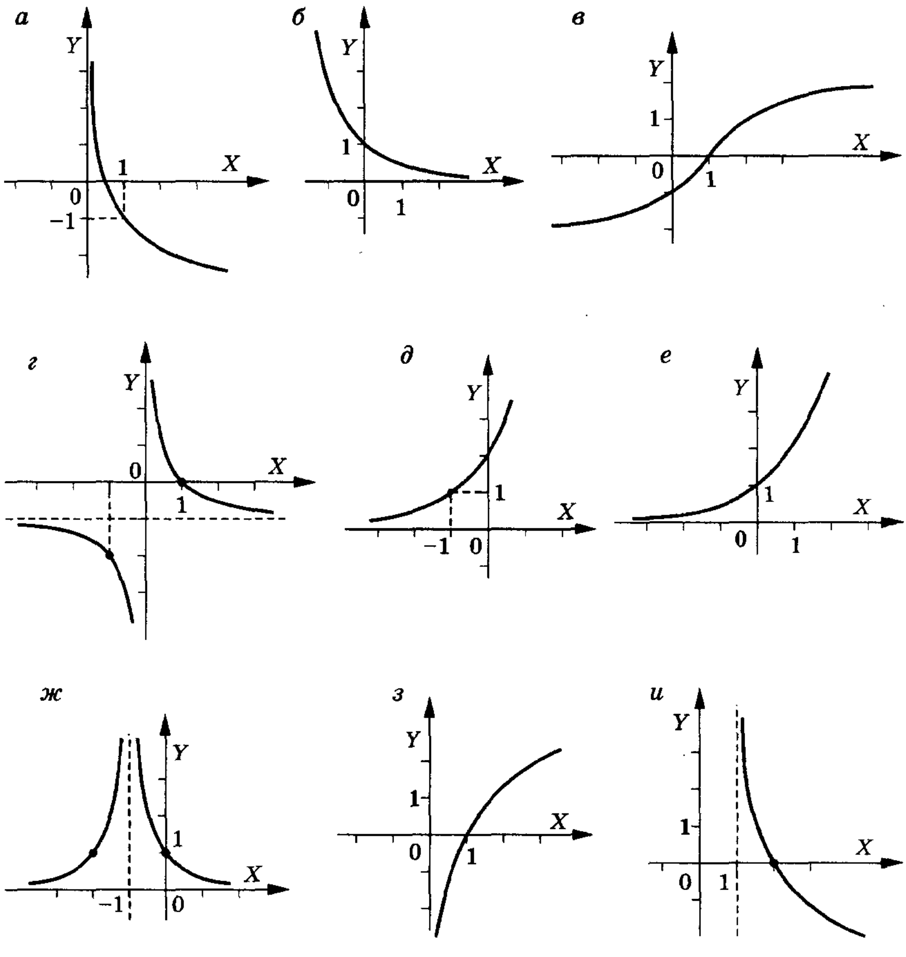


Рис. 11

5.4. Изобразите график функции $f(x)$ так, чтобы: а) $D(f)=[0;5]$, $E(f)=[-1;2]$; б) $D(f)=[0;5]$, $E(f)=[-1;2]$, f возрастала на $[0;3]$ и убывала на $[3;5]$; в) $D(f)=[0;5]$, $E(f)=[-1;2]$, f возрастала на $[0;3]$ и убывала на $[3;5]$, f принимала положительные значения на $(2;5]$ и отрицательные — на $[0;2)$.

5.5. Функция f возрастает на области определения и принимает на ней отрицательные значения. Изобразите график функции f.

5.6. О функции g известно, что $g(x)=0{,}5x^2$ при $0 \le x \le 2$ и $g(x)=\frac{4}{x}$ при $x>2$. Постройте график этой функции, зная, что g: а) нечетная функция; б) четная функция. Пользуясь графиком, укажите в каждом случае другие свойства функции g.

5.7. Функция принимает только отрицательные значения. Может ли она быть: а) четной; б) нечетной?

5.8. Область определения некоторой функции состоит лишь из положительных чисел. Может ли она быть: а) четной; б) нечетной?

5.9. На каком *из рисунков 11 а–и* изображены графики функций: 1) $y=2^{x+1}$, 2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x-1$, 3) $y=\sqrt[3]{x-1}$, 4) $y=\frac{1}{(x+1)^2}$, 5) $y=\frac{1}{x^5}-1$, 6) $y=(\pi-3)^x$?

5.2. Область определения функции

Если функция задана формулой и не указано никаких ограничений, ее *областью определения* (ООФ) считается множество всех значений аргумента, для которых можно выполнить действия, заданные формулой. Это множество называют *естественной областью определения* данной функции.

Область определения функции $y=f(x)$ обозначают $D(y)$ или $D(f)$.

При нахождении естественной области определения функции нужно учитывать *ограничения на действия*, указанные в формуле, задающей функцию:

(1) знаменатель дроби не должен обращаться в 0;
(2) арифметический корень четной степени можно извлекать только из неотрицательного числа;
(3) подлогарифмическое выражение должно быть положительным;
(4) основание логарифма должно быть положительным и не равным 1;

(5) в степень с нецелым показателем можно возводить только неотрицательные числа;

(6) стоящие под знаком тангенса выражения должны быть отличны от $\frac{\pi}{2}+\pi k$, а стоящие под знаком котангенса — от πk (в обоих случаях $k\in\mathbb{Z}$);

(7) арксинус и арккосинус могут быть вычислены только для чисел из отрезка $[-1;1]$.

Пример 1. Найти область определения функции $f(x)=\frac{1}{x}$.

Учитывая ограничение (1), $D(f)$ состоит из всех чисел, отличных от 0: $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Пример 2. Найти область определения функции $g(x)=\frac{1}{x}$, где $x>-2$.

$D(g)$ состоит из всех чисел, одновременно отличных от 0 и больших -2: $D(g)=(-2;0)\cup(0;+\infty)$.

Ответ: $(-2;0)\cup(0;+\infty)$.

Пример 3. Найти область определения функции $y=\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2-4x+3}$.

Учитывая ограничения (1) и (2), составим систему

$$\begin{cases} x+1\ge 0; \\ x^2-4x+3\ne 0 \end{cases}$$

и решим ее:

$$\begin{cases} x\ge -1; \\ x\ne 1; x\ne 3; \end{cases} \quad x\in[-1;1)\cup(1;3)\cup(3;+\infty).$$

Ответ: $[-1;1)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$.

Заполни пропуски

Упражнение 1. Найдите ООФ $y=\sqrt{\frac{x-5}{x+8}}$. Учитывая ограничение (...), записываем неравенство ... . Решаем его методом ... . $D(y)=\ldots$

Ответ: ... .

Упражнение 2. Найдите ООФ $y=\dfrac{2}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-5x+6}$. Учитывая ограничения (...) и (...), записываем систему

$$\begin{cases} \ldots>0; \\ \ldots\geq 0;\\ \ldots\neq 0; \end{cases}; \begin{cases} \ldots; \\ \ldots; \\ \ldots. \end{cases} D(y)=\ldots.$$

Ответ: ... .

Упражнение 3. Найдите ООФ $y=\lg(5x^2-8x-4)+\sqrt{x-1}$. Учитывая ограничения (...) и (...), записываем систему

$$\begin{cases} \\ \end{cases} \quad \begin{cases} \\ \end{cases}$$

Ответ: ... .

Проверь себя

1) $y=\sqrt{\dfrac{x-5}{x+8}}$. Учитывая ограничение (2), записываем неравенство $\dfrac{x-5}{x+8}\geq 0$.

Решаем его методом интервалов. $D(y)=(-\infty;-2)\cup[5;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup[5;+\infty)$.

2) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-5x+6}$. Учитывая ограничения (1) и (2), записываем систему

$$\begin{cases} x-3>0; \\ x\geq 0; \\ x^2-6x+5\neq 0; \end{cases} \begin{cases} x>3; \\ x\geq 0; \\ x\neq 1; x\neq 5. \end{cases} D(y)=(3;5)\cup(5;+\infty).$$

Ответ: $(3;5)\cup(5;+\infty)$.

3) $y=\lg(5x^2-8x-4)+\sqrt{x-1}$. Учитывая ограничения (3) и (2), записываем систему $\begin{cases} 5x^2-8x-4>0; \\ x-1\geq 0; \end{cases} \begin{cases} x<-0{,}4; x>2; \\ x\geq 1; \end{cases}$ $x>2$. $D(y)=(2;+\infty)$.

Ответ: $(2;+\infty)$.

Реши сам

Найдите ООФ:

5.10. $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{x}$.

5.11. $y=\dfrac{\sqrt{5+x}}{x^2-49}$.

5.12. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{\sqrt{4-x}}{x^2-5x+6}$.

5.13. $y=\log_3\dfrac{2x+1}{x-3}$.

5.14. $y=\sqrt{x-x^2}+\sqrt{3x-x^2-2}$.

5.15. $y=\dfrac{\sqrt{(x+1)(5-x)}}{x}$.

5.16. $y=\sqrt{\dfrac{(x+1)(5-x)}{x}}$.

5.17. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\lg(x+1)}$.

5.18. $y=\log_{-x^2-4x}(6-x^2-5x)$.

5.19. $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

5.20. $y=\log_5\log_{1/2}\dfrac{3-x}{x+2}$.

5.21. $y=\lg\log_{\cos x}(7-x)$.

5.22. $y=\log_\pi\log_{\cos 4x}(7-x)$.

5.23. $y=\dfrac{\arcsin(3-2x)}{x-1}$.

5.24. $y=\sqrt{\arcsin x}$.

5.25. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\lg(x+5)^2}+\dfrac{1}{\arccos(x+3)}$.

5.26. Найдите длину интервала, являющегося ООФ:

а) $y=\log_{0,3}\dfrac{1-x}{x+5}$; б) $y=2^{-\sqrt{1-x^2}}+\lg(x+2)$.

5.27. Сколько целых значений x принадлежит ООФ:

а) $y=\lg\left(\left|\dfrac{3}{x+4}\right|-1\right)$; б) $y=\dfrac{\log_2 x}{\arcsin(2x-6)}$?

5.28. Определите наибольшее целое значение x, принадлежащее ООФ: а) $y=\log_x(5-x^2)$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-|3-\log_2 x|}}$.

5.29. Найдите наименьшее x, принадлежащее ООФ:

а) $y=\sqrt{3^{2x-2}+9^x-10}$;

б) $y=\sqrt{5^{2x-2}+25^x-650}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\log_3|x-4|}$.

5.30. Найдите левую границу ООФ $f(x)=\sqrt[4]{2-\lg|x-2|}$.

5.31. Определите наименьшее значение x, принадлежащее ООФ $y=\sqrt{\cos^2 x-\dfrac{1}{2}}$ и удовлетворяющее условию $-180°<x<0°$.

5.3. Множество значений функции

Когда функция задана формулой, то одним из способов определения множества значений функции (МЗФ) является *метод оценки.*

Пример 1. Найти МЗФ $y=\cos x-2$.

Функция $y=\cos x$ принимает все значения из отрезка $[-1;1]$, и только их. Значения функции $y=\cos x-2$ при тех же x меньше значений функции $g(x)=\cos x$ на 2. Значит, значения функции $y=\cos x-2$ заполняют собой промежуток $[-3;-1]$. Проведенное рассуждение записывают так: $-1\le\cos x\le 1$; $-3\le\cos x-2\le-1$; $E(y)=[-3;-1]$.

Ответ: $[-3;-1]$.

Использование метода оценки основано на свойствах неравенств. Следует помнить, что при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

Пример 2. Найти МЗФ $y=2-\sin^2 x$.

Последовательно оценим $\sin x$, $\sin^2 x$, $-\sin^2 x$, $2-\sin^2 x$. $-1\le\sin x\le 1$; $0\le\sin^2 x\le 1$; $-1\le-\sin^2 x\le 0$; $1\le 2-\sin^2 x\le 2$; $E(y)=[1;2]$.

Ответ: $[1;2]$.

Пример 3. Найти МЗФ $y=\sqrt[3]{\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x+26}$.

Преобразуем подкоренное выражение и оценим его: $\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x+26=\cos(x-2x)+26=\cos x+26$; $25\le\cos x+26\le 27$.

Значение кубического корня тем больше, чем больше подкоренное выражение, поэтому $\sqrt[3]{25}\le\sqrt[3]{\cos x+26}\le\sqrt[3]{27}$. $E(y)=[\sqrt[3]{25};3]$.

Ответ: $[\sqrt[3]{25};3]$.

Пример 4. Найти МЗФ $y=2\sin x+3\cos x$.

Преобразуем выражение $2\sin x+3\cos x$ по формуле (3.30): $2\sin x+3\cos x=\sqrt{13}\sin(x+\mathrm{arctg}\frac{3}{2})$.

Так как $-1\le\sin(x+\mathrm{arctg}\frac{3}{2})\le 1$,

то $-\sqrt{13}\le y\le\sqrt{13}$. $E(y)=[-\sqrt{13};\sqrt{13}]$.

Ответ: $[-\sqrt{13};\sqrt{13}]$.

Часто оценку выполняют на основе *анализа графика функции*.

Пример 5. Найти МЗФ $y=\log_2(16-x^2)$.

Данную функцию можно рассматривать как сложную, образованную внутренней $t=16-x^2$ и внешней $y=\log_2 t$. Область определения данной функции $D(y)=(-4;4)$. По графику функции $t=16-x^2$ (*рис. 12, а*) видим, что при $-4<x<4$ выполняется $0<t\le 16$. Множество значений функции $y=\log_2(16-x^2)$ совпадает с МЗФ $y=\log_2 t$, заданной на промежутке $(0;16]$. По графику $y=\log_2 t$ находим $E(y)=(-\infty;4]$ (рис. 12, *б*).

Ответ: $(-\infty;4]$.

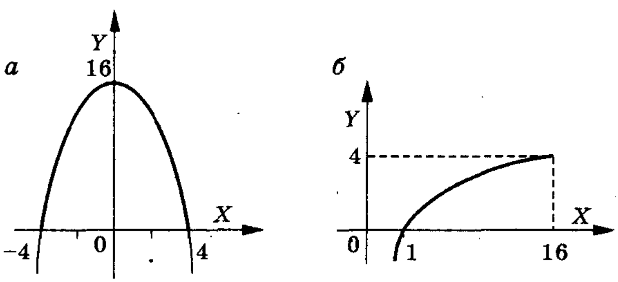


Рис. 12

Задачу отыскания МЗФ можно переформулировать, сведя ее тем самым к задаче *исследования уравнения с параметром*.

Пример 6. Найти МЗФ $y=\sqrt[3]{x^2-2x+3}$.

Найдем все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt[3]{x^2-2x+3}=a$ будет иметь хотя бы одно решение. Эти значения и составят МЗФ $E(y)$.

Возведем обе части уравнения в куб и приведем его к виду $x^2-2x+3-a^3=0$. Дискриминант этого уравнения $D=4a^3-8$ неотрицателен при $a\geq\sqrt[3]{2}$. Следовательно, $E(y)=[\sqrt[3]{2};+\infty)$.

Ответ: $[\sqrt[3]{2};+\infty)$.

Реши сам

Найдите МЗФ:

5.32. $y=5-|x+2|$.

5.33. $y=\sqrt{\sin x+1}$.

5.34. $y=\sin x\cos x$.

5.35. $y=\cos^2 x-2\cos x$.

5.36. $y=\sqrt{x^2-2}$.

5.37. $y=\sqrt{x^2+2}$.

5.38. $y=\sqrt{x^2-4x+3}-1$.

5.39. $y=\sqrt{8+2x-x^2}$.

5.40. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

5.41. $y=\log_{\frac{1}{2}}(7x-x^2-12)$.

5.42. $y=4^x+2^{x+2}$.

5.43. $y=5^{2\,\mathrm{arctg}\,x+1}$.

5.44. $y=\dfrac{x^2-1}{x}$.

5.4. Корни (нули) функции и промежутки знакопостоянства

При нахождении корней (нулей) функции $y=f(x)$ необходимо решить уравнение $y=0$, а для определения промежутков знакопостоянства — неравенства $y>0$ и $y<0$. Часто эти задачи решают одновременно, применяя метод интервалов.

Пример 1. Найти корни и промежутки знакопостоянства функции $y=\dfrac{x^2-1}{x}$.

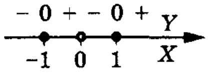


Рис. 13

Выделим на координатной прямой корни числителя $x_{1,2}=\pm1$ и корень знаменателя $x_3=0$, после чего отметим знак функции на каждом из четырех образовавшихся промежутков (*рис. 13*).

Ответ: $y=0$ при $x=\pm1$; $y>0$ при $-1<x<0$, $x>1$; $y<0$ при $x<-1$, $0<x<1$.

Пример 2. Найти корни и промежутки знакопостоянства функции $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+x-2}$.

Корнями функции являются корни числителя дроби, не обращающие в ноль знаменатель. $x^3-3x^2-x+3=0$ при $x_1=-1$; $x_2=3$; $x_3=1$. Последний из корней числителя является и корнем знаменателя дроби, поэтому не является корнем функции.

Для нахождения промежутков знакопостоянства разложим числитель и знаменатель на множители: $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$. Методом интервалов устанавливаем, что $f(x)>0$ при $x\in(-2;-1)\cup(3;+\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(1;3)$.

Ответ: $x_1=-1$; $x_2=3$; $f(x)>0$ при $x\in(-2;-1)\cup(3;+\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(1;3)$.

Пример 3. Дана функция $f(x)=a-\mathrm{ctg}^2 x$. Найти все корни функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$, если один из них равен $\dfrac{\pi}{5}$.

Решение 1. Пользуясь определением корня, имеем $a-\mathrm{ctg}^2\dfrac{\pi}{5}=0$, то есть $a=\mathrm{ctg}^2\dfrac{\pi}{5}$ и $f(x)=\mathrm{ctg}^2\dfrac{\pi}{5}-\mathrm{ctg}^2 x$. Раскладывая на множители последнее выражение и приравнивая его к нулю, получаем: $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$ или $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$. Решая отдельно каждое уравнение, имеем $x = \frac{\pi}{5} + \pi k$ или $x = -\frac{\pi}{5} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Ограничиваясь отрезком $[-\pi; \pi]$, оставляем 4 корня: $\pm\frac{\pi}{5}$; $\pm\frac{4\pi}{5}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{5}$; $\pm\frac{4\pi}{5}$.

Решение 2. Воспользуемся тем, что данная функция: а) периодическая с периодом $T = \pi$; б) четная; в) возрастает на $(0; \frac{\pi}{2}]$. Свойства а) и б) позволяют сузить исследуемый промежуток решений до $[0; \frac{\pi}{2}]$, а свойство в) обеспечивает единственность корня $x_1 = \frac{\pi}{5}$ на $(0; \frac{\pi}{2}]$. На симметричном отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, по длине равном периоду π, в силу четности функция имеет ровно два корня: $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{5}$. На отрезке $[-\pi; \pi]$ с длиной удвоенного периода будут ровно четыре корня: $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{5}$ и отстоящие от них на π $x_{3,4} = \pm\frac{4\pi}{5}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{5}$; $\pm\frac{4\pi}{5}$.

Пример 4. Функция задается формулой $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Найти все значения $y \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, являющиеся корнями функции $g(y)$, где $g(y) = f(\cos y) + \sqrt{3}$.

Заменив x на $\cos y$, запишем в явном виде зависимость $g(y)$: $g(y) = \frac{\sqrt{1-\cos^2 y}}{\cos y} + \sqrt{3}$. Для ответа на поставленный вопрос необходимо решить уравнение $g(y) = 0$, приводимое к виду $\frac{|\sin y|}{\cos y} = -\sqrt{3}$. Раскрывая модуль, рассмотрим два случая.

1) При $y\in(\frac{\pi}{2};\pi]$ имеем $\operatorname{tg} y=-\sqrt{3}$, $y=\frac{2\pi}{3}$.

2) При $y\in(\pi;\frac{3\pi}{2})$ имеем $-\operatorname{tg} y=-\sqrt{3}$, $y=\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$.

Реши сам

Найдите корни функции:

5.45. $y=\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$.

5.46. $y=\sqrt{\dfrac{x^2+7x-18}{x+9}}$.

5.47. $y=\log_3(4^x-6)-\log_3(2^x-2)-\frac{1}{4}\log_3 625$.

5.48. $y=\log_2(5^{2x+1}+4)-\log_2(2\cdot 5^x+1)+3\log_{1/8}3$.

5.49. $y=\lg(20^x+5^x)-x-\lg 17+2\lg 2$.

5.50. $y=\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4x+4}$.

5.51. Найдите все значения аргумента, при которых функция $y=\sqrt{1-x^2}-x$ неотрицательна.

5.52. Найдите все значения аргумента, при которых функция принимает значения, большие или равные 0:

а) $y=9^x-30\cdot 3^{x-1}+2^{\frac{2}{\log_6 2}-2}$; б) $y=25^x-3\cdot 5^{x+1}+5^{2+\frac{1}{\log_2 5}}$.

5.53. Найдите область определения, корни и промежутки знакопостоянства функций:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2-9x+18}}$; б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-10x+24}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-7x+10}}$.

5.54. Зная, что число $\frac{5\pi}{6}$ является корнем уравнения $\sin 2x-\cos x=a$, где a — некоторое число, найти все корни этого уравнения на промежутке $[-\pi;\frac{\pi}{2}]$.

5.55. Найдите все корни функции $f(x)=a-\sin^2 x$ на отрезке $[0;2\pi]$, если один из них равен $\frac{\pi}{5}$.

5.56. Функция задается формулой $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Найдите все значения $y\in[0;\pi]$, являющиеся корнями функции $g(y)$, где $g(x)=f(\sin y)-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.57. Функция задается формулой $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. Найдите все значения $y\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$, являющиеся корнями функции $g(y)$, где $g(y)=f(\operatorname{tg} y)-\sqrt{2}$.

5.5. Четные и нечетные функции

Для исследования на четность функции, заданной аналитически, необходимо:

1) установить, симметрична ли ее область определения (если ООФ не симметрична относительно 0, то функция не является ни четной, ни нечетной);
2) сравнить $y(-x)$ с $y(x)$ и с $-y(x)$;
3) сделать вывод, опираясь на определения четной и нечетной функции.

Пример 1. Исследовать на четность функцию $y=\frac{x^2-1}{\cos x}$.

ООФ состоит из чисел $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. ООФ симметрична относительно 0. $y(-x)=\frac{(-x)^2-1}{\cos(-x)}=\frac{x^2-1}{\cos x}=y(x)$. $y(-x)=y(x)$, следовательно, функция четная.

Ответ: функция четная.

Пример 2. Исследовать на четность функцию $y=\lg(x+10)$.

$D(y)=(-10;+\infty)$ — несимметричное относительно 0 множество. Функция $y=\lg(x+10)$ не является ни четной, ни нечетной функцией.

Ответ: функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 3. Исследовать на четность функцию $y=e^x$.

Область определения $D(y)=\mathbb{R}$ симметрична относительно 0. $y(-x)=e^{-x}=\frac{1}{e^x}$. Ни одно из равенств $y(-x)=y(x)$ и

$y(-x)=-y(x)$ не выполняется для всех значений x, поэтому функция $y=e^x$ и не четная, и не нечетная.

Ответ: функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 4. Исследовать на четность функцию $f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Так как при всех x верно неравенство $x+\sqrt{x^2+1}>0$, то ООФ $D(f)=\mathbb{R}$ симметрична относительно 0. Выясним характер связи между $f(x)$ и $f(-x)$: $f(-x)=\log_2\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=$ $=\log_2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. Домножим и разделим подлогарифмическое выражение на сопряженное к нему: $\log_2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$ $=\log_2\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\log_2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Используя свойство (2.3) логарифма частного, получим $\log_2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=$ $=\log_2 1-\log_2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

Так как $\log_2 1=0$, то $f(-x)=-\log_2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f(x)$. Значит, функция $f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ нечетная.

Ответ: функция нечетная.

Заполни пропуски

Упражнение. Исследуйте на четность функцию.

$y(-x)=\dfrac{\ldots}{(\ldots)^2-4}=\dfrac{\ldots}{\ldots}=\dfrac{\ldots}{\ldots}$; $-y(x)=\ldots$. $y(-x)=\ldots$, следовательно, функция ... .

Ответ: функция ... .

Проверь себя

$y(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-4}=\dfrac{-x}{x^2-4}=-\dfrac{x}{x^2-4}$;$-y(x)=-\dfrac{x}{x^2-4}$. $y(-x)=-y(x)$, следовательно, функция нечетная.

Ответ: функция нечетная.

Реши сам

Исследуйте функции на четность:

5.58. $y=x-\dfrac{1}{x}$.

5.59. $y=\dfrac{x-3}{x+1}$.

5.60. $y=(x-3)^2-(x+3)^2$.

5.61. $y=(2-3x)^3+(2+3x)^3$.

5.62. $y=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$.

5.63. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-2x^3}}{x^2+1}$.

5.64. $y=x^2+2|x|+1$.

5.65. $y=\dfrac{2^x}{4^x+1}$.

5.66. $y=x\cdot\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

5.67. $y=\dfrac{(1+2^x)^2}{2^x}$.

5.68. $y=\lg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

5.69. $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

5.70. $y=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$.

5.71. Укажите номер функции, являющейся четной:

1) $y=2^{-x}$; 2) $y=\dfrac{x}{|x|}$; 3) $y=|\lg x|$; 4) $y=\sin^2 x$; 5) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$;

6) $y=(x+1)^{-2}$.

5.72. Укажите номер функции, являющейся нечетной:

1) $y=\sin(x^2+1)$; 2) $y=\sqrt{x}$; 3) $y=-x^{-3}$; 4) $y=3x+1$;

5) $y=|x|$; 6) $y=x^3\sin x$.

ГЛАВА 6. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

6.1. Производная

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел разностного отношения $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$. Операция вычисления производной называется *дифференцированием*.

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что она дифференцируема на этом промежутке. Взятые в разных точках значения производных дифференцируемой на некотором промежутке функции $f(x)$ сами образуют функцию переменной x, называемую производной функции $f(x)$ на этом промежутке. Производная функции $f(x)$ ($y=f(x)$) обозначается штрихом: $f'(x)$ ($y=f'(x)$).

Таблица производных основных элементарных функций

$$C'=0,\ \text{где } C=\mathrm{const}; \tag{6.1}$$

$$(x^n)'=nx^{n-1}; \tag{6.2}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}; \tag{6.3}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}; \tag{6.4}$$

$$(e^x)'=e^x; \tag{6.5}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a; \tag{6.6}$$

$$(\sin x)'=\cos x; \tag{6.7}$$

$$(\cos x)'=-\sin x; \tag{6.8}$$

$$(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}; \tag{6.9}$$

$$(\mathrm{ctg}\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}; \tag{6.10}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{6.11}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{6.12}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \qquad (6.13)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (6.14)$$

Правила дифференцирования

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x); \qquad (6.15)$$

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x); \qquad (6.16)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x); \qquad (6.17)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}; \qquad (6.18)$$

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \qquad (6.19)$$

Пример 1. Найти производную функции $y = \ln x + 3\sin x - \sqrt[3]{x^2}$.

Представив последнее слагаемое в виде степени и используя правила (6.15) и (6.16), получим $y' = (\ln x)' + 3(\sin x)' - \left(x^{\frac{2}{3}}\right)'$. Применяя (6.3), (6.7) и (6.2) из таблицы производных, имеем $y' = \frac{1}{x} + 3\cos x - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{x} + 3\cos x - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

Пример 2. Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x) = e^x x^2$ равно нулю.

По правилу (6.17) имеем $f'(x) = (e^x)' \cdot x^{-2} + e^x (x^{-2})' = e^x x^{-2} - 2e^x x^{-3}$. Решим уравнение $f'(x) = 0$: $e^x x^{-2} - 2e^x x^{-3} = 0$; $e^x x^{-3}(x-2) = 0$; $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 3. Найти производную функции $f(x) = (4-3x)^6$ и ее значение в точке $x = 1$.

Заметим, что $f(x)$ — сложная функция, поэтому по правилу (6.19) имеем: $f'(x) = 6(4-3x)^5(4-3x)' = 6(4-3x)^5(-3) = -18(4-3x)^5$. $f'(1) = -18(4-3 \cdot 1)^5 = -18$.

Ответ: $-18(4-3x)^5$; -18.

Заполни пропуски

Упражнение 1. Найти производную функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+$ $+\cos x$.

Преобразуем $f(x)$: $f(x)=(x)^{\dots}+\cos x$, тогда $f'(x)=\dots+\dots=\dots$.

Ответ: ... .

Упражнение 2. Найти значения x, при которых значения производной функции $f(x)=\frac{1-x}{x^2+8}$ отрицательны.

По правилу (6.4) $f'(x)=\frac{(\dots)'(\dots)-(\dots)'(\dots)}{(\dots)^2}=\dots$. Решим неравенство ... .

Ответ: ... .

Упражнение 3. Найти производную функции $y=\log_4(10x+3)$.

Так как $y=\log_4(10x+3)$ — сложная функция, воспользуемся правилом (6.5): $y'=\frac{1}{(\dots)\ln 4}\cdot(\dots)'=\dots$.

Ответ: ... .

Упражнение 4. Найти производную функции $y=\cos^2 x$.

По правилу (6.5) $y'=2\dots\cdot(\dots)'=\dots$.

Ответ: ... .

Проверь себя

1) $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}+\cos x$; $f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}+(-\sin x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\sin x$.

2) $f'(x)=\frac{(1-x)'(x^2+8)-(x^2+8)'(1-x)}{(x^2+8)^2}=\frac{-(x^2+8)-2x(1-x)}{(x^2+8)^2}=$ $=\frac{x^2-2x-8}{(x^2+8)^2}$. Решим неравенство $\frac{x^2-2x-8}{(x^2+8)^2}<0$; $\frac{(x-4)(x+2)}{(x^2+8)^2}<0$.

Ответ: $(-2;4)$.

3) $y'=\frac{1}{(10x+3)\ln 4}(10x+3)'=\frac{10}{(10x+3)\ln 4}$.

4) $y'=2\cos x\cdot(\cos x)'=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$

Реши сам

6.1. Найдите производные функций:

а) $y=\cos x+3^x$; б) $y=x^6\ln x$; в) $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; г) $y=3e^{2x}-\sqrt{x}$;

д) $y=\sin^4 x+\cos 5x+2x^3$; е) $y=\frac{x^2-1}{2x+1}$; ж) $y=\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$.

6.2. Вычислите значение производной функции $y=f(x)$ в точке $x=a$, если:

а) $f(x)=x\ln x$, $a=2$; б) $f(x)=x\sin(3x-\frac{\pi}{3})$, $a=\frac{\pi}{6}$;

в) $f(x)=\sqrt{\cos x}$, $a=\frac{\pi}{3}$.

6.3. Найдите наибольшее x, удовлетворяющее неравенству $f'(x)\le g'(x)$, если $f(x)=x^2+x^{-1}$, $g(x)=5x+x^{-1}$.

6.4. Найдите наибольшее x, удовлетворяющее неравенству $f'(x)\le x$, если $f(x)=3x^2+x+e$.

6.5. Найдите значения a и b, при которых выполняются следующие условия: $f(x)=a\sin 4x+b\cos 2x$, $f'\left(\frac{7\pi}{12}\right)=4$, $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2$.

6.2. Физический смысл производной

Пусть закон движения некоторого тела описывается формулой $S=S(t)$, где S — пройденный путь или меняющаяся координата тела (зависимая переменная), t — время (независимая переменная). Тогда *мгновенная скорость тела v в любой момент времени t_0 равна значению производной функции $S'(t)$ в соответствующий момент времени*: $v(t_0)=S'(t_0)$. Ускорение тела, в свою очередь, может быть вычислено как значение производной от скорости в соответствующий момент времени: $a(t_0)=v'(t_0)=(S')'(t_0)=S''(t_0)$. Таким образом, ускорение может быть найдено путем двоекратного дифференцирования функции, выражающей зависимость координаты тела от времени.

Пример. Тело движется по прямой так, что расстояние S, м, до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону $S=0{,}5t^2+3t+2$, где t — время движения, с. Через какое время после начала движения скорость тела окажется равной 15 м/с?

В данной задаче S является координатой движущегося тела. Скорость тела может быть найдена как производная $S'(t)$. Выясним, при каком t выполняется условие $S'(t)=15$. $S'(t)=t+3$; $S'(t)=15$ при $t=12$.

Ответ: через 12 с.

Реши сам

6.6. а) Тело движется по прямой так, что расстояние S, м, от начальной точки изменяется по закону $S=5t-0{,}5t^2$, где t — время движения, с. Найдите скорость тела через 2 с после начала движения.

б) Тело движется по прямой так, что расстояние S, м, до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону $S=4+3t-0{,}5t^2$, где t – время движения, с. Через сколько секунд после начала движения тело остановится?

6.3. Геометрический смысл производной

Пусть дан график функции $y=f(x)$ и на нем выбрана точка M. Проведем через точку M секущую MA. Приближая по кривой точку A к точке M, мы будем менять положение секущей MA (*рис. 14*). *Касательной к кривой в данной точке* называют предельное положение секущей, проходящей через данную точку.

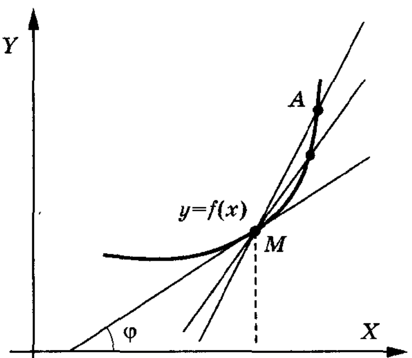


Рис. 14

Касательная к графику функции образует с положительным направлением оси абсцисс некоторый угол $\angle MPX=\varphi$, о величине которого судят по значению $\operatorname{tg}\varphi$, называемого *угловым коэффициентом касательной* (обозначается k). При этом $\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0)$. В этом состоит геометрический смысл производной, а именно: *значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции, проведенной в соответствующей точке.*

При решении задач необходимо помнить, что:

1) условием параллельности двух прямых на координатной плоскости является равенство их угловых коэффициентов: $k_1 = k_2$;
2) условием перпендикулярности двух прямых на координатной плоскости является равенство произведения их угловых коэффициентов минус единице: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Пример 1. Найти угловой коэффициент касательной к графику $y = x - 2\sqrt{-x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Для нахождения углового коэффициента касательной достаточно определить производную функции в заданной точке: $y' = 1 - 2\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$; $y'(-1) = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Найти точки графика функции $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$, в которых касательная к нему имеет угловой коэффициент $k = 3$.

Так как $k = f'(x_0)$, то найдем $f'(x)$ и составим уравнение $f'(x_0) = 3$: $f'(x) = x^2 - 2x$; $x_0{}^2 - 2x_0 = 3$. Решениями уравнения являются $x_{01} = 3$ и $x_{02} = -1$. Найдем ординаты соответствующих точек на графике функции: $y_{01} = 5$, $y_{02} = 3\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $(3; 5)$, $(-1; 3\dfrac{2}{3})$.

Пример 3. В каких точках касательная к графику функции $y = \dfrac{4^x - 2^{x+1}}{\ln 4}$ параллельна прямой $y = 2x + 5$?

При решении этой задачи учтем, что прямые на координатной плоскости параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты. Линейный коэффициент в уравнении прямой равен 2, будем искать касательную с таким же угловым коэффициентом. Определим, при каком значении аргумента производная данной функции равна 2. $y' = \dfrac{4^x \ln 4 - 2^{x+1}\ln 2}{\ln 4} = 4^x - 2^x$; $4^x - 2^x = 2$ при $x = 1$. $y(1) = 0$. Координаты искомой точки $(1;0)$.

Ответ: $(1;0)$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

Чтобы составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, надо:

1) вычислить значение $f(x_0)$;
2) найти производную функции $f(x)$;
3) вычислить значение $f'(x_0)$;
4) подставить найденные значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в общее уравнение касательной.

Пример 4. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{x+2}{3-x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

$f(2) = \dfrac{2+2}{3-2} = 4$; $f'(x) = \dfrac{3-x+x+2}{(3-x)^2} = \dfrac{5}{(3-x)^2}$; $f'(2) = 5$. Уравнение касательной $y = 5(x-2)+4$; $y = 5x - 6$.

Ответ: $y = 5x - 6$.

Пример 5. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \ln(2e - x)$ в точке $x = e$.

$y' = \dfrac{-1}{2e-x} = \dfrac{1}{x-2e}$. $y'(e) = -\dfrac{1}{e}$. $y(e) = \ln e = 1$. $y_{\text{кас}} = 1 + (-\dfrac{1}{e})\cdot(x - e)$; $y_{\text{кас}} = -\dfrac{x}{e} + 2$.

Ответ: $y_{\text{кас}} = -\dfrac{x}{e} + 2$.

Пример 6. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке с ординатой 2.

$y_0 = 2$. Найдем x_0: $2 = \sqrt{x_0}$; $x_0 = 4$. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $y'(4) = \dfrac{1}{4}$. $f'(2) = 5$. Уравнение касательной $y = \dfrac{1}{4}(x-4)+2$; $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

Ответ: $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

Пример 7. Найти уравнение прямой линии, проходящей через начало координат и касающейся графика функции $y=x^3-x-2$.

Обозначим через x_0 абсциссу неизвестной точки касания. Тогда $y'(x_0)=3x_0^2-1$; $y(x_0)=x_0^3-x_0-2$. В уравнение касательной $y=x_0^3-x_0-2+(3x_0^2-1)(x-x_0)$ подставим координаты начала координат и определим $x_0=-1$. Уравнение касательной преобразуется к виду $y=2x$.

Ответ: $y=2x$.

Пример 8. Написать уравнение касательной к графику функции $y=\ln x$, проведенной из точки (0; 0).

Заметим, что точка (0; 0) не лежит на графике функции $y=\ln x$, поэтому значение x_0 абсциссы точки касания нам неизвестно.

Выразим $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ через x_0: $y_0=\ln x_0$, $y'(x_0)=\frac{1}{x_0}$.

Уравнение касательной l имеет вид $y=\frac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln x_0$ (*). Так как l проходит через точку (0; 0), то ее координаты удовлетворяют уравнению (*): $0=\frac{1}{x_0}(0-x_0)+\ln x_0$, откуда $x_0=e$. Подставим найденное значение $x_0=e$ в (*): $y=\frac{1}{e}(x-e)+\ln e$, $y=\frac{1}{e}x$.

Ответ: $y=\frac{1}{e}x$.

Пример 9. Написать уравнение касательной l к кривой $y=x^2-6x+2$, проходящей параллельно прямой m $y=-2x+8$.

Так как искомая касательная l и данная прямая m параллельны, то их угловые коэффициенты равны: $k_l=k_m=-2$. $y'=2x-6$. Учитывая (6.1), получаем $2x_0-6=-2$, то есть $x_0=2$; $y(x_0)=-6$. Уравнение касательной l имеет вид $y=-2(x-2)-6$; $y=-2x-2$.

Ответ: $y=-2x-2$.

Пример 10. Написать уравнение касательной l к кривой $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+5$, проходящей перпендикулярно прямой m $y+\frac{1}{3}x+2=0$.

Уравнение заданной прямой m запишем в виде $y=-\frac{1}{3}x-2$. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямой m и касательной l удовлетворяют условию (6.1), поэтому $k_l k_m=-1$, то есть $k_l=3$. Аналогично *примеру 8* получаем: $x_0^2-2x_0=3$; $x_{01}=3$, $x_{02}=-1$; $y_{01}=5$, $y_{02}=3\frac{2}{3}$. Отсюда l_1 имеет вид $y=3x-4$, l_2 — $y=3x+7\frac{2}{3}$.

Ответ: $y=3x-4$, $y=3x+7\frac{2}{3}$.

Пример 11. Является ли прямая l $y=12x-10$ касательной к графику функции $f(x)=4x^3$?

Если прямая $y=12x-10$ является касательной к графику функции в некоторой точке с абсциссой x_0, то $f'(x_0)=12$, иначе $12x_0^2=12$. Условию удовлетворяют значения $x_{01}=1$ и $x_{02}=-1$.

Напишем уравнения касательных, проведенных к графику функции в точках с абсциссами $x_{01}=1$ и $x_{02}=-1$: $y_1=12x-8$, $y_2=12x+8$.

Ни одна из найденных касательных не совпадает с прямой l. Значит, прямая $y=12x-10$ не является касательной к графику функции $f(x)=4x^3$.

Ответ: нет.

Заполни пропуски

Упражнение 1. Составьте уравнение касательной l к графику функции $y=x-3x^2$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

$y(2)=\ldots$; $y'(x)=\ldots$; $y'(2)=\ldots$; $l: y=\ldots$.

Ответ: ... .

Упражнение 2. Составьте уравнение касательной l к графику функции $y=2-\frac{x}{2}-x^2$ в точке пересечения его с осью ординат.

График функции пересекает ось ординат в точке $x=\ldots$, поэтому $x_0=\ldots$.

Упражнение 3. Найдите точки графика функции $f(x)=x^3-3x^2$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс.

Так как касательная параллельна оси абсцисс, то ее угловой коэффициент $k = \ldots$, следовательно $f'(\ldots) = \ldots.$ ...

Проверь себя

1) $y(2) = 2 - 3 \cdot 4 = -10$; $y'(x) = 1 - 6x$; $y'(2) = -11$.
l: $y = -11 \cdot (x-2) - 10$. $y = -11x + 12$.
Ответ: $y = -11x + 12$.

2) $x = 0$, поэтому $x_0 = 0$. $y(0) = 2$; $y'(x) = 2 - \frac{1}{2} - 2x = 1{,}5 - 2x$; $y'(0) = 1{,}5$.
$l: y = 1{,}5(x-0) + 2$; $y = 1{,}5x + 2$.
Ответ: $y = 1{,}5x + 2$.

3) $k = 0$, следовательно $f'(x_0) = 0$.
$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $3x_0^2 - 6x_0 = 0$; $3x_0(x_0 - 2) = 0$; $x_{01} = 0$, $x_{02} = 2$; $y_{01} = 0$, $y_{02} = -4$.
Ответ: (0; 0), (2; −4).

Реши сам

6.7. По данным *рис. 15* определите $f'(x_0)$.

6.8. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \operatorname{ctg} 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{\pi}{8}$.

6.9. Касательная к графику функции $y = \frac{2e^x}{3x+1}$ проведена через точку пересечения графика с осью ординат. Найдите тангенс угла наклона касательной.

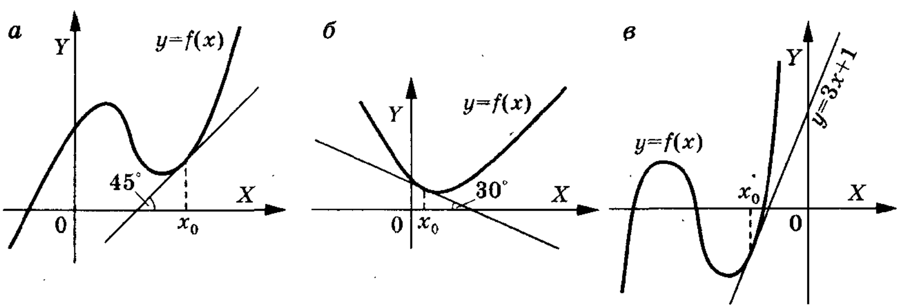


Рис. 15

6.10. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=\frac{x^3+1}{3}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

6.11. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=\frac{4}{x+1}+\frac{x^2}{2}-\sqrt{3}x$ в точке $M_0(1;\frac{5}{2}-\sqrt{3})$ и найдите угол φ, образованный касательной с осью OX.

6.12. Найдите координаты точек на графике функции $y=x^3-2x^2$, в которых касательная параллельна прямой $y=-x$.

6.13. Найдите точку, в которой касательная к кривой $y=x\ln x$ параллельна оси OX. В ответ запишите абсциссу точки.

6.14. Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x)=\frac{1}{x}$, проведенных в точках пересечения графика с прямой $y=\frac{x}{4}$. Докажите, что касательные параллельны.

6.15. Найдите уравнение касательной к графику $y=\sqrt{x+2}$, проведенной через точку $P\left(0;\frac{3}{2}\right)$ с минимальным наклоном.

6.16. На прямой линии $x=-\frac{1}{2}$ найдите точку, из которой можно провести взаимно перпендикулярные касательные к параболе $y=x^2+x$.

6.17. При каком значении a прямая l является касательной к графику функции f: а) l: $y=9x+a$, $f(x)=\frac{9^x-3^{x+1}}{\ln 3}$; б) l: $y=ax$, $f(x)=e^{x-1}-3x$?

6.18. Докажите, что касательные, проведенные к графику функции $y=\frac{x-4}{x-2}$ в точках пересечения с осями координат, параллельны между собой.

6.4. Монотонность и экстремумы

Возрастание и убывание функции

Если производная функции, дифференцируемой на некотором промежутке, положительна, то функция на этом промежутке возрастает; если производная отрицательна — то убывает.

Пример 1. Найти промежутки возрастания функции $y=x^3+3x^2-9x$.

Выясним, при каких значениях x выполняется условие $y'(x)>0$. $y'=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$; $y'(x)>0$ при $x<-3$ и при $x>1$. Добавляя к найденным интервалам $x=-3$ и $x=1$ — точки, в которых функция непрерывна, получаем требуемые промежутки возрастания $(-\infty;-3]$ и $[1;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-3]$; $[1;+\infty)$.

Было бы ошибкой записать ответ в виде объединения найденных промежутков, а именно $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$, так как на этом множестве функция уже не возрастает (сравните $f(-3)=27$ и $f(1)=-9$).

Пример 2. Указать промежутки возрастания и убывания функции $y=\ln x+\frac{1}{x}$.

Функция определена при $x>0$. $y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$. $y'>0$ при $x>1$, $y'<0$ при $0<x<1$. В точке $x=1$ функция непрерывна, ее мы присоединяем к каждому из найденных интервалов. При $x=0$ функция не определена, этот конец интервала в ответе не фигурирует. Итак, y возрастает на $[1;+\infty)$ и y убывает на $(0;1]$.

Ответ: $[1;+\infty)$; $(0;1]$.

Пример 3. Дан график функции $y=f(x)$ (*рис .16*). Определить, при каких значениях x производная: а) $f'(x)>0$, б) $f'(x)<0$.

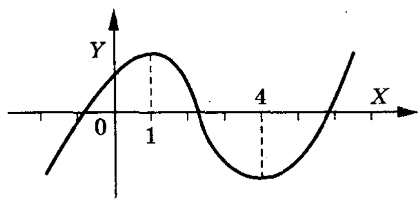


Рис. 16

Так как функция дифференцируема и возрастает на интервалах $(-\infty;1)$ и $(4;+\infty)$, то на этих промежутках $f'(x)>0$. Убывание функции на интервале $(1;4)$ свидетельствует об отрицательном знаке производной.

Ответ: а) при $x \in (-\infty;1) \cup (4;+\infty)$; б) при $x \in (1;4)$.

Точки $x=1$ и $x=4$ — особые: в них касательная расположена горизонтально, а производная обращается в ноль. По этой причине $x=1$ и $x=4$ не включены ни в один из ответов.

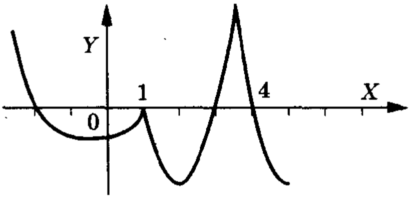


Рис. 17

Пример 4. Дан график *производной* некоторой функции $y=f(x)$ (рис. 17). На каких промежутках функция $y=f(x)$ убывает?

Функция убывает на тех интервалах, где производная отрицательна, то есть на $(-2;1)$, на $(1;3)$ и на $(4;+\infty)$. Так как функция имеет производную, то она непрерывна во всех точках (график состоит из одной сплошной линии). Поэтому к интервалам убывания можно присоединить их концевые точки. Функция убывает на отрезках $[-2;-1]$, $[1;3]$ и на луче $[4;+\infty)$. Кроме того, значение функции в точке $x=1$ меньше ее значений на промежутке $[-2;1)$ и больше значений на промежутке $(1;3]$, значит, функция убывает и на отрезке $[-2;3]$.

Ответ: $[-2;3]$, $[4;+\infty)$.

Для полноценного обоснования решения необходимо использовать такой факт: если функция, заданная на отрезке, убывает (возрастает) на интервале с концами в тех же точках и непрерывна на концах отрезка, то она убывает (возрастает) и на всем отрезке.

Реши сам

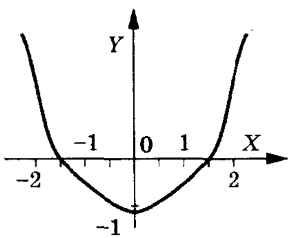


Рис. 18

6.19. Дан график производной некоторой функции (*рис. 18*). На каком из указанных интервалов функция 1) возрастает; 2) убывает: а) $(-2;0)$; б) $(-1;0)$; в) $(1;2)$; г) $(2;3)$?

6.20. Установите соответствие между графиком функции и графиком ее производной: 1) *рис. 19*; 2) *рис. 20*; 3) *рис. 21*.

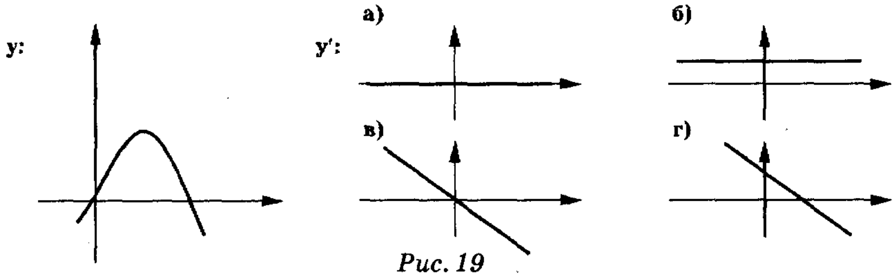


Рис. 19

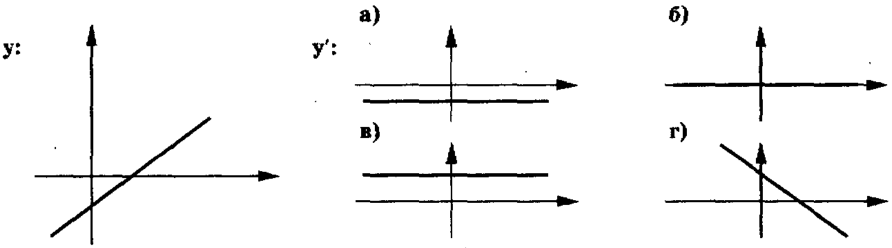


Рис. 20

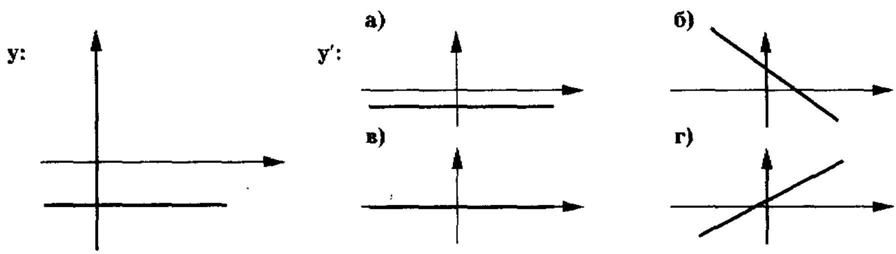


Рис. 21

6.21. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y=x^3-\dfrac{x^2}{2}$; б) $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$; в) $y=x+\dfrac{4}{x^2}$; г) $y=e^{5x}(x-2)$;

д) $y=\sin x-2x$; е) $y=\sqrt{4x^2-x-3}$; ж) $y=\log_2(2x^2-3x-2)$.

6.22. Найдите длину интервала, на котором функция $y=x^3+6x^2-15x+4$ убывает.

6.23. При каких значениях a функция $y=x^3+3ax$ возрастает на всей числовой прямой?

Экстремумы функции

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y=f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)\le f(x_0)$. Так, $x=3$ и $x=7$ являются точками максимума функции, представленной на графике (*рис. 22*).

Точка x_0 называется точкой минимума функции $y=f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$. Значения $x=-3$, $x=5$ и $x=9$ являются точками минимума функции (*рис. 22*).

Точки минимума и максимума функции называются *точками экстремума*.

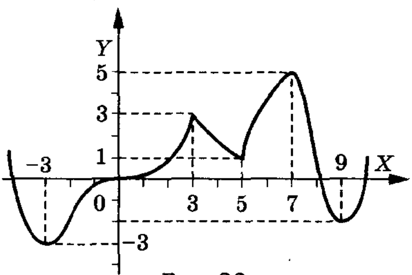


Рис. 22

Значение функции в точке экстремума называется *экстремумом* (минимумом, максимумом) этой функции. Значения $y=-3$, $y=3$, $y=1$, $y=5$, $y=-2$ являются экстремумами функции (рис. 22): $y=-3$, $y=1$, $y=-2$ — минимумы; $y=3$, $y=5$ — максимумы.

Для того чтобы найти точки экстремума функции, необходимо:

1) убедиться в непрерывности функции на исследуемом промежутке;
2) найти все точки x_0, в которых производная равна нулю или она не существует (критические точки);
3) определить знак производной слева и справа от критических точек.

Если при переходе через x_0 производная меняет свой знак с «+» на «−», то это *точка максимума*; если с «−» на «+» — *точка минимума*.

Если производная не меняет свой знак при переходе через критическую точку, то это *точка перегиба*, не являющаяся точкой экстремума. Так, точка $x=0$ является точкой перегиба функции, представленной на графике (рис. 22).

Пример 5. Найти точки экстремума функции $y=-x^3-3x^2+24x-4$ на промежутке $(-5;\frac{1}{5})$.

Найдем производную функции и ее корни:

$y'=-3x^2-6x+24=-3(x-2)(x+4)$; $x_1=-4$, $x_2=2$. $x_2=2$ не входит в рассматриваемый промежуток. Исследуем знак производной на $(-5;\frac{1}{5})$. Левее $x_1=-4$ $y'<0$, а правее — $y'>0$. Значит, $x=-4$ точка минимума.

Ответ: точка минимума $x=-4$.

Пример 6. Найти экстремумы функции $y=-3x-2e^{-x}$.

Сначала выявим точки экстремума. $y'=-3+2e^{-x}$. $-3+2e^{-x}=0$ при $x=\ln\frac{2}{3}$. При переходе через точку $x=\ln\frac{2}{3}$ производная y' меняет знак с «+» на «−», поэтому это точка максимума. Максимум определим непосредственной подстановкой: $y\left(\ln\frac{2}{3}\right)=-3\ln\frac{2}{3}-2e^{-\ln\frac{2}{3}}=3\ln\frac{3}{2}-2\cdot\frac{3}{2}=3\ln\frac{3}{2}-3$.

Ответ: значение максимума в точке $x=\ln\frac{2}{3}$ равно $3\ln\frac{3}{2}-3$.

Реши сам

6.24. Установите точки минимума функции, показанной на *рис. 23*.

6.25. Установите точки максимума функции, показанной на *рис. 24*.

6.26. Установите точки экстремума функции, показанной на *рис. 25*.

6.27. Функция $y=f(x)$ задана своим графиком. Укажите, при каких

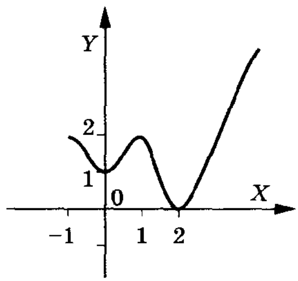


Рис. 23

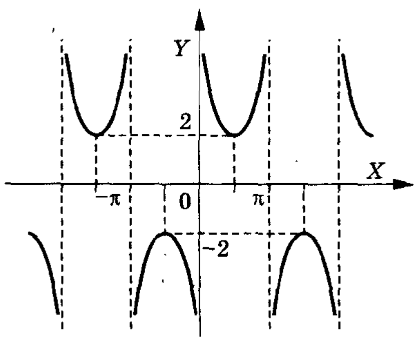


Рис. 24

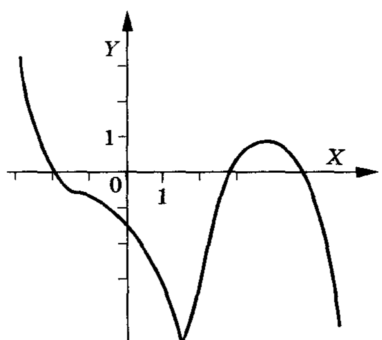


Рис. 25

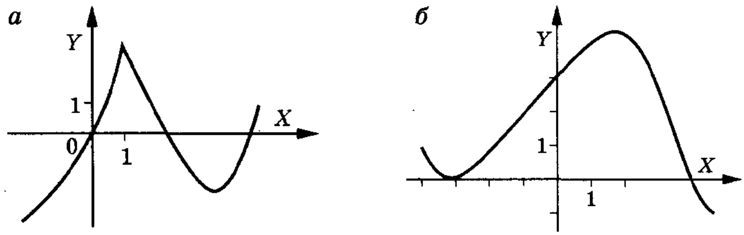


Рис. 26

значениях x выполняется $f'(x)=0$: а) *рис. 26, а*; б) *рис. 26, б*.

6.28. Функция $y=f(x)$ задана своим графиком (*рис. 27*). Укажите: а) промежутки возрастания функции; б) промежутки убывания функции; в) при каких значениях x выполняется $f'(x)>0$; г) при каких значениях x выполняется $f'(x)<0$; д) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс; е) точки экстремума функции; ж) при каких значениях x выполняется $f'(x)=0$.

6.29. Найдите точки экстремума функции: а) $y=x^4-4x^3+20$; б) $y=\cos 2x$; в) $y=x^2e^x$.

6.30. Исследуйте на максимум и минимум функции:

а) $f(x)=x^4-10x^2+9$; б) $f(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{9}{x}$.

6.31. Найдите критические точки функции $y=2x+\dfrac{8}{x}$ и укажите одну точку максимума.

6.32. Найдите точки экстремума функции $y=x^3-6x^2+9x+3$ на промежутке $(-\dfrac{6}{5};2)$.

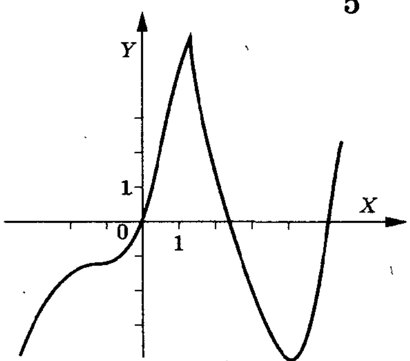


Рис. 27

6.33. Найдите экстремумы функции $f(x)=1{,}5e^{2x}-e^x-2x+3$.

6.34. Докажите, что функция $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x-2$ не имеет ни максимумов, ни минимумов.

6.35. Найдите экстремумы функции: а) $y=x^3-3x^2-9x-4$; б) $y=2x+3e^{-x}$; в) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ на промежутке $[0;2\pi]$.

6.36. При каком m функция $y=m+6x-x^2$ имеет максимум, равный 10?

6.37. Найдите точку минимума функции $y=3x^2-6x^3$.

6.38. Сколько экстремумов имеет функция $y=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$?

6.39. Найдите минимумы функции $f(x)=\cos 2x\sin x$ на $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$.

6.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке

Для того чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке, надо:

1) убедиться в непрерывности функции на этом отрезке;
2) найти экстремумы функции на этом отрезке;
3) найти значения функции на концах отрезка;
4) выбрать из найденных значений наибольшее (наименьшее).

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3+3x^2-36x$ на отрезке $[-4;1]$.

Определим корни производной $f'(x)=6x^2+6x-36$; $x_1=-3$, $x_2=2$ ($x_2 =\notin[-2;1]$). Вычислим значения функции в точке x_1 и на концах исследуемого отрезка: $f(-3)=81$, $f(-4)=64$, $f(1)=-31$. Наибольшее значение 81, наименьшее -31.

Ответ: $\underset{[-4;1]}{f_{\text{наиб.}}}=81$, $\underset{[-4;1]}{f_{\text{наим.}}}=-31$.

Если на интервале $(a;b)$ функция непрерывна и имеет на нем единственный экстремум, то значение функции в этой точке будет являться либо наибольшим, либо наименьшим.

Пример 2. Найти наибольшее или наименьшее значение функции $y=x^2+\frac{16}{x^2}$ на промежутке $x>0$.

$y'=2x-\frac{32}{x^3}=\frac{2(x^4-16)}{x^3}$. На интервале $(0;+\infty)$ есть одна точка экстремума $x=2$, которая является точкой минимума, следовательно, в ней функция достигает своего наименьшего значения $y(2)=8$.

Ответ: $\underset{(0;+\infty)}{y_{\text{наим.}}}=8$.

Пример 3. Найти набольшее значение функции $y=\frac{x^3}{3}-5x$ на промежутке $(3;4)$.

$y'=x^2-5$; $x_1=\sqrt{5}\notin(3;4)$, $x_2=-\sqrt{5}\notin(3;4)$. На промежутке $(3;4)$ функция не имеет точек экстремума, следовательно, на нем она не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Ответ: на промежутке $(3;4)$ функция $y=\frac{x^3}{3}-5x$ не принимает наибольшего значения.

Реши сам

6.40. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке: а) $y=\frac{4}{3}x^3-4x$, $[0;2]$; б) $y=\frac{x^2}{x+5}$, $[-4;1]$; в) $y=2\sin 2x-\cos 4x$, $[\frac{\pi}{2};\pi]$; г) $y=\sqrt{1-2x+x^2}+2^{\log_4(x-5)^2}$, $[-1;4]$.

6.41. Найдите наибольшее или наименьшее значение функции на интервале:
а) $f(x)=-x-\frac{4}{x^2}$, $(0;3)$; б) $(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}$, $(0;3)$; в) $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$, $(1;+\infty)$.

6.6. Первообразная

Функция $F(x)$ называется *первообразной* непрерывной на заданном промежутке функции $f(x)$, если для каждого x из этого промежутка верно $F'(x)=f(x)$.

Нахождение первообразной заключается в поиске функции, производная которой известна. Операция отыскания первообразной именуется *интегрированием*.

Например, функция $F(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\sin 2x+5$ является первообразной функции $f(x)=x^4+\cos 2x$, так как $F'(x)=\frac{5x^4}{5}+\frac{1}{2}\times$ $\times F'(x)=\frac{5x^4}{5}+\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x+0=x^4+\cos 2x=f(x)$.

Операция интегрирования функции определена неоднозначно. Так, в рассмотренном примере первообразной функции $f(x)=x^4+\cos 2x$ служит любая функция вида $\tilde{F}(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\sin 2x+C$, где C — действительное число. В общем случае выполняется свойство: если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то любая функция вида $F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ на этом промежутке.

Некоторая первообразная может быть выделена среди других разными способами, например:

- заданием значения в некоторой точке;
- указанием точки плоскости, через которую проходит ее график;
- свойством уравнения, в котором фигурирует первообразная.

Таблица 4. Первообразные функции

Функция $f(x)$	**Первообразная** $F(x)$	**Функция** $f(x)$	**Первообразная** $F(x)$
a (const)	$ax+C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
$x^\alpha (\alpha\in\mathbb{R}, \alpha\neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$		
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$
e^x	e^x+C	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$		
$\sin x$	$-\cos x+C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$		

Правила нахождения первообразных

1. Если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то $F(x)+G(x)$ является первообразной функции $f(x)+g(x)$.

2. Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то $kF(x)$ — первообразная функции $kf(x)$.
3. Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная функции $f(kx+b)$.

Пример 1. Определить ту из первообразных функции $f(x)=x^2$, график которой проходит через точку $M(1;2)$.

Первообразными для функции $f(x)=x^2$ будут функции вида $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ (*табл. 4*). Учитывая заданное условие, находим C: $2=\frac{1}{3}+C$; $C=1\frac{2}{3}$. Отсюда $F(x)=\frac{x^3}{3}+1\frac{2}{3}$.

Ответ: $F(x)=\frac{x^3}{3}+1\frac{2}{3}$.

Пример 2. Найти значение первообразной функции $y=2x-4$ при $x=1$, если при $x=0$ ее значение равно -2.

Первообразные функции $y=2x-4$ имеют вид $Y(x)=x^2-4x+C$ (см. правило 1 и табл. 4). Определим C из условия $y(0)=-2$: $C=-2$. Значит, $Y(x)=x^2-4x-2$. Тогда $Y(1)=-5$.

Ответ: -5.

Пример 3. При каких значениях x, удовлетворяющих условию $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$, обращается в ноль та из первообразных функции $h(x)=2\cos 2x-\sin x$, которая при $x=\pi$ имеет значение, равное -1?

Пусть $f(x)=2\cos x$, $g(x)=\sin x$, тогда $H(x)=F(x)-G(x)$, где $H(x)$, $F(x)$, $G(x)$ — некоторые из первообразных функций $h(x)$, $f(x)$, $g(x)$ соответственно. По правилам 2 и 3 $F(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2x=\sin 2x$. $G(x)=-\cos x$ (см. табл. 4). Поэтому $H(x)=\sin 2x-(-\cos x)+C=\sin 2x+\cos x+C$. Так как $H(\pi)=1$, то $\sin 2\pi+\cos\pi+C=-1$; $C=0$. Итак, $H(x)=\sin 2x+\cos x$. Найдем корни этой функции: $\sin 2x+\cos x=0$; $\cos x(2\sin x+1)=0$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0;\\ \sin x=-\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Условию $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ удовлетворяют три корня: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{7\pi}{6}$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$.

Реши сам

6.42. Является ли функция $F(x) = x^3 - 3x + 1$ первообразной функции $f(x) = 3(x^2 - 1)$?

6.43. Является ли функция $F(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ первообразной функции $f(x) = 4x^3 - x^2 + x$?

6.44. Для какой из функций:
а) $f(x) = 4x^3 - 8x + 1$; б) $g(x) = 4(x^3 - 2)$; в) $h(x) = 4x(x^2 - 2)$ — функция $F(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ является первообразной?

6.45. Найдите все функции, которые имеют одну и ту же производную $f(x) = \cos x + e^x - 1$.

6.46. Найдите все первообразные функции: а) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$; б) $f(x) = 2\sin x + x^2$; в) $f(x) = \sin 2x + 3\cos 3x$; г) $f(x) = x\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$.

6.47. Найдите первообразную функции $f(x) = 2x^2 + 3$, график которой проходит через точку $(-2;-5)$.

6.48. Найдите какую-нибудь первообразную функции $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2$, которая принимает отрицательное значение при $x = 1$.

6.49. Найдите для функции $f(x) = (1-x)(x-4)^2$ первообразную, график которой касается прямой $y = 16x$.

Вычисление площадей с помощью первообразной

Фигура, ограниченная графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$, называется *подграфиком* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, или *криволинейной трапецией* (*рис. 28*).

Площадь подграфика функции вычисляют по формуле $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

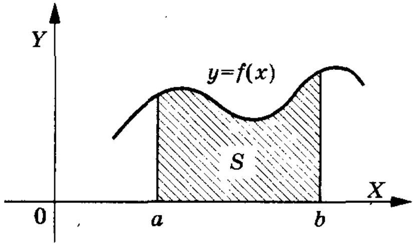


Рис. 28

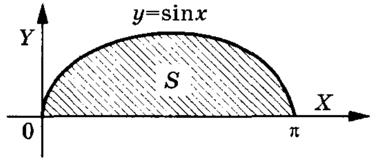


Рис. 29

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой синусоиды и осью OX (*рис. 29*).

Описанная фигура является подграфиком функции $y = \sin x$ на отрезке $[0;\pi]$. Так как $Y(x) = -\cos x$, то $S = -\cos\pi - (-\cos(-\pi)) = 1 + 1 = 2$ (кв. ед.).

Ответ: 2 кв. ед.

При нахождении площадей фигур используют приемы, основанные на свойствах площадей фигур.

(1) Площадь фигуры можно найти, разбив ее на части и затем просуммировав площади всех частей (*рис. 30*).

$S = S_1 + S_2$, где $S_1 = F(c) - F(a)$, $S_2 = G(b) - G(c)$, а $F(x)$ и $G(x)$ — первоообразные $f(x)$ и $g(x)$ соответвтвенно.

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x}$, $y = (x-2)^2$ и осью OX (*рис. 31*).

Найдем точку пересечения графиков функций $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = (x-2)^2$. Решая уравнение $\sqrt{x} = (x-2)^2$, получаем $x = 1$ и $x = 4$.

В соответствии с (1) $S = S_1 + S_2$. $F(x) = \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$; $S_1 = F(1) - F(0) = \dfrac{2}{3}$. $G(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$; $S_2 = G(2) - G(1) = \dfrac{1}{3}$. $S = 1$ (кв. ед.).

Ответ: 1 кв. ед.

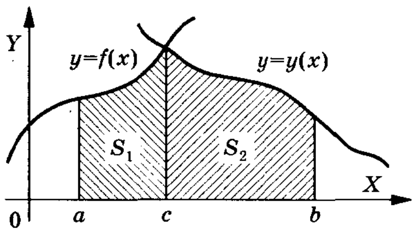


Рис. 30

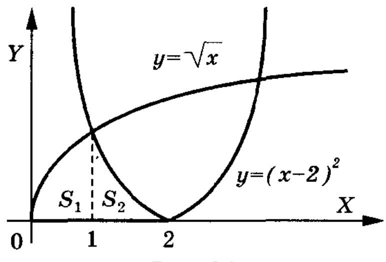


Рис. 31

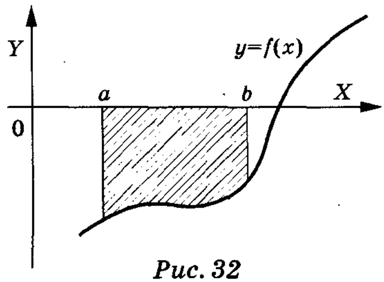


Рис. 32

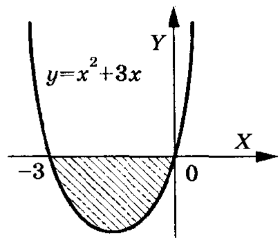


Рис. 33

(2) Площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ выполняется $f(x)\le 0$, осью OX и прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляют по формуле $S=-(F(b)-F(a))$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$ (*рис. 32*).

Пример 6. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+3x$ и осью OX (*рис. 33*).

$$Y(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}.\ S=-(Y(0)-Y(-3))=-(0-(-9+\frac{27}{2}))=4{,}5\ (\text{кв. ед.}).$$

Ответ: 4,5 кв. ед.

(3) Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ в случае, когда $f(x)\ge g(x)$ при всех $x\in[a;b]$, определяется равенством $S=H(b)-H(a)$, где $H(x)$ — одна из первообразных функции $(f(x)-g(x))$ (*рис. 34*).

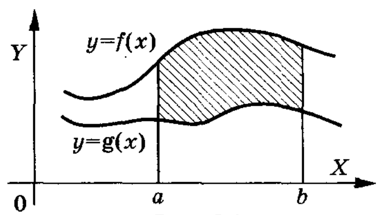


Рис. 34

Пример 7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=\cos x-1$, $y=\frac{\pi}{2}$, $y=\pi$.

Заметим, что при $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ выполняется $\sin x>\cos x-1$.

Тогда $H(x)=-\cos x-\sin x+x$, и в этом случае $S=H(\pi)-H(\frac{\pi}{2})=$ $=2+\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $2+\frac{\pi}{2}$.

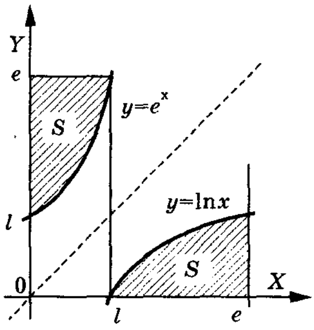


Рис. 35

(4) Задачу определения площади данной фигуры можно заменить нахождением площади равной фигуры.

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\ln x$, $x=e$ и осью абсцисс (*рис. 35*).

Описанная фигура является подграфиком функции $y=\ln x$ на отрезке $[0; e]$. Отыскание первообразной функции $y=\ln x$ непросто, поэтому заменим фигуру равной ей — симметричной относительно прямой $y=x$. Вторая фигура ограничена линиями $y=e^x$, $y=e$ и осью ординат. Теперь, применяя правило (3), находим $H(x)=ex-e^x$, $S=1$.

Ответ: 1.

Реши сам

6.50. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:а) $y=x^2-4x+3$, $x=0$, $y=0$; б) $y=x^2-4x+3$, $y=0$; в) $y=x^2-4x+3$, $y=-1$, $x=0$; г) $y=x^2-4x+3$, $y=2x-5$; д) $y=x^2+2x+1$, $y=x^2-2x+1$, $y=4$; е) $y=\sin x$, касательной к графику в точке с абсциссой $x_0=\pi$ и прямой $x=\frac{\pi}{2}$; ж) $y=x^2+11$ и касательными к ней, проведенными из точки $(0;2)$; з) осями координат, $y=x^2+3$ и касательной в точке $(-2;7)$.

6.51. Фигура Φ ограничена линиями $y=-x^2+2x+3$ и $y=0$. Найдите отношение площадей фигур, на которые фигура Φ делится графиком функции $y=(x+1)^2$.

6.52. Для каждого $a<0$ найдите площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x=2a$, $x=a$, $y=0$ и графиком функции $y=-\frac{3}{x}$. Сравните площадь S с числом 3.

6.53. Найдите ту первообразную $F(x)$ функции $f(x)=2x+4$, график которой касается прямой $y=6x+3$. Вычислите площадь S фигуры, ограниченной графиком найденной первообразной и прямыми $y=6x+3$ и $y=0$.

Раздел III
ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА 7. ПЛАНИМЕТРИЯ

Произвольный треугольник

Обозначения: a, b, c — стороны, противолежащие углам A, B, C соответственно; α, β, γ — значения углов A, B, C соответственно; $\frac{a+b+c}{2}=p$ — полупериметр треугольника; m_a, m_b, m_c — медианы, проведенные из вершин A, B, C соответственно; h_a, h_b, h_c — высоты, проведенные из вершин A, B, C соответственно; S — площадь треугольника; R — радиус описанной около треугольника окружности; r — радиус вписанной в треугольник окружности.

$\alpha + \alpha + \alpha = 180°$;

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ — теорема косинусов;

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$ — теорема синусов;

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$;

$S=\frac{1}{2}ah_a$; $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$;

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона;

$\frac{a}{h_b}=\frac{b}{h_a}$ — следствие из первой формулы площади треугольника;

$$r=\frac{S}{p};R=\frac{abc}{4S}.$$

Средняя линия треугольника параллельна соответствующей ей стороне треугольника и равна ее половине.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Площадь треугольника, образованного отрезками двух медиан (при их пересечении) и стороной треугольника, равна 1/3 площади данного треугольника.

Центр окружности, описанной около треугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника.

Центр окружности, вписанной в треугольник, — точка пересечения биссектрис треугольника.

Прямоугольный треугольник

Обозначения: $\angle C = 90^\circ$, a, b — катеты, c — гипотенуза; α,β — значения углов A, B соответственно; a_c, b_c, — проекции катетов a и b на гипотенузу c соответственно; h_c — высота, проведенная к гипотенузе; S — площадь треугольника; R — радиус описанной около треугольника окружности; r — радиус вписанной в треугольник окружности.

$\alpha + \alpha = 90^\circ$;

$c^2 = b^2 + a^2$ — теорема Пифагора;

$S=\frac{1}{2}ab$; $S=\frac{1}{2}ch_c$; $r=\frac{a+b-c}{2}$;

$R=\frac{c}{2}$ (центр описанной окружности — середина гипотенузы);

$a^2 = ca_c$; $b^2 = cb_c$; $h_c^2 = a_cb_c$;

$\sin\alpha=\frac{a}{c}$; $\cos\alpha=\frac{b}{c}$; $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a}{b}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{b}{a}$.

Равносторонний треугольник

Обозначения: a — сторона треугольника, α — угол треугольника; h — высота треугольника; S — площадь треугольника; R — радиус описанной около треугольника окружности; r — радиус вписанной в треугольник окружности.

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ; \ a = b = c;$$

$$h_a = h_b = h_c = h; \ h = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad r + R = h.$$

Центры вписанной и описанной окружностей совпадают и являются точкой пересечения медиан (биссектрис, высот) треугольника.

Произвольный четырехугольник

Обозначения: d_1, d_2 — диагонали четырехугольника; φ — угол между диагоналями; S — площадь четырехугольника.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi.$$

Параллелограмм

Обозначения: a, b — смежные стороны параллелограмма; α — угол параллелограмма; d_1, d_2 — диагонали; φ — угол между диагоналями; h_a, h_b — высоты параллелограмма; S — площадь параллелограмма.

$$S = ah_a; \ S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi; \ S = ab\sin\alpha;$$

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a}.$$

Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

Диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника, площадь каждого из которых равна 1/4 площади параллелограмма.

Прямоугольник

Обозначения: a, b — смежные стороны прямоугольника; d — диагональ прямоугольника; φ — угол между диагоналями; R — радиус описанной около прямоугольника окружности, S — площадь прямоугольника.

$$S=ab;\ S=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi;$$

$$R=\frac{d}{2}.$$

Ромб

Обозначения: a — сторона ромба; α — угол ромба; d_1, d_2 — диагонали ромба; h — высота ромба; r — радиус вписанной в ромб окружности; S — площадь ромба.

$$S = ah;\ S = a^2\sin\alpha;\ S=\frac{d_1d_2}{2};$$

$$r=\frac{h}{2}.$$

Квадрат

Обозначения: a — сторона квадрата; d — диагональ квадрата; r — радиус вписанной в квадрат окружности; R — радиус описанной около квадрата окружности; S — площадь квадрата.

$$S=a^2;\ S=\frac{d^2}{2};\ S=4r^2;\ S=2R^2;$$

$$r=\frac{a}{2};\quad R=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Трапеция

Обозначения: a, b — основания трапеции; h — высота трапеции; l — средняя линия трапеции; d_1, d_2 — диагонали трапеции; φ — угол между диагоналями; S — площадь трапеции.

$$l=\frac{a+b}{2};$$

$$S=\frac{a+b}{2}h;\ S=lh;\ S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi.$$

Равнобедренная трапеция, диагонали которой взаимно перпендикулярны

Средняя линия равнобедренной трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями равна ее высоте.

Площадь равнобедренной трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями равна квадрату средней линии (квадрату высоты).

Четырехугольник и окружность

Обозначения: α, β, γ, δ — углы четырехугольника, взятые в последовательном порядке; a, b, c, d — стороны четырехугольника, взятые в последовательном порядке; P — периметр четырехугольника; r — радиус вписанной в четырехугольник окружности, S — площадь четырехугольника.

Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов четырехугольника была равна 180°, то есть $\alpha + \gamma = \delta + \beta$.

Центр окружности, описанной около четырехугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам четырехугольника.

Для того чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон четырехугольника были равны, то есть

$$a+c=b+d.$$

Центр окружности, вписанной в выпуклый четырехугольник, — точка пересечения биссектрис углов четырехугольника.

$$S=\frac{1}{2}Pr.$$

Трапеция и окружность

Если около трапеции описана окружность, то трапеция равнобедренная.

Если окружность вписана в трапецию, то сумма оснований трапеции равна сумме ее боковых сторон.

Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен половине высоты трапеции.

Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то высота трапеции равна среднему геометрическому ее оснований (радиус окружности равен среднему геометрическому половины ее оснований).

7.1. Треугольники

Пример 1. Найти углы треугольника, если известно, что медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят соответствующий угол на четыре равных угла.

Анализ. Из условия следует, что угол, из вершины которого проведены медиана, биссектриса и высота, имеет вполне определенную величину. Значит, треугольник, о котором идет речь в задаче, определенного вида. Такими треугольниками являются равносторонний и прямоугольный. Равносторонним данный треугольник быть не может (объясните, почему). Остается предположить, что треугольник прямоугольный, но это нужно доказать.

Доказательство того, что данный треугольник прямоугольный, можно провести, опираясь на утверждение: *во всяком треугольнике, вписанном в окружность, серединный перпендикуляр к стороне пересекает биссектрисы противолежащего ей угла и смежного с ним угла в точках, принадлежащих окружности.* (Докажите это утверждение самостоятельно.)

Решение: докажем, что точка C лежит на окружности диаметра AK (*рис. 36*). Для этого достаточно доказать, что точка M (середина AK) — центр окружности.

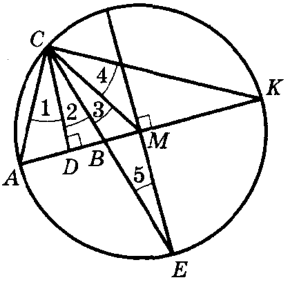


Рис. 36

Выполним дополнительное построение — проведем серединный перпендикуляр к отрезку AK; E — точка пересечения биссектрисы и серединного перпендикуляра — принадлежит окружности, описанной около треугольника.

$CD \parallel ME$, CE — секущая, тогда $\angle 2 = \angle 5$. Но $\angle 2 = \angle 3$ (по условию), тогда $\angle 3 = \angle 5$, то есть $CM = ME$.

Имеем: точка M (середина стороны AK треугольника) принадлежит серединному перпендикуляру стороны AK треугольника и равноудалена от точек C и E, принадлежащих окружности, описанной около треугольника. Вывод: M — центр окружности с диаметром AK, описанной около данного треугольника. Значит, $\angle C = 90^\circ$.

Далее находим искомые величины: $\angle CAD = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - 22{,}5^\circ = 67{,}5^\circ$; $\angle CKA = 22{,}5^\circ$.

Ответ: 90°; $22{,}5^\circ$; $67{,}5^\circ$.

Пример 2. Через вершину угла величиной 75° равнобедренного треугольника проведена прямая под углом 30° к основанию, разбивающая треугольник на две части (*рис. 37*). Найти отношение площадей этих частей.

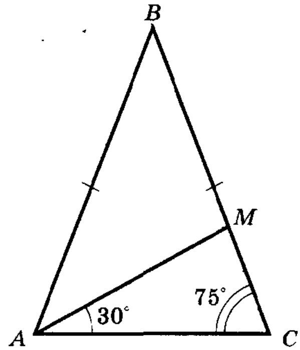


рис. 37

Анализ. Так как треугольники AMC и AMB имеют общую высоту, то для нахождения отношения площадей этих треугольников достаточно найти отношение оснований MC и MB. Так как в условии задачи даны только величины углов, введем вспомогательную величину $AC = a$.

Можно заметить, что треугольник AMC — равнобедренный с основанием MC. Выразив MC и BC через a, найдем отношение MC к MB.

Решение.

1. Рассмотрим треугольник ABC: Пусть $AC = a$. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin 75^\circ} = \frac{a}{\sin 30^\circ}$; $BC = \frac{a \sin 75^\circ}{\sin 30^\circ}$; $\mathrm{BC} = 2a \sin 75^\circ$.

2. Рассмотрим треугольник AMC: $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 75^\circ$, тогда $\angle M = 75^\circ$. Треугольник — равнобедренный с основанием MC: $MC = 2a \sin 15^\circ$.

3. Имеем:

$$BM = BC - MC = 2a \sin 75^\circ - 2a \sin 15^\circ = 2a 2 \sin 30^\circ \cos 45^\circ = a\sqrt{2}.$$

Тогда $\frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta ABM}} = \frac{MC}{BM} = \frac{2a \sin 15^\circ}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2} \sin 15^\circ$.

Ответ: $\sqrt{2} \sin 15^\circ$.

Реши сам

7.1. В треугольнике известны две стороны 6 см и 3 см. Найдите третью сторону, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.

7.2. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30°, длина боковой стороны — $6\sqrt{3}$ см. Найдите площадь треугольника, образованного отрезками двух медиан и стороной данного треугольника.

7.3. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки K и P так, что $AK:BK=1:2$, $CP:BP=2:1$. Прямые AP и CK пересекаются в точке E. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BEC равна 4.

7.4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если известны его гипотенуза 4 и сумма синусов его острых углов $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

7.2. Четырехугольники

Пример 1. Перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на диагональ, делите на отрезки 6 и 15 см (*рис. 38*). Найти стороны и диагонали параллелограмма, если известно, что разность сторон равна 7 см.

Анализ. Стороны параллелограмма AB и BC можно рассматривать как наклонные, проведенные из точки B к прямой, содержащей диагональ AC. По свойству наклонных, проведенных к прямой из одной точки, большей проекции соответствует большая наклонная.

Прямоугольные треугольники ABK и CBK связывает общий катет. Применяя *алгебраический метод*, можно составить уравнение, решение которого позволит найти стороны параллелограмма.

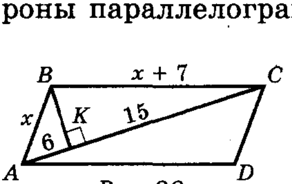


Рис. 38

Диагональ AC параллелограмма равна сумме заданных отрезков AK и KC. Для нахождения второй диагонали можно воспользоваться следствием из теоремы косинусов: *сумма квадра-*

тов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Решение. Пусть $AK = 6$ см, $KC = 15$ см, тогда $AB < BC$. Введем вспомогательную величину $AB = x$, тогда $BC = x + 7$. Выразим квадрат BK из прямоугольных треугольников ABK и CBK, получим уравнение $(x+7)^2 - 15^2 = x^2 - 6^2$. Решив это уравнение, найдем стороны параллелограмма: $AB = 10$ см, $BC = 17$ см. $AC = 6 + 15 = 21$ см.

Далее: $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$; $BD^2 = 2(10^2 + 17^2) - 21^2 = 337$; $BD = \sqrt{337}$ см.

Ответ: 17 см ; 10 см ; 21 см ; $\sqrt{337}$ см.

Пример 2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали взаимно перпендикулярны, высота трапеции равна 12 см. Расстояние от вершины A до прямой CD в три раза больше, чем расстояние от вершины B до этой прямой (*рис. 39*). Найдите основания трапеции.

Анализ. Прежде всего, отметим замечательное свойство равнобедренной трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями: *средняя линия и высота равнобедренной трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями равны.* Это свойство можно доказать, заменив рассматриваемую трапецию равновеликим ей равнобедренным прямоугольным треугольником. (Доказательство проведите самостоятельно.)

Зная среднюю линию трапеции, можно найти сумму ее оснований. Основания трапеции можно вычислить по их сумме и отношению (отношение оснований трапеции найдем из подобия треугольников ADP и BCK).

Решение. По отмеченному свойству, средняя линия данной трапеции равна ее высоте, то есть 12 см. Тогда сумма ее оснований равна 24 см.

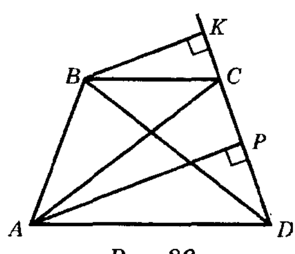


Рис. 39

Рассмотрим треугольники ADP и BCK: треугольники подобны по двум углам ($\angle K = \angle P = 90°$; $\angle C = \angle D$ как соответственные при параллельных прямых и секущей).

Коэффициент подобия $k=\dfrac{AP}{BK}=\dfrac{3}{1}$. Значит, $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{3}{1}$.

Разделим 24 в отношении 3 : 1, получим основания трапеции: 6 см и 18 см.

Ответ: 6 см и 18 см.

На основе свойства равнобедренной трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями, выделенного в *примере 2*, сформулируйте свойство площади трапеции этого вида.

Реши сам

7.5. Одно из оснований равнобедренной трапеции в 3 раза длиннее другого. Один из ее углов 135°. Найдите отношение квадрата периметра трапеции к ее площади.

7.6. Найдите площадь ромба, если его высота равна 12 см, а меньшая диагональ равна 13 см.

7.7. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle D = 60°$, $AB=\sqrt{3}$, $BC = 3$, $CD = 2\sqrt{3}$. Найдите углы B и C.

7.8. Найдите площадь равнобокой трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, если высота этой трапеции равна 12.

7.3. Комбинации многоугольников

Пример 1. В ромб вписан прямоугольник так, что все его вершины лежат на сторонах ромба, причем большая сторона прямоугольника параллельна большей диагонали ромба (*рис. 40*). Найти площадь прямоугольника, если его стороны относятся как $1:2$, сторона ромба равна 4, острый угол равен 60°.

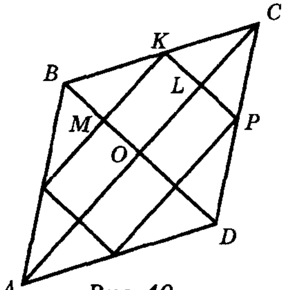


Рис. 40

Анализ. Чтобы найти площадь прямоугольника, достаточно найти его стороны. Так как нам известно отношение сторон, достаточно найти одну сторону.

Нам задана комбинация прямоугольника и ромба. Установим свойства этой комбинации:

• по условию большая сторона прямоугольника параллельна большей диагонали ромба, тогда меньшая сторона прямоугольника параллельна меньшей диагонали ромба (можно доказать, что $MKDO$ — прямоугольник);

- отметим свойство ромба, острый угол которого равен $60°$: *меньшая диагональ ромба с углом $60°$ делит ромб на два равносторонних треугольника.*

Рассматривая подобие треугольников KCP и BCD, можно найти меньшую сторону прямоугольника, а затем и площадь.

Решение.

1. Рассмотрим четырехугольник $MKLO$: $MO \perp LO$ по свойству диагоналей ромба, $MK \parallel OL$ по условию, тогда $\angle KMO$ — прямой по свойству внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей. Вывод: в четырехугольнике $MKLO$ три прямых угла, тогда четвертый угол — прямой, то есть $MKLO$ — прямоугольник и $KP \parallel BD$.

2. Так как $KP \parallel BD$, треугольники KCP и BCD подобны. Из подобия треугольников и свойства ромба с углом $60°$ имеем: $\frac{x}{4} = \frac{4\sqrt{3}/2 - x}{4\sqrt{3}/2}$; $\frac{x}{1} = \frac{4\sqrt{3} - 2x}{\sqrt{3}}$; $x(2+\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$; $x = \frac{4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, где x — меньшая сторона прямоугольника.

3. Найдя меньшую сторону прямоугольника, вычислим его площадь: $S = 2\left(\frac{4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 = 96\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Ответ: $96\left(2-\sqrt{3}\right)^2$.

Пример 2. На меньшем основании равнобедренной трапеции построен равносторонний треугольник. Его высота равна высоте трапеции, а площадь в 5 раз меньше площади трапеции (*рис. 41*). Найти угол при большем основании трапеции.

Анализ. Чтобы найти угол A трапеции, достаточно найти значение какой-либо тригонометрической функции этого угла. Так как условием задачи связаны площади треугольника и трапеции, очевидно, целесообразно найти тангенс угла A, а для этого нужно знать BP и AP.

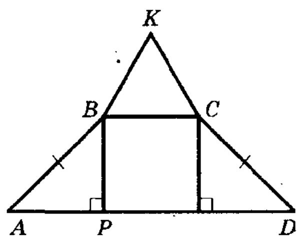


Рис. 41

Решение.

1. Так как условием задачи связаны площади фигур, а линейных величин не задано, введем вспомогательную линейную величину a, обозначив ею общую сторону BC треугольника и трапеции.

2. Выразим площадь равностороннего треугольника через a: $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

3. По условию высота трапеции равна высоте равностороннего треугольника, а отношение площадей рассматриваемых фигур равно 5. Используя эти данные, составим уравнение и выразим основание AD трапеции через a: $\dfrac{(a+AD)}{2}\,\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=5\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $a+AD=5a$; $AD=4a$.

4. По свойству равнобедренной трапеции $AP=(4a-a)/2=$ $=3a/2$.

5. Из прямоугольного треугольника ABP находим тангенс угла A: $\operatorname{tg}A=\dfrac{BP}{AP}$; $\operatorname{tg}A=\dfrac{a\sqrt{3}/2}{3a/2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Вывод: $\angle A = 30^\circ$.

Ответ: 30°

Пример 3. В равнобедренный треугольник с углом a при основании вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на основании треугольника, а две другие — на сторонах треугольника (*рис. 42*). При каком отношении сторон прямоугольника его площадь будет наибольшей?

Решение.

1. В нашей задаче нет линейных данных, поэтому в качестве вспомогательной величины введем a, обозначив ею половину основания равнобедренного треугольника, а переменной x обозначим половину стороны прямоугольника, лежащей на основании треугольника.

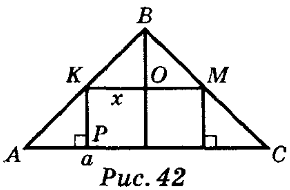


Рис. 42

2. Выразим вторую сторону прямоугольника через a, x и α: $KP =$ $= (a - x)\operatorname{tg}\alpha$.

Составим функцию площади прямоугольника: $S(x) = 2x(a - x)\operatorname{tg}\alpha$ или $S(x) = 2\operatorname{tg}\alpha \cdot x(a - x)$. Так как $2\operatorname{tg}\alpha$ —

величина постоянная, введем функцию $f(x) = x(a - x)$ и исследуем ее на наибольшее значение.

По свойству квадратичной функции точкой наибольшего значения является точка $x=\frac{a}{2}$.

3. Выразим стороны прямоугольника и найдем отношение сторон: $KM = a$, $KP=\frac{a}{2}\text{tg}\alpha$; $\frac{KM}{KP}=\frac{a}{\frac{a}{2}\text{tg}\alpha}$; $\frac{KM}{KP}=\frac{2}{\text{tg}\alpha}$.

Ответ: $\frac{2}{\text{tg}\alpha}$.

Задачи, в которых нужно найти условия, определяющие наибольшее (наименьшее) значение величины, в курсе математического анализа решались по определенному алгоритму:
1) вводилась переменная величина;
2) с подключением данных задачи составлялась функция от введенной переменной, о наибольшем (наименьшем) значении которой шла речь в задаче;
3) составленная функция исследовалась на наибольшее (наименьшее) значение.

Реши сам

7.9. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 4, а угол 30°. В этот треугольник вписан прямоугольник, у которого одна сторона в два раза больше другой. Найдите площадь прямоугольника, если его большая сторона лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах.

7.10. Основание треугольника равно b. В этот треугольник вписана трапеция, у которой три стороны равны a, а острый угол составляет 60°. Меньшее основание трапеции лежит на основании треугольника, большее — параллельно основанию треугольника и его концы лежат на двух других сторонах треугольника. Найдите площадь треугольника.

7.11. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат таким образом, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две на катетах. Сторона квадрата равна 3. Найдите гипотенузу.

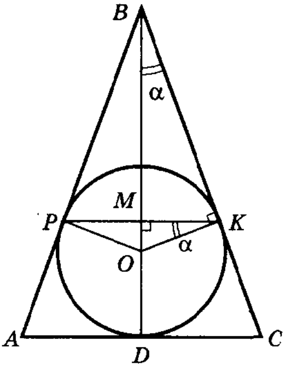


Рис. 43

7.4. Комбинации многоугольника и окружности

Пример 1. В равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 10 см, и основанием, равным 6 см, вписана окружность (*рис. 43*). Найти расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами треугольника.

Анализ. В силу симметрии комбинации данных фигур относительно прямой BD для нахождения расстояния PK достаточно найти расстояние MK.

MK можно найти из прямоугольного треугольника MKO, зная OK и косичус угла MKO.

OK можно найти по формуле радиуса окружности, вписанной в треугольник. Тригонометрическую функцию острого угла MKO величиной α можно найти, рассматривая треугольник DBC, так как прямоугольные треугольники MKO и DBC имеют равные острые углы.

Решение.

1. Рассмотрим $\triangle ABC$ (равнобедренный, $BC = 10$, $AC = 6$, BD — высота, проведенная к основанию): $DC = 3$, $BD = \sqrt{100-9} = \sqrt{91}$, $S = 3\sqrt{91}$.

Имеем периметр: $P = 10 + 10 + 6 = 26$, $S = 3\sqrt{91}$, тогда $r = \dfrac{2\cdot 3\sqrt{91}}{26} = \dfrac{3\sqrt{91}}{13}$.

2. Из $\triangle DBC$ $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{91}}{10}$.

3. $\triangle MKO$: $OK = \dfrac{3\sqrt{91}}{13}$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{91}}{10}$, $\angle OMK$ — прямой (в силу симметрии комбинации фигур относительно прямой BD и, как следствие, симметричности точек P и K относительно BD). Тогда $MK = \dfrac{3\sqrt{91}\cdot\sqrt{91}}{13\cdot 10} = \dfrac{21}{10}$; $KP = \dfrac{21}{10}\cdot 2 = 4{,}2$ (см).

Ответ: 4,2 см.

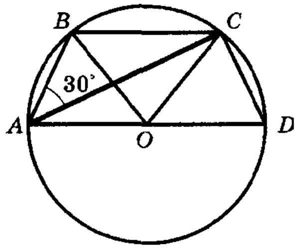


Рис. 44

Пример 2. Трапеция $ABCD$ (AD и BC — основания) вписана в окружность, радиус которой равен 4 см; AC — биссектриса угла A, угол BAC равен 30° (*рис. 44*). Найти площадь трапеции.

Анализ. Так как трапеция вписана в окружность, то трапеция равнобедренная.

По условию диагональ AC трапеции — биссектриса угла при основании, тогда можно доказать, что треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC.

Используя свойство углов равнобедренной трапеции, можно доказать, что $\angle ACD$ — прямой, то есть центр описанной окружности лежит на основании трапеции.

Далее можно вычислить площадь трапеции.

Решение.

1. Рассмотрим трапецию $ABCD$: $\angle BAC = 30^\circ$, AC — биссектриса $\angle BAD$, тогда $\angle BAD = 60^\circ$, а $\angle ABC = 120^\circ$ (сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180°).

2. $\angle BAC = \angle CAD$ (по свойству биссектрисы); $\angle CAD = \angle BCA$ (свойство внутренних накрест лежащих углов при параллельных и секущей); тогда $\angle BAC = \angle BCA$ (свойство транзитивности отношения равенства). Вывод: ΔABC — равнобедренный с основанием AC.

3. $\angle BCA = \angle BAC = 30^\circ$, тогда $\angle ACD = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$, то есть центр окружности является серединой AD.

4. Площадь трапеции в данном случае равна утроенной площади ΔABO (треугольники ABO, BOC и OCD — равносторонние, сторона равна радиусу окружности). $S = 3\frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$.

Ответ: $12\sqrt{3}$ см².

Пример 3. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см.

Для решения этой задачи целесообразно применить координатный метод, поместив треугольник в декартову систему координат (*рис. 45*).

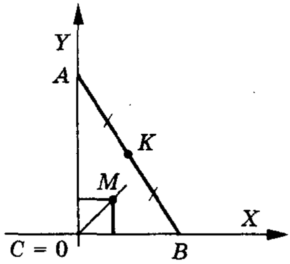


Рис. 45

Решение. Пусть ABC — данный треугольник: $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$. Поместим его в систему координат: $C = 0$, $AC \subset 0Y$, $BC \subset 0X$.

Тогда C (0; 0), A (0; 4), B (3; 0).

Пусть K — центр описанной окружности, тогда K — середина AB и K (1,5; 2).

Пусть M — центр вписанной окружности. Координаты точки M равны, так как она принадлежит биссектрисе угла C и каждая из них равна радиусу вписанной окружности.

Стороны треугольника составляют 3, 4, 5, тогда $r = \frac{3+4-5}{2} = 1$, то есть M (1; 1).

По формуле расстояния между двумя точками найдем расстояние между центрами окружностей: $MK = \sqrt{(1{,}5-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{1{,}25} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см.

Реши сам

7.12. Около окружности описана равнобокая трапеция, у которой боковая сторона точкой касания делится на отрезки 4 см и 9 см. Найдите площадь трапеции.

7.13. В треугольник со сторонами 20, 20 и 24 вписана окружность. Другая окружность касается основания, боковой стороны треугольника и данной окружности. Найдите радиус этой окружности.

7.14. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен 72°. Через вершину A и центр описанной окружности проведена прямая до пересечения в точке K со стороной BC; $BK = 5$. Найдите радиус описанной окружности.

7.15. Основания прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равны 5 см и 8 см. Найдите площадь этой трапеции.

7.16. Выпуклый четырехугольник описан около окружности с центром O, причем $AO = OC = 1$, $BO = OD = 2$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

ГЛАВА 8. СТЕРЕОМЕТРИЯ

Наклонная призма

Обозначения: l — боковое ребро; $P_{сеч}$ — периметр перпендикулярного сечения; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ — площадь полной поверхности; $S_{осн}$ — площадь основания; $S_{сеч}$ — площадь перпендикулярного сечения; H — высота призмы; V — объем призмы.

$S_{бок} = P_{сеч} l$; $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$;
$V = S_{осн} H$; $V = S_{сеч} l$.

Прямая призма

Обозначения: l — боковое ребро; P — периметр основания; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ — площадь полной поверхности; $S_{осн}$ — площадь основания; H — высота призмы; V — объем призмы.

$l = H$;
$S_{бок} = PH$; $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$;
$V = S_{осн} H$.

Произвольная пирамида

Обозначения: P — периметр основания; l — высота боковой грани; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ — площадь полной поверхности; $S_{осн}$ — площадь основания; H — высота пирамиды; a — величина двугранного угла при основании; r — радиус вписанного шара; V — объем пирамиды.

$S_{бок} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, где $S_1 \ldots,$ S_n — площади боковых граней;

$S_{бок} = \frac{1}{2} Pl$ (если высоты боковых граней равны);

$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}$ (если двугранные углы при ребрах основания равны);

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}};$$
$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H; \; V = \frac{1}{3}S_{\text{полн}}r.$$

Правильная пирамида

Обозначения: P — периметр основания; l — апофема; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности; $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности; $S_{\text{осн}}$ — площадь основания; H — высота пирамиды; a — величина двугранного угла при основании; r — радиус вписанного шара; V — объем пирамиды.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}Pl; \; S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha};$$
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}};$$
$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H; \; V = \frac{1}{3}S_{\text{полн}}r.$$

Правильная усеченная пирамида

Обозначения: P_1, P_2 — периметры оснований; l — апофема; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности; $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности; S_1, S_2 — площади оснований; H — высота пирамиды; r — радиус вписанного шара; V — объем пирамиды.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l; \; S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2;$$
$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)H; \; V = \frac{1}{3}S_{\text{полн}}r.$$

Цилиндр

Обозначения: l — образующая цилиндра; R — радиус основания; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности; $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности; $S_{\text{осн}}$ — площадь основания; H — высота цилиндра; V — объем цилиндра.

$$l = H;$$
$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH;$$
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R);$$
$$V = S_{\text{осн}}H = \pi R^2 H.$$

Конус

Обозначения: R — радиус основания; l — образующая конуса; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ — площадь полной поверхности; $S_{осн}$ — площадь основания; H — высота конуса; V — объем конуса.

$$S_{бок} = \pi R l;$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \pi R l + \pi R^2 = \pi R(l + R);$$

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} H = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Усеченный конус

Обозначения: R_1, R_2 — радиусы оснований; l — образующая конуса; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ — площадь полной поверхности; S_1, S_2 — площади оснований; H — высота конуса; V — объем конуса.

$$S_{бок} = \pi(R_1 + R_2) l; \quad S_{полн} = S_{бок} + S_{осн};$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) H.$$

Шар (сфера)

Обозначения: R — радиус шара (сферы); S — площадь поверхности шара (сферы); V — объем шара.

$$S = 4\pi R^2; \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Сфера и призма

Для того чтобы около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и чтобы около ее основания можно было описать окружность.

Центр сферы, описанной около призмы, является серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований призмы.

Для того чтобы в призму можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы в перпендикулярное сечение призмы можно было вписать окружность и чтобы высота призмы была равна диаметру этой окружности.

Точки касания сферы с боковыми гранями призмы принадлежат перпендикулярному сечению, проведенному через центр сферы.

Центр сферы, вписанной в призму, лежит на прямой, проведенной параллельно боковым ребрам через центр окружности, вписанной в перпендикулярное сечение, и является серединой отрезка, отсекаемого на этой прямой основаниями призмы.

Диаметр сферы, вписанной в призму, равен диаметру окружности, вписанной в перпендикулярное сечение призмы.

Многоугольник с вершинами в точках пересечения плоскости, перпендикулярной боковому ребру призмы, со всеми ребрами призмы называют *перпендикулярным сечением призмы*.

В правильную призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда ее высота равна диаметру окружности, вписанной в основание.

Пусть шар касается всех ребер некоторого многогранника (в частном случае, призмы). Тогда:

- каждая грань многогранника пересекает поверхность шара по окружности, касающейся ребер многогранника, то есть по окружности, вписанной в грань; тем самым гранями многогранника будут такие многоугольники, в которые можно вписать окружность;
- основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на любую грань многогранника, является центром окружности, вписанной в эту грань;
- перпендикуляры, восставленные к плоскостям граней в центрах вписанных окружностей, пересекаются в одной точке, равноудаленной от всех ребер многогранника — в центре шара;
- отрезок перпендикуляра, опущенного из центра шара на ребро многогранника, равен радиусу шара.

Шар, касающийся всех ребер призмы, существует тогда и только тогда, когда эта призма правильная и все ее ребра равны между собой.

Сфера и пирамида

Для того чтобы около пирамиды можно было описать шар, необходимо и достаточно, чтобы около ее основания можно было описать окружность. Следовательно:

а) около любой треугольной пирамиды можно описать шар;
б) около любой правильной пирамиды можно описать шар;
в) около любой пирамиды, у которой боковые ребра равны или равно наклонены к плоскости основания, можно описать шар.

В случаях б) и в) центр шара, описанного около пирамиды, есть пересечение двух перпендикуляров: перпендикуляра к плоскости основания, проведенного через центр окружности, описанной около этого основания, и перпендикуляра к боковому ребру пирамиды, проведенного через его середину в плоскости, которая определяется этим боковым ребром и первым перпендикуляром.

Для того чтобы около усеченной пирамиды можно было описать шар, необходимо и достаточно, чтобы около ее оснований можно было описать окружности и чтобы отрезок, соединяющий центры описанных окружностей, был перпендикулярен их плоскостям.

В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу.

В любую правильную пирамиду можно вписать сферу.

Если двугранные углы при основании пирамиды равны между собой, то в эту пирамиду можно вписать сферу. В последних двух случаях центр вписанной в пирамиду сферы является точкой пересечения высоты пирамиды и биссектрисы угла, образованного высотой боковой грани пирамиды и ее проекцией на основание.

Если двугранные углы при основаниях усеченной пирамиды равны между собой и сумма радиусов кругов, вписанных в основания, равна апофеме пирамиды, то в усеченную пирамиду можно вписать шар.

Центром вписанного шара является середина отрезка, соединяющего центры вписанных в основания пирамиды окружностей.

Если в усеченную пирамиду, двугранные углы при основании которой равны, вписан шар, то:

- высота пирамиды есть среднее пропорциональное между диаметрами окружностей, вписанных в основания этой усеченной пирамиды;
- радиус шара есть среднее пропорциональное между радиусами вписанных в основания этой пирамиды окружностей.

Если пирамида описана около сферы, то ее объем равен произведению одной трети радиуса сферы и площади полной поверхности пирамиды.

8.1 Расстояния в пространстве

Пример 1. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб с углом при вершине A, равным 60°. Боковое ребро параллелепипеда равно стороне основания. На ребре B_1C_1 взята точка P — середина ребра. Считая $AB = a$, найти расстояние до прямой PD от точки: а) B_1, б) C.

Чтобы найти расстояние от точки до прямой, можно провести из этой точки перпендикуляр к прямой и найти его длину.

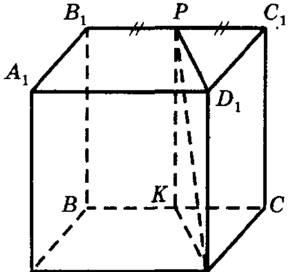


Рис. 46

а) *Решение* (*рис. 46*). Обозначим: $s(B_1, PD)$ — расстояние от точки B_1 до прямой PD. Рассмотрим B_1C_1 и плоскость PD_1D: плоскость $B_1C_1D_1 \perp$ плоскости PD_1D, так как $D_1D \perp$ плоскость $B_1C_1D_1$; $B_1C_1 \perp PD_1$, так как $A_1B_1C_1D_1$ — ромб с углом 60°, B_1D_1 — меньшая диагональ и, как следствие, треугольник $B_1C_1D_1$ — равносторонний, в котором PD_1 — медиана, а следовательно, и высота.

Имеем: $B_1C_1 \perp$ плоскости PD_1D, тогда $B_1P \perp PD$.

$B_1P = s(B_1, PD) = a/2$.

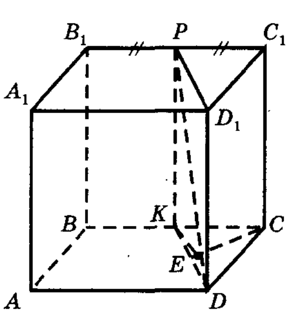


Рис. 47

б) *Анализ* (*рис. 47*). Пусть $CE \perp PD$. CE можно найти из треугольника KCE, в котором угол K — прямой, $KC = a/2$. KE можно найти из треугольника KPD по методу площадей.

Решение.

1. Рассмотрим $\triangle KPD$: $KP = a$, $KD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, тогда $PD = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. $KE \cdot PD = PK \cdot KD$, $KE = \dfrac{a \cdot a\sqrt{3} \cdot 2}{2a\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

2. Рассмотрим $\triangle KCE$: $\angle K = 90^\circ$, $KC = a/2$, $KE = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$; тогда $CE = \sqrt{a^2/4 + 21a^2/49} = \dfrac{a\sqrt{133}}{14}$.

Ответ: а) $a/2$; б) $\dfrac{a\sqrt{133}}{14}$.

Пример 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер AB: AD: AA_1 = 1 : 3 : 1. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку P — середину ребра AA_1. Считая $AB = a$, найти расстояние до секущей плоскости от точки A_1.

При решении задач на нахождение расстояния от точки до плоскости во многих случаях можно применить *метод объемов*. Суть метода: *фиксируется геометрическая фигура (например, пирамида) и двумя способами выражается ее объем, в одном из выражений объема искомое расстояние обозначается неизвестной.*

Применим метод объемов для решения этой задачи.

Решение. (*рис. 48*)

1. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный прямоугольный параллелепипед, P — середина ребра AA_1. Четырехугольник B_1MDP — сечение (сечение можно построить, применяя свойства прямоугольного параллелепипеда).

2. Для нахождения искомого расстояния h_1 рассмотрим пирамиду A_1PB_1M. Объем пирамиды $\dfrac{1}{3}S_{PB_1M}h_1 = \dfrac{1}{3}S_{A_1PB_1}h_2$, где h_2 — расстояние от точки M до плоскости A_1PB_1.

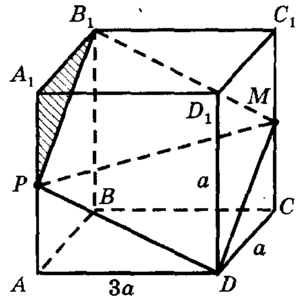


Рис. 48

$S_{A_1PB_1}=a^2/4$; $h_2=3a$. Найдем S_{PB_1M}: $PB_1=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $B_1M=\dfrac{a\sqrt{37}}{2}$, $PM=a\sqrt{10}$.

Зная длины трех сторон треугольника, находим косинус, а затем синус угла B_1 и вычисляем площадь треугольника PB_1M: $\cos B_1=\dfrac{1}{\sqrt{185}}$; $\sin B_1=\dfrac{2\sqrt{46}}{\sqrt{185}}$; $S_{PB_1M}=\dfrac{a^2\sqrt{46}}{4}$.

Далее, используя равенство объемов, находим искомое расстояние A_1H_1: $A_1H_1=\dfrac{3a\cdot a^2\cdot 4}{4\sqrt{46}\cdot a^2}=\dfrac{3a\sqrt{46}}{46}$.

Ответ: $\dfrac{3a\sqrt{46}}{46}$.

Задача на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми может быть сведена к решению одной из следующих задач:

- построение общего перпендикуляра скрещивающихся прямых и нахождение его длины;
- нахождение расстояния между параллельными плоскостями, каждая из которых содержит одну из скрещивающихся прямых;
- нахождение расстояния между одной из скрещивающихся прямых и параллельной ей плоскостью, содержащей вторую прямую.

Пример 3. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник, у которого $AC = BC = a$, а боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания. На ребрах SB, AC и BC взяты соответственно точки M, P, K — середины этих ребер. Найти расстояние между прямыми AM и PK.

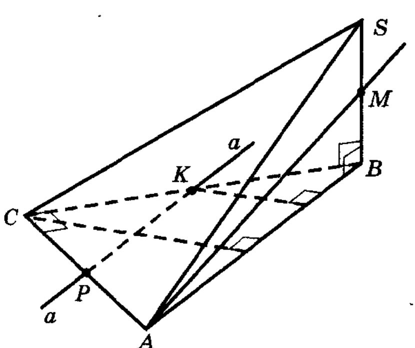


Рис. 49

Решение (*рис. 49*) Прямые PK и AM — скрещивающиеся.

1. По признаку перпендикулярности плоскостей плос-

кости ASB и ACB перпендикулярны, так как $SB \perp ACB$ по условию.

$PK \parallel AB$ по свойству средней линии треугольника, тогда $PK \parallel ASB$ по признаку параллельности прямой и плоскости.

Значит, искомое расстояние между прямыми равно расстоянию между прямой PK и плоскостью ASB, то есть длине перпендикуляра, проведенного из точки K к AB.

2. Треугольник ABC — равнобедренный, прямоугольный. Искомое расстояние равно половине высоты этого треугольника, проведенной к гипотенузе, то есть $a\sqrt{2}/4$.

Ответ: $a\sqrt{2}/4$.

Реши сам

8.1. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб с углом при вершине A, равным 60°. Боковое ребро параллелепипеда равно стороне основания. На ребре B_1C_1 взята точка P — середина ребра. Считая $AB = a$, найдите расстояние до прямой DP от точки A_1.

8.2. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C, каждое боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 45°. На ребре SB взята точка M — середина этого ребра. Считая $AC = a$, найти расстояние до прямой CM от точки: а) S, б) O — основания высоты пирамиды, в) A.

8.3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 3 : 1$. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку P — середину ребра AA_1. Считая $AB = a$, найти расстояние до секущей плоскости от точки D_1.

8.4. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$. Боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания и равно меньшей стороне основания. Считая $AB = a$, найдите расстояния от точки O — центра основания — до следующих плоскостей: а) SAD, б) ADP, где P — середина ребра SC.

8.5. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник, у которого $AC = BC = a$; боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания и $SB = a$. На ребрах SB и BC взяты соответственно точки M, K — середины этих ребер. Найдите расстояние между прямыми AM и BC.

8.2 Углы в пространстве

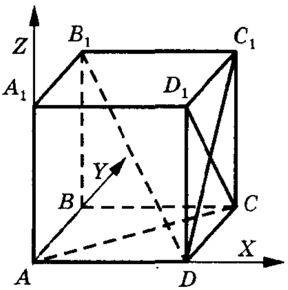


Рис. 50

Пример. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ угол между прямыми B_1D и CD_1 равен 90°, $AB : AD = 1 : 2$. Найти угол между прямыми AC и C_1D.

Одним из методов решения задач такого типа является *координатно-векторный метод*. Применим этот метод для решения задачи.

Решение. Поместим данный прямоугольный параллелепипед в систему координат, как показано на *рис. 50*.

1. Пусть $AB = a$, $AA_1 = b$, тогда $\overrightarrow{AC}(2a, a, 0)$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{5}$.

$D(2a,0,0)$, $C_1\,(2a,a,b) \Rightarrow \overrightarrow{DC_1}\,(0,a,b)$; $\left|\overrightarrow{DC_1}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$, b – ?

2. $D(2a,0,0)$, $B_1\,(0,a,b) \Rightarrow \overrightarrow{B_1D}(2a,a,b)$;

$C\,(2a,a,0), D_1\,(2a,0,b) \Rightarrow \overrightarrow{CD_1}\,(0,a,b)$; $\overrightarrow{B_1D} \perp \overrightarrow{CD_1}$ $a^2-b^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2=b^2=\sqrt{a^2+b^2}$, $\quad |DC_1| = a\sqrt{2}$.

$$\cos\alpha = \frac{-a^2}{a\sqrt{5}\cdot a\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}};\quad \angle(AC, C_1D) = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\arccos 1/\sqrt{10}$.

Реши сам

8.6. На ребрах A_1B_1 и AC прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, у которой $AB = BC = AA_1$ и угол ABC равен 90°, взяты соответственно точки D и E — середины этих ребер. Найдите углы между: а) A_1C и BD, б) A_1E и AD.

8.7. В правильной пирамиде $SABCD$ отношение высоты SO к стороне основания равно $\sqrt{14} : 2$. Через диагональ BD основания и точку M – середину ребра SC проведена секущая плоскость. Найдите угол, который образует с секущей плоскостью прямая SB.

Чтобы найти величину неизвестного угла, достаточно построить прямоугольный треугольник, одним из углов которого является искомый угол, найти два его линейных элемента и значение тригонометрической функции этого угла.

Часто в задачах этого типа один из катетов — расстояние от вершины рассматриваемого треугольника до плоскости. Решение этой задачи рассмотрено в разделе 8.1. «Расстояния в пространстве».

8.8. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, а ее боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. На ребре SB взята точка P — середина этого ребра, а на ребре SC — точка K — такая, что SK: $SC = 1 : 4$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку P параллельно прямым BC и DK, и найдите угол, который с этой плоскостью образует прямая SA.

8.9. В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены сечения AB_1C_1D и A_1B_1CD. Найдите двугранный угол $A_1B_1DC_1$, если отношение ребер $AB : AA_1 = 1:2$.

8.3. Многогранники. Сечения многогранников

Призма

Пример 1. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник. Все ребра призмы равны между собой. Одно из боковых ребер составляет с прилежащими сторонами основания углы величиной 45°. Площадь боковой поверхности призмы равна $4(1+\sqrt{2})$. Найти объем призмы.

Анализ. Чтобы вычислить объем призмы, нужно знать площадь основания и высоту. По условию известны площадь боковой поверхности призмы, равенство всех ребер призмы и углы, которые образует одно из боковых ребер со смежными ребрами основания. Поэтому целесообразно искать длину ребра призмы через данную боковую поверхность.

Для решения этой задачи полезно знать особые свойства призмы.

1. Если боковое ребро наклонной призмы составляет равные острые (тупые) углы со смежными ребрами основания, то основание высоты призмы, проведенной из вершины верхнего основания, принадлежащей этому боковому ребру, лежит на биссектрисе (продолжении биссектрисы) угла, образованного данными ребрами основания.
2. Если боковое ребро наклонной треугольной призмы, в основании которой правильный треугольник, образует равные углы со смежными ребрами основания, то противолежащая этому ребру боковая грань — прямоугольник.

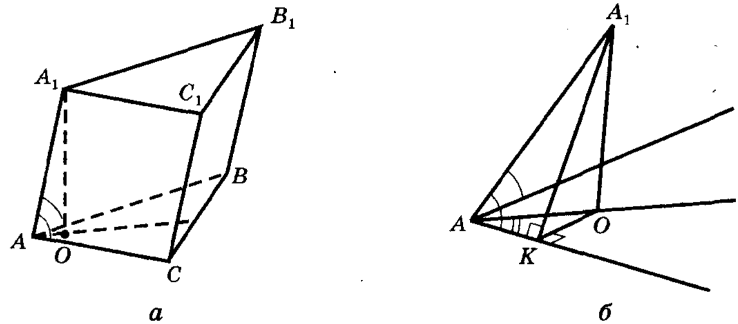
Докажите эти утверждения самостоятельно.

Решение. (*рис. 51, а*).

1. Пусть a — длина ребра призмы. Так как все ребра призмы равны, то две боковые грани — ромбы с углом 45°, а третья грань — квадрат (по второму свойству).

Имеем уравнение $a^2+2a^2\frac{\sqrt{2}}{2}=4\left(1+\sqrt{2}\right)$; $a^2=4$; $a=2$.

2. Для нахождения высоты сделаем выносной рисунок трехгранного угла с вершиной в точке A (рис. 51, *б*).



а *б*

Рис. 51

Треугольник AA_1K: $AA_1 = 2$, $\angle A = 45°$, $\angle K = 90°$, тогда $AK = 2\sqrt{2}/2$.

Треугольник AKO: $AK = 2\sqrt{2}/2$, $\angle A = 30°$, $\angle O = 90°$, тогда $AO = 2\sqrt{6}/3$.

Треугольник AA_1O: $AO = 2\sqrt{6}/3$, $AA_1 = 2$, $\angle O = 90°$, тогда $A_1O = 2\sqrt{3}/3$.

3. Вычислим объем призмы: $S = 4\sqrt{3}/4 = \sqrt{3}$, $H = 2\sqrt{3}/3$, тогда $V = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. В правильной треугольной призме получено сечение через сторону основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований. Найти площадь сечения, если каждое ребро призмы равно a.

Решение.

1. Построим сечение призмы (*рис. 52*). Для этого в плоскости симметрии призмы найдем след прямой MO в плоскости верхнего основания (точка K); через точку K проведем прямую, параллельную AB (точки D и C — точки пересечения прямой с ребрами верхнего основания); соединяя точки A и D, B и C, получаем сечение — трапецию $ADCB$.

2. Треугольники MOH и KOP равны по катету и острому углу ($OP = OH$ по условию, углы с вершиной в точке O равны по свойству вертикальных углов, углы с вершинами в точках P и H — прямые), отсюда $PK = MH$.

Так как MH — треть медианы треугольника, а медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, то $DC = 1/3AB$.

3. Высота трапеции равна удвоенной длине отрезка MO:

$$MK = 2\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

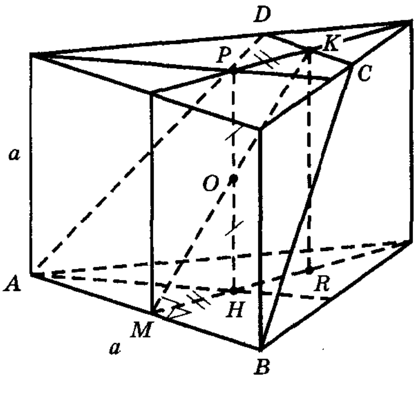


Рис. 52

Найдем площадь трапеции (сечения): $S=\frac{2a\cdot 2a\sqrt{3}}{3\cdot 3}=\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$.

Реши сам

8.10. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, у которого $AB = 50$, $AC = 40$, угол BAC равен 60°, $AA_1 = 25$. Расстояние от вершины A_1 до стороны AC равно 7, а до стороны AB равно 20. Найдите объем призмы.

8.11. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите площадь сечения, проведенного через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и середину M ребра BB_1.

8.12. Каждое ребро правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно a. Призма пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1, A_1B_1, AC. Постройте сечение и найдите его площадь.

8.13. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, содержащей противоположные ребра верхнего и нижнего оснований. Вычислите площадь сечения, если высота призмы равна 13, а ребро основания равно 3.

8.14. В наклонной треугольной призме расстояние от бокового ребра до диагонали противолежащей боковой грани равно 5, а площадь этой грани равна 40. Найдите объем призмы.

8.15. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб $ABCD$, $\angle BAD=60°$. Длина бокового ребра равна 4 см, а расстояние между AD и D_1C равно 12/5 см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Пирамида

Пример 1. Основанием пирамиды $DABC$ служит равнобедренный треугольник ABC. $AB = BC$, угол ABC равен 120°. Грань ADC перпендикулярна плоскости основания, а остальные две грани наклонены к нему под углом 60°. Расстояние от основания высоты до боковой грани BDC равно $\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды.

Анализ. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания, значит, высота пирамиды принадлежит этой грани.

Две смежные грани пирамиды равно наклонены к плоскости основания, значит, основание высоты пирамиды — точка, равноудаленная от сторон угла при вершине равнобедренного треугольника, лежащего в основании пирамиды.

С учетом отмеченного выше можно сделать вывод: основание высоты пирамиды — середина основания равнобедренного треугольника, являющегося основанием пирамиды.

Чтобы найти объем пирамиды, нужно знать площадь основания и высоту. В условии задачи дана единственная линейная величина — расстояние от основания высоты пирамиды до боковой грани. Значит, необходимо дополнительное построение: перпендикуляр из точки, являющейся основанием высоты пирамиды, на боковую грань.

Решение (*рис. 53*).

1. Проведем дополнительные построения:

DO — высота пирамиды. На основании рассуждений, проведенных в анализе: O — середина AC;

$POMD$ – линейный угол двугранного угла с ребром BC; $\angle OMD = 60^\circ$ по условию;

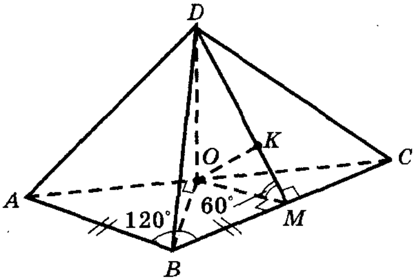


Рис. 53

$OK \perp DM$; OK является перпендикуляром к плоскости BDC, так как плоскость $ODM \perp$ плоскости BDC. $OK = \sqrt{3}$ по условию.

2. Треугольник DOM: $\angle OMD = 60^\circ$, $\angle MOD = 90^\circ$, $OK \perp DM, OK = \sqrt{3}$. Тогда $OM = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2$, $OD = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{3}$.

3. Треугольник OMC: $\angle OCM = 30^\circ$, $OM = 2$, $\angle OMC = 90^\circ$. Тогда $OC = 4$.

4. Треугольник BOC: $\angle BOC = 90^\circ$, $\angle OCM = 30^\circ$, $OC = 4$. Тогда $BC = \dfrac{OC}{\cos 30^\circ} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

5. Найдем объем пирамиды:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2\sin 120°\cdot 2\sqrt{3}=\frac{32}{3}.$$

Ответ: $\frac{32}{3}$.

Пример 2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4. Боковое ребро образует с высотой угол 30°. Построить сечение, проходящее через вершину основания, перпендикулярно противолежащему ребру и найти его площадь.

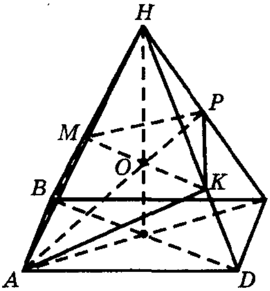


Рис. 54

Решение. Построим сечение (*рис. 54*). Так как пирамида правильная и высота образует с боковым ребром угол 30°, то осевое сечение пирамиды — правильный треугольник и основание перпендикуляра, проведенного из точки A к HC (точка P), — середина ребра HC.

Через точку O (пересечение AP и высоты пирамиды) в плоскости BHD проведем прямую, параллельную диагонали BD основания. Соединим последовательно точки A, M, P, K. Получим сечение $AMPK$.

Диагонали четырехугольника $AMPK$ взаимно перпендикулярны (по теореме о трех перпендикулярах). Найдем длины диагоналей. Треугольник AHC — правильный. AC = $= 4\sqrt{2}$ (диагональ квадрата), $AP=\frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$.

Треугольники MHK и BHD подобны с коэффициентом подобия 2/3, так как точка O — точка пересечения медиан осевого сечения AHC, а осевые сечения правильной пирамиды равны.

$MK = 2/3\times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}/3$.

Найдем площадь сечения: $S=\frac{8\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}}{2\cdot 3}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Реши сам

8.16. Основанием пирамиды с равными боковыми ребрами служит прямоугольник, стороны которого равны 6 и 8. Высота пирамиды 2. Найдите площадь сечения, проведенного через диагональ основания параллельно боковому ребру.

8.17. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 4, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Через центр основания проведена плоскость, параллельная стороне основания и перпендикулярная грани, проходящей через эту сторону. Найдите площадь сечения.

8.18. Дана правильная треугольная пирамида, боковое ребро которой наклонено к плоскости основания под углом 60°. Через сторону основания проведена плоскость под углом 30° к плоскости основания. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна 12 см.

8.19. Основанием пирамиды с равными боковыми ребрами является прямоугольник со сторонами 6 дм и 8 дм. Высота пирамиды равна 6 дм. Найдите площадь сечения, проведенного через меньшую сторону основания и середину высоты.

8.20. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны $8\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$. Через вершину верхнего основания перпендикулярно плоскости основания и параллельно противолежащей стороне основания проведена плоскость. Площадь сечения равна $4\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

8.21. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, основания которой равны 2 и 8. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

8.22. В основании пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной $\sqrt{3}$. $MA = 6$. Боковые грани пирамиды равновелики. Найдите объем пирамиды.

8.4. Комбинации сферы и многогранника

Сфера и призма

Пример 1. В сферу радиуса $\sqrt{7}/3$ вписана правильная треугольная призма, боковая грань которой — квадрат. Найти объем призмы.

Решение. Для простоты преобразований решим задачу в общем виде, обозначив радиус шара R.

Для нахождения объема призмы нам необходимо знать длину ребра (так как призма правильная и боковая грань — квадрат, то все ребра призмы равны). Обозначим ребро призмы a и выразим длину ребра через R.

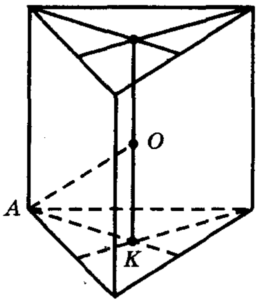


Рис. 55

По свойству комбинации фигур центр сферы (точка O) — середина отрезка, соединяющего центры оснований (*рис. 55*).

Треугольник AOK: $AO = R$, $OK = a/2$, $\angle AKO = 90^\circ$, $AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Имеем уравнение $\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{4} = R^2$ или $a = 2R\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Выразим объем через радиус сферы: $V = \dfrac{18R^3}{49\sqrt{7}}$.

Подставим значение $R = \sqrt{7}/3$ и получим ответ: $V = 2/21$.

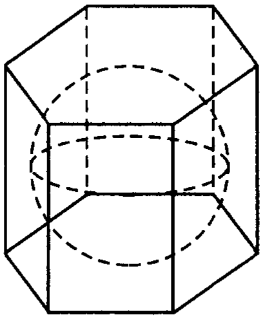
Ответ: 2/21.

Пример 2. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная призма. Найти площадь ее полной поверхности.

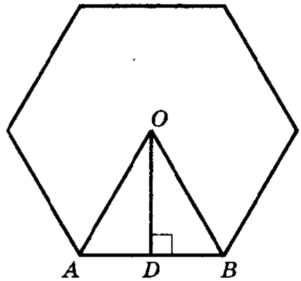
Решение. Так как шар вписан в правильную призму, то:

- радиус шара равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы;
- диаметр шара равен высоте призмы.

Для нахождения площади полной поверхности призмы (*рис. 56, а*) воспользуемся формулами $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$, $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} 2R$, $S_{\text{осн}} = P_{\text{6-уг}} 2R$.



а



б

Рис. 56

Нам необходимо найти ребро основания призмы. В основании призмы лежит правильный шестиугольник (рис. 56, *б*). Отрезки, соединяющие центр правильного шестиугольника с его вершинами, разбивают шестиугольник на равносторонние треугольники. Рассмотрим ΔAOB: треугольник правильный, $\angle OBA = 60°$, $OD \perp AB$. В треугольнике DOB $\angle ODB = 90°$, $\angle OBD = 60°$, $OD = R$; тогда $DB = OD \cdot \operatorname{ctg} 60° = R\frac{\sqrt{3}}{3}$. Значит, $AB = 2R\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Подставляя найденное выражение AB в формулу, получим:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 6 \cdot 2R\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2R + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2R\frac{\sqrt{3}}{3}R = 12R^2\sqrt{3}.$$

Ответ: $12R^2\sqrt{3}$.

Возможен другой путь решения задачи: найти объем призмы, предварительно выразив ребро основания призмы через радиус шара; затем найти площадь полной поверхности призмы, разделив утроенный объем призмы на радиус вписанного шара.

Реши сам

8.23. В правильной четырехугольной призме диагональ основания и диагональ боковой грани соответственно равны 16 см и 14 см. Найдите площадь поверхности описанного шара.

8.24. Шар вписан в прямую четырехугольную призму, основанием которой служит равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 4 см, и углом при большем основании 45°. Найдите объем призмы и ребро правильного тетраэдра, вписанного в этот шар.

8.25. Найдите площадь полной поверхности призмы, описанной около сферы, если площадь основания призмы равна S.

8.26. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно $4\sqrt{13}$ см, а сторона основания — $12\sqrt{3}$ см. Найдите отношение объемов описанного около призмы шара и шара наибольшего радиуса, помещенного в призму.

8.27. Шар касается трех граней и трех ребер куба с ребром 4. Найдите радиус шара.

Сфера и пирамида

Пример 1. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду, основанием которой служит ромб; диагонали ромба равны 6 см и 8 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 1 см.

Решение. Для решения этой задачи можно применить метод объемов: $V=\frac{1}{3}S_{\text{полн}}r$.

Вычислим площадь полной поверхности и объем пирамиды (*рис. 57*).

Найдем площадь ромба: $S_{\text{ромба}}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$.

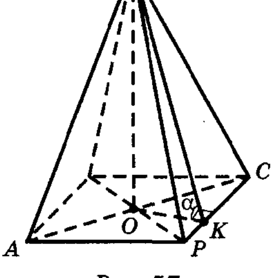


Рис. 57

Радиус OK окружности, вписанной в ромб, можно найти, применяя метод площадей к треугольнику POC, в котором стороны равны 3, 4, 5: $OK=\frac{3\cdot 4}{5}=2{,}4$.

Высота DK боковой грани равна $DK=\sqrt{1+2{,}4^2}=2{,}6$.

$S_{\text{полн}} = 24 + \frac{20\cdot 26}{2\cdot 10}=50$; $V = 1/3 \times 24 = 8$. Тогда $r = 12/25$.

Ответ: 12/25 см.

Пример 2. Найти радиус шара, описанного около усеченной пирамиды с высотой, равной 3. Одним основанием этой пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 8 и $16\sqrt{2}$, меньшая сторона другого основания равна 6.

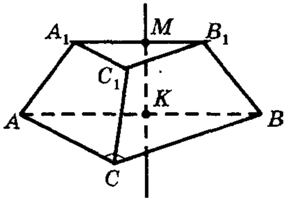
Анализ. Рассматривая данные задачи, можно прийти к следующим выводам (*рис. 58, а*):

- основания пирамиды — подобные треугольники, причем коэффициент подобия равен 6/8 или 3/4;
- центры окружностей, описанных около оснований пирамиды, — середины гипотенуз оснований;
- высота пирамиды — отрезок, концами которого являются середины гипотенуз оснований пирамиды;
- центр шара принадлежит прямой, содержащей высоту пирамиды.

Решение.

1. Рассмотрим треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC. Они подобны с коэффициентом 3/4, поэтому $C_1B_1=\frac{3}{4}CB=\frac{3}{4}\cdot 16\sqrt{2}=$ $=12\sqrt{2}$. Гипотенузы треугольников определим на основе теоремы Пифагора: $AB=\sqrt{64+512}=24$, $A_1B_1=\frac{3}{4}\cdot 24=18$.

2. Так как центр шара принадлежит прямой, содержащей высоту пирамиды, принадлежащую грани AA_1B_1B, рассмотрим четырехугольник AA_1B_1B (рис. 58, б). Пусть точки M и K — середины оснований трапеции, O — центр шара, тогда $AK=12$, $A_1M=9$.



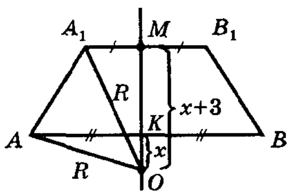


Рис. 58

Из ΔAKO имеем: $R^2=144+x^2$, где x – длина OK. Из ΔAOM имеем: $R^2=(x+3)^2+81$. Получили уравнение $(x+3)^2+81=144+x^2$, корнем которого является число 9.

Возвращаясь к одному из уравнений, получаем $R^2=225$, откуда $R=15$.

Ответ: 15.

Реши сам

8.28. Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, находится на расстоянии $\sqrt{2}$ от бокового ребра и на расстоянии $\sqrt{5}$ от стороны основания. Найдите радиус шара.

8.29. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно 3, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

8.30. Вокруг шара описана правильная треугольная усеченная пирамида, стороны оснований которой равны 12 см и 6 см. Найдите площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

8.31. Найдите объем шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, объем которой равен $27\sqrt{3}$, а угол наклона бокового ребра к основанию равен 60°.

8.32. В правильной треугольной пирамиде центр описанного шара делит высоту пирамиды на части, равные 6 см и 3 см. Вычислите объем пирамиды.

8.33. Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, равен 13/4, а радиус вписанного шара равен 1. Найдите объем пирамиды.

8.34. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найдите радиус сферы, вписанной в трехгранный угол, образованный гранями тетраэдра с вершиной в точке A, и касающейся плоскости, проведенной через середины ребер AB, AD, BC.

8.35. Внутри правильного тетраэдра с ребром a расположены четыре равные сферы так, что каждая сфера касается трех других сфер и трех граней тетраэдра. Найдите радиус этих сфер.

8.5. Комбинации многогранников

Пример. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $5\sqrt{2}$, ее ребро равно 13. Вычислить ребро куба, вписанного в эту пирамиду так, что четыре его вершины находятся на ребрах пирамиды (*рис. 59*).

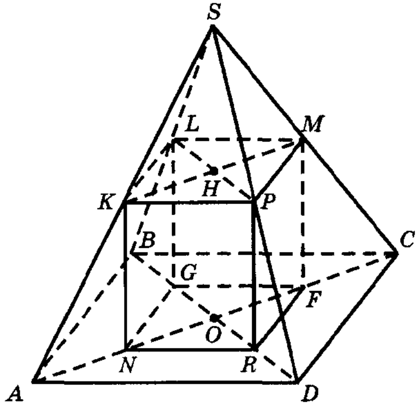


Рис. 59

Решение. Для нахождения ребра куба достаточно найти диагональ его грани.

1. Плоскости KMP и ABC параллельны, тогда $KM \parallel AC$ по свойству параллельных плоскостей, пересеченных третьей. ΔSHK подобен ΔSOA, из подобия (x — ребро куба): $\frac{SO}{SH}=\frac{AO}{KH}$. $AO=\frac{1}{2}AC$, $AC=5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=10$, $AO=5$; $KH=\frac{x\sqrt{2}}{2}$.

2. Решаем уравнение $\frac{12}{12-x}=\frac{5\cdot 2}{x\sqrt{2}}$: $12\sqrt{2}x=10(12-x)$;

$x(6\sqrt{2}+5)=60$; $x=\frac{60}{6\sqrt{2}+5}=\frac{60(6\sqrt{2}-5)}{47}$.

Ответ: $\frac{60(6\sqrt{2}-5)}{47}$.

Реши сам

8.36. В правильную треугольную пирамиду с высотой 5 вписан куб с ребром 3. Найдите объем пирамиды.

8.37. Боковые ребра треугольной пирамиды равны 2, 3, 5. Плоские углы при вершине пирамиды прямые. В пирамиду вписан куб так, что одна его вершина находится в вершине пирамиды, а противоположная лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите ребро куба.

8.38. Около куба описана призма так, что все вершины куба являются серединами сторон оснований призмы. Основанием призмы служит трапеция с основаниями a и b. Найдите объем призмы.

8.39. Два правильных тетраэдра соединены двумя гранями так, что образуют двойную пирамиду. Центры шести боковых граней этой пирамиды приняты за вершины прямой треугольной призмы. Вычислите объем этой призмы, если ребро тетраэдра равно 3.

8.6. Комбинации тел вращения

Пример. В шар радиуса R вписан конус, образующая которого видна из центра шара под углом α. Найти объем конуса.

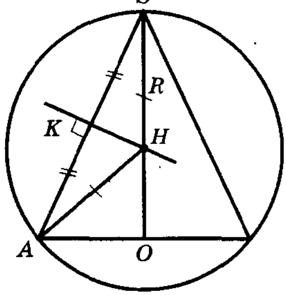


Рис. 60

Анализ. Чтобы найти объем конуса по формуле $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$, нужно знать радиус основания конуса и его высоту. Рассмотрим осевое сечение комбинации геометрических тел (*рис. 60*). Высоту конуса можно найти из ΔASO, а радиус основания — из ΔAHO.

Решение.

1. Пусть H — центр шара. Рассмотрим ΔASH: $AH=HS=R$, $\angle AHS=\alpha$ по условию. Проведем серединный перпендикуляр к стороне AS и рассмотрим ΔKHS: $\angle HKS=90°$, $\angle KHS=\frac{\alpha}{2}$, $\angle KSH=90°-\frac{\alpha}{2}$, $HS=R$.

$KS=R\sin\frac{\alpha}{2}$, тогда $AS=2R\sin\frac{\alpha}{2}$.

2. Рассмотрим ΔASO: $AS=2R\sin\frac{\alpha}{2}$, $\angle ASH=90°-\frac{\alpha}{2}$. Тогда $SO=2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)=2R\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $AO=R\sin(180°-\alpha)=$ $=R\sin\alpha$ (из ΔAHO).

3. $V=\frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot SO$; $V=\frac{1}{3}\pi R^2\sin^2\alpha\cdot 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Реши сам

8.40. В шар радиуса 29 см вписан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна 1680π см^2. Найдите объем цилиндра.

8.41. В конус вписан шар. Площадь поверхности шара относится к площади основания конуса как 4 : 3. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

8.42. Объем шара, вписанного в конус, равен $4\pi\sqrt{3}/27$. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если угол при вершине его осевого сечения равен 60°.

8.43. Радиусы оснований усеченного конуса равны 24 см и 15 см, высота равна 27 см. Найдите радиус описанного шара.

8.44. В цилиндр вписан шар. Найдите отношение объемов цилиндра и шара.

ОТВЕТЫ К РАЗДЕЛУ «РЕШИ САМ»

ГЛАВА 1. СТЕПЕНИ И РАДИКАЛЫ

1.1. -7. **1.2.** $10\sqrt[3]{5}-2\sqrt{5}$. **1.3.** 4,5. **1.4.** $-26{,}5$. **1.5.** 22. **1.6.** 2. **1.7.** $\frac{1}{6}$. **1.8.** a. **1.9.** x. **1.10.** $a^{\frac{2}{3}}$. **1.11.** $a^{5\frac{5}{12}}$. **1.12.** $x^{1\frac{2}{3}}$. **1.13.** $x^{2\frac{1}{5}}$. **1.14.** а) $\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{b}$; б) $a-\sqrt{a}\sqrt[6]{b}+\sqrt[3]{b}$; в) $(a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{12}})(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}})$ $(a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{12}})(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}})$. **1.15.** а) a^2+ab+b^2; 2,52; б) 1; в) $a-b$; г) $2\sqrt{b}$. **1.16.** 1,5. **1.17.** 1,8. **1.18.** $-1{,}5$. **1.19.** -4. **1.20.** $-\frac{1}{3}$. **1.21.** $-2{,}25$. **1.22.** 0,7. **1.23.** $-1{,}5$. **1.24.** 3. **1.25.** 2; 3. **1.26.** 0; 3. **1.27.** $\pm\sqrt{3}$. **1.28.** 2. **1.29.** 1. **1.30.** 0. **1.31.** $(-\infty;-1)$. **1.32.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$ **1.33.** $(-\infty;\frac{1}{3}]$. **1.34.** $(\frac{1}{15};+\infty)$. **1.35.** $(-\infty;-\frac{1}{3})$. **1.36.** $[-2{,}5;0{,}25]$. **1.37.** $(1;+\infty)$. **1.38.** $(-\infty;2)$. **1.39.** $(-\infty;1]$ **1.40.** $(1;+\infty)$ **1.41.** $[-0{,}5;0{,}5]$. **1.42.** 4. **1.43.** 6. **1.44.** -6; 1. **1.45.** 16. **1.46.** $-4{,}5$; 3. **1.47.** $1\frac{2}{3}$. **1.48.** 1,62; 2. **1.49.** -19; 7. **1.50.** 2.

ГЛАВА 2. ЛОГАРИФМЫ

2.1. 2. **2.2.** $2\frac{7}{9}$. **2.3.** $\frac{5}{8}$. **2.4.** 10. **2.5.** 2. **2.6.** $-\frac{1}{3}$. **2.7.** 0,4. **2.8.** 16,5. **2.9.** -12. **2.10.** $\frac{4a}{a+1}$. **2.11.** 4. **2.12.** $-0{,}5$. **2.13.** 2.

2.14. 3. **2.15.** 10. **2.16.** $-11;-1;5$. **2.17.** $-\frac{1}{2}$. **2.18.** 3. **2.19.** $1-\sqrt{33};2$. **2.20.** $-11;\sqrt{7}-6;-1$. **2.21.** $2^{-\frac{1}{4}}-1;3$. **2.22.** $1+3^{-\frac{3}{4}};4$. **2.23.** $(-\infty;0)$. **2.24.** $(-2;-1)\cup(2;3)$. **2.25.** $(\frac{1}{3};4)$. **2.26.** Решения нет. **2.27.** $(2;3{,}5)$. **2.28.** $[1;4]$. **2.29.** $(-9;-5]\cup[0;+\infty)$. **2.30.** $(2;3]$. **2.31.** $[0{,}25;1)\cup[2;+\infty)$. **2.32.** $(-0{,}5;0)\cup(0{,}5;1{,}5)$. **2.33.** $(-10;-0{,}001)$. **2.34.** $[0{,}96;1)\cup(1;1{,}04]$. **2.35.** $(-2;-\frac{3}{2}]\cup(0;+\infty)$.

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЯ

3.1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.2.** 0,25. **3.3.** −0,25. **3.4.** 24. **3.5.** −1. **3.6.** 1. **3.7.** 0,6. **3.8.** 0,8. **3.9.** 0,75. **3.10.** 3,75. **3.11.** 0,25. **3.12.** 0,75. **3.13** −0,75. **3.14.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **3.15.** 1,6. **3.16.** −1. **3.17.** 0,75. **3.18.** 4. **3.19.** 2. **3.20.** $\frac{1}{2}$. **3.21.** −3. **3.22.** 3. **3.23.** −3. **3.24.** −2. **3.25.** 1. **3.26.** −0,96. **3.27.** $-\frac{7}{25}$. **3.28.** $\frac{1}{4}$. **3.29.** $\frac{24}{25}$. **3.30.** −3. **3.31.** $\frac{120}{119}$. **3.32.** $\left\{\frac{1}{3};2\right\}$. **3.33.** 24. **3.34.** $-\frac{1}{3}$. **3.35.** −7. **3.36.** $\frac{16}{65}$. **3.37.** 0; $\frac{117}{44}$. **3.38.** 0. **3.39.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.40.** π. **3.41.** 1. **3.42.** 2. **3.43.** 15. **3.44.** 1. **3.45.** 7. **3.46.** 18. **3.47.** 1. **3.48.** $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **3.49.** $\frac{1}{\sin 2\alpha}$. **3.50.** 0,25. **3.51.** 20. **3.52.** −0,25. **3.53.** 4. **3.54.** $2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. **3.55.** $2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.56.** $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **3.57.** $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$. **3.58.** $\frac{2}{\sin 2\alpha}$. **3.59.** $\frac{2\sin\left(60^2+\alpha\right)}{\cos\alpha}$. **3.60.** $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.61.** $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **3.62.** $\frac{2\pi}{5}\pm\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi k}{5}$. **3.63.** $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}$. **3.64.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\pi k$.

3.65. $(-1)^k\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{6}$. **3.66.** $(-1)^k\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. **3.67.** $\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. **3.68.** $\frac{\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{4}+\pi n$. **3.69.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **3.70.** $\frac{\pi k}{3}$. **3.71.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k;$ $\pm\frac{\pi}{2}+3\pi k$. **3.72.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{3}+2\pi k$. **3.73.** $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$. **3.74.** $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$. **3.75.** $\frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}$. **3.76.** $2\operatorname{arctg}2-$ $-\frac{4\pi}{3}$. **3.77.** $-\frac{31\pi}{24}; \frac{\pi}{24}; \frac{17\pi}{24}$. **3.78.** $3\pi-\frac{\pi}{6}; \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2\pi; \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+$ $+2\pi$. **3.79.** $\pi k; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **3.80.** $\pi+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n$. **3.81.** $\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi n$. **3.82.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}; \frac{\pi n}{3}$. **3.83.** $\frac{\pi n}{2}; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **3.84.** πk. **3.85.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2}+\pi k$. **3.86.** $\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi k$. **3.87.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+$ $+2\pi n$. **3.88.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$. **3.89.** $\operatorname{arctg}(1\pm\sqrt{2})+\pi k$. **3.90.** $\pi k; \pm\frac{\pi}{6}+\pi n$. **3.91.** $\pi k; -\frac{\pi}{4}+\pi n$. **3.92.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$. **3.93.** $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$. **3.94.** $\pi k; -\frac{\pi}{4}+\pi n$. **3.95.** Нет решения. **3.96.** $\arcsin\frac{5}{\sqrt{97}}-\operatorname{arctg}\frac{9}{4}+2\pi k; \pi-\arcsin\frac{5}{\sqrt{97}}-$ $-\operatorname{arctg}\frac{9}{4}+2\pi k$. **3.97.** $\pi k; \pm\arccos\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}+\pi n$. **3.98.** $\arcsin\frac{1}{4}+2\pi k;$ $\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi k$.

ГЛАВА 4. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

4.1. 6. **4.2.** 7. **4.3.** 9. **4.4.** 84%. **4.5.** 7,5 ч; 5 ч. **4.6.** $4; \frac{8+\sqrt{61}}{3}$. **4.7.** 345. **4.8.** 20 дней; 30 дней; 60 дней. **4.9.** 12%; 24%; 48%. **4.10.** 15 км/ч.

ГЛАВА 5. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

5.7. а) да; б) нет. **5.8.** а) нет; б) нет. **5.9.** 1) *д*; 2) *а*; 3) *в*; 4) *ж*; 5) *г*; 6) *б*. **5.10.** $[3;+\infty)$. **5.11.** $[-5;7)\cup(7;+\infty)$. **5.12.**

$(1;2)\cup(2;3)\cup(3;4]$. **5.13.** $(-\infty;-0{,}5)\cup(3;+\infty)$. **5.14.** $\{1\}$. **5.15.** $[-1;0)\cup(0;5]$. **5.16.** $(-\infty;-1]\cup(0;5]$. **5.17.** $(-1;0)\cup(0;2]\cup[3;+\infty)$. **5.18.** $(-4;-2-\sqrt{3})\cup(-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3})\cup(-2+\sqrt{3};0)$. **5.19.** $[-4;-\pi]\cup[0;\pi]$. **5.20.** $(0{,}5;3)$. **5.21.** $(6;2\pi)\cup(2\pi;7)$. **5.22.** $(6;2\pi)\cup(2\pi;\frac{17\pi}{8})$. **5.23.** $(1;2]$. **5.24.** $[0;1]$. **5.25.** $(-4;-2)$. **5.26.** а) 6; б) 2. **5.27.** а) 4; б) 0. **5.28.** а) 2; б) 31. **5.29.** а) 1; б) 2; в) -2. **5.30.** -98. **5.31.** -135°. **5.32.** $(-\infty;5]$. **5.33.** $[0;\sqrt{2}]$. **5.34.** $[-0{,}5;0{,}5]$. **5.35.** $[-1;3]$. **5.36.** $[0;+\infty)$. **5.37.** $[\sqrt{2};+\infty)$. **5.38.** $[-1;+\infty)$. **5.39.** $[0;3]$. **5.40.** $(0;1]$. **5.41.** $[2;+\infty)$. **5.42.** $(0;+\infty)$. **5.43.** $(5^{1-\pi};5^{1+\pi})$. **5.44.** $(-\infty;+\infty)$. **5.45.** 5. **5.46.** 2. **5.47.** 2. **5.48.** -1; 0. **5.49.** ± 2. **5.50.** $y>0$ на $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$; $y<0$ на $(-2;2)\cup(2;3)$. **5.51.** $[-1;\sqrt{2}/2]$. **5.52.** а)$(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$; б) $(-\infty;1]\cup[1+\log_5 2;+\infty)$. **5.53.** а) $D(f)=[-2;3)\cup(6;+\infty)$; $x=2$; $f(x)>0$ при $x\in(2;3)\cup(6;+\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in[-2;2)$; б) $D(f)=(-\infty;2)\cup[6;+\infty)$; $x=7$; $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;2)\cup(7;+\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in[6;7)$. **5.54.** $-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}$. **5.55.** $\frac{\pi}{5};\frac{4\pi}{5};\frac{6\pi}{5};\frac{9\pi}{5}$. **5.56.** $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$. **5.57.** $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$. **5.58.** Нечетная. **5.59.** Ни четная, ни нечетная. **5.60.** Нечетная. **5.61.** Четная. **5.62.** Четная. **5.63.** Нечетная. **5.64.** Четная. **5.65.** Четная. **5.66.** Четная. **5.67.** Четная. **5.68.** Нечетная. **5.69.** Нечетная. **5.70.** Нечетная. **5.71.** 4. **5.72.** 3.

ГЛАВА 6. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

6.1. а) $-\sin x+3^x\ln 3$; б) $x^5(6\ln x+1)$; в) $-\cos(\frac{\pi}{6}-x)$; г) $6e^{2x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; д) $4\sin^3 x\cos x-5\sin 5x+6x^2$; е) $\frac{2(x^2+x+1)}{(2x+1)^2}$; ж) $-\frac{2\sin x}{e^x}$. **6.2.** а) $\ln 2+1$; б) $\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$; в) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$. **6.3.** 2,5. **6.4.** $-0{,}2$. **6.5.** $a=\frac{3}{4}$; $b=\frac{5}{2}$. **6.6.** а) 3 м/с; б) 3 с. **6.7.** а) 1; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 3.

6.8. – 4. **6.9.** – 4. **6.10.** $y=x+1$. **6.11.** $y=\frac{5}{2}-\sqrt{3}x$; $\varphi=120°$. **6.12.** $M_1(1;-1)$; $M_2\left(\frac{1}{3};-\frac{5}{27}\right)$. **6.13.** $\frac{1}{e}$. **6.14.** $y=-\frac{x}{4}+1$; $y=-\frac{x}{4}-1$. **6.15.** $y=\frac{x}{4}+\frac{3}{2}$. **6.16.** $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **6.17.** а) −9; б) −2. **6.18.** *Указание.* $y'(0)=y'(4)$. **6.19.** 1) в; 2) а, б. **6.20.** 1) *г*; 2) *в*; 3) *в*. **6.21.** а) $y\nearrow$ на $(-\infty;0]$, $[\frac{2}{3};+\infty)$; $y\searrow$ на $[0;\frac{2}{3}]$; б) $y\searrow$ на $(-\infty;2)$, $(2;+\infty)$; в) $y\nearrow$ на $(-\infty;0)$, $[2;+\infty)$; $y\searrow$ на $(0;2]$; г) $y\nearrow$ на $[2{,}2;+\infty)$; $y\searrow$ на $(-\infty;2{,}2]$; д) $y\searrow$ на $\mathbb{R}$; е) $y\nearrow$ на $[-\frac{3}{4};\frac{1}{8}]$; $y\searrow$ на $[\frac{1}{8};1]$; ж) $y\nearrow$ на $(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}]$; $y\searrow$ на $[\frac{3}{4};2)$. **6.22.** 6. **6.23.** $a\geq 0$. **6.24.** $x_1=0$, $x_2=2$. **6.25.** $y_1=y_2=-2$. **6.26.** $x_1=1$; $x_2=5$. **6.27.** а) 4; б) −3, 2. **6.28.** а) $[-4;1{,}5]$; $[4;6]$; б) $[1{,}5;4]$; в) $(-4;-1{,}5)\cup(-1{,}5;1{,}5)\cup(4;6)$; г) $(1{,}5;4)$; д) $x_1=-1{,}5$; $x_2=4$; е) $x_1=1{,}5$; $x_2=4$; ж) $x_1=-1{,}5$; $x_2=4$. **6.29.** а) $x=3$; б) $x=\frac{\pi k}{2}$; в) $x_1=0$; $x_2=-2$. **6.30.** а) максимум $f(0)=9$, минимумы $f(\pm\sqrt{5})=-16$; б) максимум $f(-6)=-3$, минимум $f(6)=3$. **6.31.** $x=-2$. **6.32.** $x=1$. **6.33.** 3,5. **6.34.** *Указание.* $y'\geq 0$ при всех $x\in\mathbb{R}$. **6.35.** а) −31; 1; б) $2+2\ln 1{,}5$; в) −2; 2. **6.36.** 1. **6.37.** 0. **6.38.** 0. **6.39.** $-\frac{\sqrt{6}}{9}$. **6.40.** а) $y_{\text{наим}}=-2\frac{2}{3}$, $y_{\text{наиб}}=2\frac{2}{3}$; б) $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}=16$; в) $y_{\text{наим}}=-1$, $y_{\text{наиб}}=-1{,}5$; г) $y_{\text{наим}}=4$, $y_{\text{наиб}}=8$. **6.41.** а) $f_{\text{наиб}}=-3$; б) $f_{\text{наим}}=6$; в) $f_{\text{наим}}=e^2$. **6.42.** Да. **6.43.** Нет. **6.44.** в). **6.45.** $\sin x+e^x-x+C$. **6.46.** а) $\frac{x^5}{5}+x^3+5x+C$; б) $-2\cos x+\frac{x^3}{3}+C$; в) $-\frac{1}{2}\cos 2x+\sin 3x+C$; г) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-6\sqrt{x}+C$. **6.47.** $\frac{2}{3}x^3+3x+6\frac{1}{3}$. **6.48.** $x^4-\frac{x^3}{3}+2x+C$, где $C<-2\frac{2}{3}$. **6.49.** $-\frac{x^4}{4}+3x^3-12x^2+16x$. **6.50.** а) $1\frac{1}{3}$; б) $1\frac{1}{3}$; в) $2\frac{2}{3}$; г) $1\frac{1}{3}$; д) $3\frac{1}{3}$; е) $\frac{\pi^2}{8}-1$; ж) 18; з) $2\frac{1}{3}$. **6.51.** 1:3. **6.52.** $S=3\ln 2$, $S<3$. **6.53.** $F(x)=x^2+4x+4$; $S=\frac{9}{4}$.

ГЛАВА 7. ПЛАНИМЕТРИЯ

7.1. 4 см. **7.2.** $9\sqrt{3}$ см². **7.3.** 7. **7.4.** 2. **7.5.** $12+8\sqrt{2}$. **7.6.** 202,8 см². **7.7.** 150°; 90°. **7.8.** 144. **7.9.** $24(7-4\sqrt{3})$. **7.10.** $\dfrac{ab^2\sqrt{3}}{4(b-2a)}$. **7.11.** 9. **7.12.** 156 см². **7.13.** $\dfrac{3(\sqrt{17}-1)^2}{16}$. **7.14.** 5. **7.15.** 40 см². **7.16.** $4\sqrt{5}$.

ГЛАВА 8. СТЕРЕОМЕТРИЯ

8.1. $\dfrac{a\sqrt{70}}{7}$. **8.2.** а) $a/2$; б) $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$; в) $\dfrac{a\sqrt{33}}{6}$. **8.3.** $\dfrac{3a\sqrt{46}}{23}$. **8.4.** а) $a\sqrt{2}/4$; б) $a\sqrt{5}/10$. **8.5.** $a\sqrt{5}/5$. **8.6.** а) $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$; б) $\arccos\dfrac{\sqrt{30}}{30}$. **8.7.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **8.8.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{10}$. **8.9.** $\arccos\dfrac{1}{5}$. **8.10.** $500\sqrt{111}$. **8.11.** $\dfrac{9a^2}{8}$. **8.12.** $\dfrac{3a^2\sqrt{15}}{16}$. **8.13.** 63. **8.14.** 100. **8.15.** $44\sqrt{3}$ см². **8.16.** 13. **8.17.** 17/6. **8.18.** 54 см². **8.19.** 80/3 дм³. **8.20.** $105\sqrt{3}$. **8.21.** 40. **8.22.** $\dfrac{\sqrt{105}}{4}$; $\dfrac{9}{4}$; $\dfrac{3\sqrt{11}}{4}$. **8.23.** 324π. **8.24.** 32 см³; $4\sqrt{3}/3$ см. **8.25.** $6S$. **8.26.** $\dfrac{343}{27}$. **8.27.** $4(2-\sqrt{2})$. **8.28.** $\sqrt{5}/2$. **8.29** 54. **8.30.** $126\sqrt{3}$ см². **8.31.** 128π. **8.32.** $243\sqrt{3}/4$ см³. **8.33.** 12; 50/3. **8.34.** $\dfrac{a(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$. **8.35.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. **8.36.** $\dfrac{125\sqrt{3}(7+4\sqrt{3})}{16}$. **8.37.** 60/47. **8.38.** $\dfrac{(a+b)^3\sqrt{2}}{16}$. **8.39.** $\sqrt{2}/2$. **8.40.** $840\pi\sqrt{41}$ см³. **8.41.** 60°. **8.42.** 2π. **8.43.** $7{,}5\sqrt{10}$ см³. **8.44.** 3 : 2.

Приложение
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

На выполнение экзаменационной работы по математике дается **4 часа** (240 минут). В работе **30 заданий.** Они распределены на три части.

Часть 1 содержит 16 заданий (**А1–А16**) обязательного уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10–11-го классов. К каждому из заданий дано четыре варианта ответа, из которых только один верный. При выполнении задания в «бланке ответов» надо указать номер выбранного ответа.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий (**В1–В10**) по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10–11-го классов, а также из различных разделов курсов алгебры и геометрии основной и средней школы. При их выполнении в «бланке ответов» надо записать только полученный ответ.

Часть 3 содержит три самых сложных алгебраических задания (**С1, С2, С4**) и одно — геометрическое (**С3**), при выполнении этих заданий требуется записать полное решение.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удается выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у вас останется время, то можно вернуться к пропущенным заданиям.

Для получения отметки «3» достаточно верно выполнить любые **8** заданий из **части 1** или из всей работы.

Для получения отметки «4» достаточно верно выполнить определенное число заданий из **частей 1** и **2**. Для получения отметки «4» **недостаточно** верно выполнить даже все задания (А1–А16) только части 1.

Для получения отметки «5» необходимо выполнить определенное число заданий из **частей 1**, **2** и **3**. Не требуется решить все задания работы, но среди верно выполненных заданий должно быть **хотя бы одно из части 3**. При этом для получения отметки «5» **недостаточно** верно выполнить даже все задания (С1–С4) только части 3.

За верное решение задания дается один или более баллов в зависимости от сложности. Эти баллы суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать как можно большее количество баллов.

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий этой части укажите в «бланке ответов» цифру, которая обозначает выбранный вами ответ, поставив знак «×» в соответствующей клеточке бланка для каждого задания А1–А16.

А1. Найдите значение выражения $2\sin^2 2\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) +$ $+ 2\cos^2 2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

1) 0;
2) $2+\sqrt{3}$;
3) 3;
4) $2-\sqrt{3}$.

А2. Упростите выражение $\frac{9m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{3\frac{1}{2}}}{m^{-3}}$.

1) $9m^7$;
2) $9m$;

3) 9;
4) $\frac{9}{m^6}$.

А3. Сократите дробь $\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}$.

1) $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$;
2) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$;
3) $\frac{1}{x-y}$;
4) $x+y$.

А4. Найдите значение $\log_3(9b)$, если $\log_3 b=5$.
1) -8;
2) 10;
3) 7;
4) 25.

А5. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) $(-1)^{n-1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$;
2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$;
3) $(-1)^{n-1}\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$;
4) $(-1)^{n}\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

А6. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_2(x+1)=\log_2(3x)$.
1) $(-\infty;-1)$;
2) $(-1;0)$;
3) $[-1;0]$;
4) $(0;+\infty)$.

А7. Решите неравенство $5^{2-3x}-1\geq 0$.
1) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$;

2) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$;

3) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$;

4) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

А8. Решите неравенство $\frac{x(x+3)}{2-x} \geq 0$.

1) $(-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$;

2) $[-3; 2)$;

3) $(-\infty; -3) \cup [0; 2)$;

4) $(-\infty; -3] \cup [0; 2)$.

А9. Укажите промежуток, которому принадлежат нули функции $f(x) = \sqrt{4-3x^2} - x$.

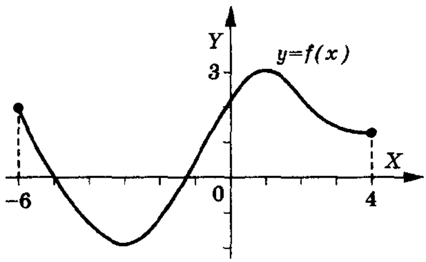
1) $[-1; 1)$;

2) $[1; \sqrt{2}]$;

3) $\left[-\frac{4}{3}; 1\right)$;

4) $(\sqrt{2}; 2]$.

А10. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 4]$ (*рис.*). Укажите промежуток, которому принадлежат все точки экстремума.



1) $[-6; 0]$;

2) $[0; 4]$;

3) $[-2; 3]$;

4) $[-3; 1]$.

А11. Найдите область определения функции $y = \log_{0,3}(x - x^2)$.

1) $[0; 1]$;

2) $(0; 1)$;

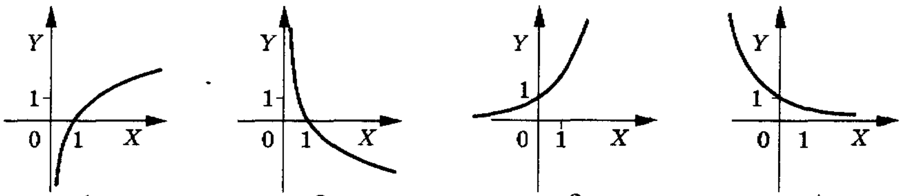
3) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$;

4) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

А12. Найдите множество значений функции $y = \sin x + 2$.

1) $[-1;1]$;
2) $[0;2]$;
3) $[1;3]$;
4) $[2;3]$.

А13. Укажите график функции, заданной формулой $y = 0{,}5^x$.



1 2 3 4

А14. Найдите значение производной функции $y = xe^x$ в точке $x_0 = 1$.

1) $2e$;
2) e;
3) $1+e$;
4) $2+e$.

А15. Для функции $y = 2\cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; 24\right)$.

1) $Y = 2\sin x + 24$;
2) $Y = 2\sin x + 22$;
3) $Y = -2\sin x + 26$;
4) $Y = 2\cos x + 22$.

А16. При движении тела по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки движения изменяется по закону $S(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + t - 1$ (t – время движения в секундах). Найдите скорость (м/с) тела через 4 с после начала движения.

1) 1,75;
2) 7,5;
3) 3;
4) 9.

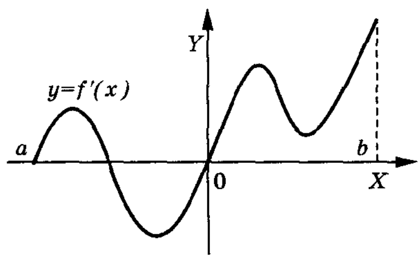
ЧАСТЬ 2

Ответом на каждое задание этой части будет некоторое число. Это число надо записать в «бланк ответов» рядом с номером задания (B1–B10), начиная с первой клеточки. Каждую цифру и знак минус отрицательного числа пишите в отдельной клеточке. Единицы измерений писать не нужно. Если ответ получился в виде дроби, то ее надо округлить до ближайшего целого числа.

B1. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases} \sqrt{25-10x+x^2}+y=4; \\ y-3x+11=0. \end{cases}$

Найдите произведение x_0y_0.

B2. Функция $y=f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$. На рисунке изображен график ее производной $y=f'(x)$. Исследуйте на монотонность функцию $y=f(x)$. В ответе укажите количество промежутков, на которых функция возрастает.



B3. Найдите значение выражения $\log_{\pi^2}\left(\frac{a^2b}{\pi^3}\right)$, если $\log_\pi \sqrt{a}=3$, $\log_\pi b=5$.

B4. Найдите наименьшее значение функции

$y=\sqrt[3]{\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x-7}$.

B5. Пусть x_0 — наименьший положительный корень уравнения $\cos^2 x-5\sin x\cos x+2=0$. Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

B6. При каком значении a функция $y=\frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$ имеет максимум при $x=4$?

B7. Владелец дискотеки имел стабильный доход. В погоне за увеличением прибыли он повысил цену на билеты на 25%. Количество посетителей резко уменьшилось, и он стал нести убытки. Тогда он вернулся к первоначальной цене билетов. На сколько процентов владелец дискотеки снизил новую цену билетов, чтобы она стала равна первоначальной? (Знак % в ответе **не пишите**.)

В8. Студенческая бригада подрядилась выложить керамической плиткой пол в зале молодежного клуба площадью 288 м^2. Приобретая опыт, студенты в каждый последующий день, начиная со второго, выкладывали на 2 м^2 больше, чем в предыдущий, и запасов плитки им хватило ровно на 11 дней работы. Планируя, что производительность труда будет увеличиваться таким же образом, бригадир определил, что для завершения работы понадобится еще 5 дней. Сколько коробок с плитками ему надо заказать, если одной коробки хватает на 1,2 м^2 пола, а для замены некачественных плиток понадобится три коробки?

В9. Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит квадрат, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в $60°$. Отрезок D_1A перпендикулярен плоскости основания. Найдите длину этого отрезка, если площадь боковой поверхности призмы равна $6(\sqrt{3}+2)$.

В10. Площадь треугольника ABC равна $20\sqrt{3}$. Найдите AC, если сторона AB равна 8 и она больше половины стороны AC, а медиана BM равна 5.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания этой части (С1–С4) используйте специальный бланк. Запишите сначала номер задания, а затем полное решение.

С1. Решите уравнение

$$2\log_{12}\left(x+\frac{6}{x-5}\right)=\log_{12}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}\right)+3.$$

С2. При каких значениях параметра n уравнение $15\cdot 10^x-$ $-20=n-n\cdot 10^{x+1}$ не имеет корней?

С3. Основание пирамиды $MABCD$ — ромб $ABCD$, в котором $\angle A=60°$. Все двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны. Плоскость α, параллельная плоскости основания пирамиды, пересекает высоту MO пирамиды в точке P так, что $MP:PO=2:3$. В образовавшуюся усеченную пирамиду вписан цилиндр, ось которого лежит на высоте пирамиды, а верхнее основание вписано в сечение пирамиды плоскостью α. Найдите объем пирамиды, если объем цилиндра равен $9\pi\sqrt{3}$.

С4. Найдите все положительные значения параметра a, при которых в области определения функции $y=\left(a^x-a^{ax+2}\right)^{-0,5}$ есть двузначные числа, но нет ни одного трехзначного натурального числа.

ОТВЕТЫ

Часть 1: А1. 3. А2. 1. А3. 2. А4. 3. А5. 3. А6. 4. А7. 2. А8. 4. А9. 2. А10. 4. А11. 2. А12. 3. А13. 4. А14. 1. А15. 2. А16. 4.

Часть 2: В1. 20. В2. 2. В3. 7. В4. –2. В5. 1. В6. 8. В7. 20. В8. 124. В9. 3. В10.14.

Часть 3: С1. 6; 11. С2. $[-20;-1,5]$. С3. 250. С4. $(0,8;0,98]$.

КОММЕНТАРИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ТРЕНИРОВОЧНОГО ВАРИАНТА ЕГЭ

А1. Для нахождения значения выражения достаточно подставить значение $\alpha=\frac{\pi}{6}$ и воспользоваться таблицей значений тригонометрических функций: $2\sin^2\left(2\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+$ $+2\cos^2\left(2\frac{\pi}{6}\right)=2\sin^2\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{3}+2\cos^2\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=3$.

Другой, более рациональный подход заключается в предварительном преобразовании исходного выражения. Вынеся за скобки множитель 2, сложив согласно основному тригонометрическому тождеству квадраты синуса и косинуса одного угла и использовав формулу приведения $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$, получим $2(1+\sin\alpha)$. При $\alpha=\frac{\pi}{6}$ значение последнего выражения равно 3.

А2. Пользуясь формулами произведения и частного степеней с одинаковыми основаниями, получаем $9m^{\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}-(-3)}=9m^7$.

А3. Знаменатель можно разложить по формуле разности квадратов, после чего дробь сокращается: $\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}=$ $=\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$.

А4. Воспользуемся формулами логарифма произведения и степени: $\log_3(9b)=2\log_3 3+\log_3 b=2\cdot 1+5=7$.

А5. Преобразовав левую часть по формуле приведения, получим $-\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\pi n$; $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+$ $+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Найденного ответа среди представленных нет, наиболее близки к нему 3) $x=(-1)^{n-1}\frac{\pi}{3}+\pi n$ и 4) $x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$. Значения выражения $(-1)^{n-1}\frac{\pi}{3}+\pi n$ совпадают с найденными, так как $(-1)^{n-1}=(-1)^{n+1}$, поскольку $n-1$ и $n+1$ имеют одинаковую четность.

Важно! Другой способ решения уравнения без использования формул приведения: $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\pi}{2}+x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $x=\pm\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Найденный ответ схож с предложенным вариантом 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, но по существу отличается, так как $-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=-\frac{2\pi}{3}$. Второй способ решения не позволяет выбрать правильный ответ из числа предложенных, необходимо искать другие способы.

А6. От равенства логарифмов переходим к равенству логарифмируемых выражений. $x+1=3x$ при условии, что они положительны: $x>0$. Корень $x=0{,}5$ принадлежит только промежутку $(0;+\infty)$.

Важно! Выяснив, что корень уравнения положителен по ОДЗ, достаточно было выбрать промежуток, в котором лежат все положительные числа — в данном случае он единствен.

А7. Преобразуем неравенство в простейшее показательное неравенство $5^{2-3x} \geq 1$. Так как основание $5>1$, то при переходе к оценке показателя знак неравенства не меняется: $2-3x \geq 0$; $x \leq \frac{2}{3}$.

Важно! При выборе промежутка обратите внимание на скобки (квадратные или круглые) в его записи.

Важно! С целью самопроверки можно подставить в решаемое неравенство некоторое число, отличное от границы указанных промежутков, например $x=0$. Так как $x=0$ является решением неравенства, то варианты ответов 3) и 4) исключаются. Нестрогое исходное неравенство чаще всего приводит и к нестрогому неравенству в ответе, тем самым вариант $(-\infty; \frac{2}{3}]$ легко предсказуем.

А8. Используем метод интервалов. Корни числителя и знаменателя — числа –3, 0, 2 — должны быть границами промежутков, составляющих решение, причем числа $x_1=-3$ и $x_2=0$ являются решениями, а число $x_3=2$ — нет.

Важно! Приведенной информации достаточно, чтобы отсечь варианты 1) и 2) как не учитывающие $x_2=0$, а затем и 3) как исключающий решение $x_1=-3$.

А9. $f(x)=0$ при условии $\sqrt{4-3x^2}=x$. Возводя в квадрат, получаем корни $x_{1,2}=\pm 1$. Корень $x_1=-1<0$ посторонний. Нулем функции является $x=1$.

Важно! При решении иррациональных уравнений осуществляйте равносильные переходы или делайте проверку.

А10. Точка минимума $x_{\min}=-3$; точка максимума $x_{\max}=1$.

Важно! Различайте точки экстремумов и значения экстремумов. В данном случае $y_{\min}=-2$; $y_{\max}=3$. Ответ $[-2; 3]$ неверный.

А11. Логарифмируемое выражение строго положительно, концы промежутков, составляющих решение, не входят в решение.

Важно! Варианты ответов 1) и 4) исключаются как содержащие концы промежутков. Для выбора ответа из 2) и 3) достаточно подставить в выражение $x-x^2$ некоторое число, например $x=2$ или $x=0{,}1$, для выяснения знака выражения.

А12. $-1\le \sin x\le 1$. Прибавим ко всем частям неравенства по 2: $1\le \sin x\le 3$.

А13. Верно построенный график должен отражать ряд свойств функции, в том числе: а) $D(y)=\mathbb{R}$, б) $E(y)=\mathbb{R}_+$, в) убывает, г) $y(0)=1$, д) $y(1)=0{,}5$.

Важно! Проверяйте, проходит ли график через характерные точки, в данном случае — через $K(0;1)$ и $L(1;0{,}5)$.

А14. $y'=e^x+xe^x=e^x(x+1)$; $y'(1)=2e$.

А15. $Y(x)=2\sin x+C$; $Y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2+C$; $C=22$; $Y(x)=2\sin x+22$.

А16. $v(t)=S'(t)=t^2-2t+1$, после подстановки $t=4$ $v(4)=9$.

В1. Преобразуем отдельные уравнения системы:
$\begin{cases}|x-5|+y=4;\\ y=3x-11.\end{cases}$ Уравнение $|x-5|+3x-11=4$ имеет единственный корень $x_0=5$.

В2. $f'(x)>0$ на двух промежутках.

В3. $\log_{\pi^2}\left(\dfrac{a^2b}{\pi^3}\right)=\dfrac{1}{2}(2\log_\pi a+\log_\pi b-3\log_\pi \pi)=$

$=\dfrac{1}{2}(2\cdot 2\log_\pi\sqrt{a}+5-3)=7.$

В4. Упростим выражение до вида $y=\sqrt[3]{\sin 3x-7}$. Методом оценки выясняем, что $-1\le \sin 3x\le 1$; $-8\le \sin 3x-7\le -6$. С учетом возрастания функции $y=\sqrt[3]{x}$ наименьшее значение исследуемой функции при $\sin 3x-7=-8$.

В5. ***Важно!*** Представив 2 как $2\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)$, получим однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$ уравнение II степени $3\cos^2 x-5\sin x\cos x+2\sin^2 x=0$.

$\cos x\ne 0$, так как иначе и $\sin x$ равнялся бы 0 согласно последнему уравнению. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$: $2\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg}x+3=0$. По теореме Виета $\operatorname{tg}x=1$ или $\operatorname{tg}x=\dfrac{3}{2}$. $\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$.

В6. $y=2^{-x^2+ax+7}$. Наибольшее значение функции достигается одновременно с наибольшим значением показателя

$-x^2+ax+7$. Трехчлен достигает наибольшего значения при $x_0=-\frac{a}{-2}=\frac{a}{2}$, то есть $a=2x_0$.

B7. После повышения цены билета она составила 125% исходной, то есть исходная составляет от повышенной $\frac{100\%}{125\%}=\frac{4}{5}=80\%$. Снизить повышенную цену требуется на $100\%-80\%=20\%$.

B8. Бригада работает 16 дней. По формуле суммы арифметической прогрессии определяем, что в первый день были выложены 3 м^2 пола. За 11 дней уже покрыты 143 м^2. Осталось выложить 145 м^2 плитки, на что потребуется чуть меньше 121 полной коробки (точнее, $120\frac{5}{6}$). С учетом трех запасных коробок заказ составит 124 коробки.

B9. Боковая поверхность данной призмы состоит из двух прямоугольников и двух параллелограммов с острым углом 60°.

B10. Зная площадь треугольника ABM ($10\sqrt{3}$) и две его стороны, находим $\sin ABM=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $AM<AB$, поэтому угол ABM — острый и равен 60°. По теореме косинусов $AM=7$.

C1. ОДЗ: $\begin{cases} x+\dfrac{6}{x+5}>0; \\ \dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}>0. \end{cases}$ $\left(x+\dfrac{6}{x+5}\right)^2=12^3\left(\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}\right)$;

$\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x-5}\right)^3=12^3$. Так как функция $y=x^3$ возрастающая, она принимает свои значения (в том числе и 12^3) не более одного раза (при $x=12$). $\dfrac{x^2-5x+6}{x-5}=12$. Оба корня удовлетворяют ОДЗ: $x_1=6$; $x_2=11$.

Важно! Решать систему неравенств, задающих ОДЗ, необязательно.

Важно! Выделение ОДЗ можно заменить проверкой полученных корней, непосредственно подставив их в исходное уравнение.

С2. Перепишем уравнение в виде $5(2n+3)\cdot 10^x = n+20$. Исследуем его как линейное относительно 10^x:

1) при $n=-1{,}5$: $0\cdot 10^x = 18{,}5$; корней нет;

2) при $n \neq -1{,}5$: $10^x = \dfrac{n+20}{5(2n+3)}$. Значениями выражения 10^x являются все положительные числа. Уравнение не имеет корней, если дробь неположительна, то есть при $n \in [-20; -1{,}5)$.

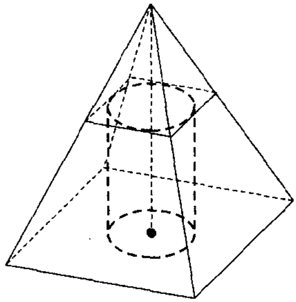
Объединяя оба случая, получаем ответ $[-20; -1{,}5]$.

Важно! Другой способ решения основан на идее взаимозависимости между значениями параметра и значениями корней уравнения. Из уравнения выразим $n(x) = \dfrac{20-15\cdot 10^x}{10\cdot 10^x - 1}$ (знаменатель не обращается в 0, так как согласно исходному уравнению $10^x \neq 0{,}1$) и определим, какие значения n не соответствуют ни одному из действительных значений x. Область значений n как функции от x можно найти посредством производной. Ниже продемонстрируем сугубо алгебраический путь.

Обозначим $10^x = t > 0$. Разделим числитель на знаменатель: $n(t) = \dfrac{18{,}5}{10t-1} - 1{,}5$. Последовательно найдем множество значений знаменателя, дроби, разности: $10t > 0$; $10t - 1 > -1$; $\dfrac{1}{10t-1} \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; $\dfrac{18{,}5}{10t-1} \in (-\infty; -18{,}5) \cup (0; +\infty)$; $\dfrac{18{,}5}{10t-1} - 1{,}5 \in (-\infty; -20) \cup (-1{,}5; +\infty)$.

Не вошедшие в последнее множество значения n не соответствуют ни одному из положительных значений t и тем самым — ни одному из действительных значений x.

С3. Пусть радиус основания и высота цилиндра соответственно равны r и h, площади оснований усеченной пирамиды s и S, высота полной пирамиды H. Тогда с учетом подобия оснований усеченной пирамиды объем полной $V_{\text{полн}} = \dfrac{1}{3}SH = \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 s\cdot\dfrac{5}{3}h$. Площадь меньшего основания усеченной пирамиды выражается через радиус вписанной окружности: $s=\dfrac{8r^2}{\sqrt{3}}$. Объем цилиндра $V_{\text{цил}}=\pi r^2 h$, то есть $r^2 h=9\sqrt{3}$. Таким образом, $V_{\text{полн}}=250$.



С4. $D(y)$ удовлетворяет условию $a^x-a^{ax+2}>0$. Выясним, при каких положительных значениях параметра a в множестве решений неравенства $a^{(a-1)x+2}<1$ имеются натуральные двузначные числа, но нет ни одного натурального трехзначного числа.

1. $a=1$; неравенство преобразуется к неверному числовому $1<1$ — решений нет.
2. $a>1$; тогда $(a-1)x+2<0$; $x<-\dfrac{2}{a-1}$ — нет натуральных решений.
3. $0<a<1$; в этом случае $(a-1)x+2>0$; $x<\dfrac{2}{1-a}$. Требование задачи выполняется при $10<\dfrac{2}{1-a}\le 100$, то есть при $0{,}8<a\le 0{,}98$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Креславская О. А.
Крылов В. В.
Снегурова В. И.
Ярмолюк В. Е.

ЕГЭ—2009

МАТЕМАТИКА

Сдаем без проблем!

Директор редакции *И. Федосова*
Ответственный редактор *А. Жилинская*
Дизайн обложки *Е. Брынчик*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.000828.02.02.08 от 05.02.2008

ООО «Издательство «Эксмо»
7299, Москва, ул. Клары Цеткин, д. 18/5. Тел. 411-68-86, 956-39
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Подписано в печать 03.10.2008.
Формат 60x90 1/16. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Бумага тип. Усл. печ. л. 12,0.
Доп. тираж 15 000 экз. Заказ № 1015.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГП ПО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34.